Operator časovnega razvoja v interakcijski sliki

Jernej Mravlje

december 2002

1 Uvod

Pokazali smo, da za operator časovnega razvoja v interakcijski sliki velja operatorska enačba:

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\widehat{U} = \widehat{H}'_I\widehat{U}, \tag{1}$$

ter da z iterativno integracijo pridemo do kandidata za rešitev.
Trditev 1: Rešitev zgornje enačbe je:

$$\widehat{U}(t,t_0) = \widehat{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}'_I(t_1)\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\widehat{H}'_I(t_2)\mathrm{d}t_2...\int_{t_0}^{t_{n-1}}\widehat{H}'_I(t_n)\mathrm{d}t_n\ .$$

Vpeljimo operator časovne ureditve $\widetilde{T}$, ki deluje nad operatorji nad stanji tako, da poljuben produkt operatorjev uredi po času:

$$\widetilde{T}\widehat{A}_1(t_1)\widehat{A}_2(t_2)...\widehat{A}_n(t_n) = \widehat{A}_{\pi(1)}(t_{\pi(1)})\widehat{A}_{\pi(2)}(t_{\pi(2)})...\widehat{A}_{\pi(n)}(t_{\pi(n)})\ ,$$

kjer je π taka permutacija, da velja $t_{\pi(1)} > t_{\pi(2)} > ... > t_{\pi(n)}$.
Trditev 2: Z operatorjem časovne ureditve zapisana rešitev enačbe (1) je:

$$\widehat{U}(t,t_0) = \widetilde{T}e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}'_I(t')\mathrm{d}t'}\ .$$

2 Dokaz trditve 2

2.1 Dokazuje se

Za operator časovne ureditve smo zapisali trditev:

$$\widehat{I} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t_1)\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\widehat{H}(t_2)\mathrm{d}t_2...\int_{t_0}^{t_{n-1}}\widehat{H}(t_n)\mathrm{d}t_n = \widetilde{T}e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t_n}\widehat{H}(t')\mathrm{d}t'}$$

kjer je $\widehat{H}$ *poljuben* operator in (na predavanjih) dokazali, da se leva in desna stran, razvita v potenčno vrsto ujemata v ničtem, prvem in drugem redu.

Če želimo pokazati, da se v zgornji enakosti ujemajo tudi členi višjih redov, moramo dokazati:

$$\underbrace{\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t_1)\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_2}\widehat{H}(t_2)\mathrm{d}t_2...\int_{t_0}^{t_{n-1}}\widehat{H}(t_n)\mathrm{d}t_n}_{A} = \frac{1}{n!}\underbrace{\widetilde{T}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t_1)\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t_2)\mathrm{d}t_2...\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t_n)\mathrm{d}t_n}_{*} \tag{2}$$

2.2 Groba sila

Dokazujmo s popolno indukcijo! Vemo, da (2) velja za $n = 1$. Pokažimo da, če (2) velja za $n-1$, posledično velja tudi za n. Desno stran (2) zapišemo kot

$$\frac{1}{n}\widetilde{T}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t_1)\mathrm{d}t_1\frac{1}{(n-1)!}\widetilde{T}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t_2)\mathrm{d}t_2...\int_{t_0}^{t_{n-1}}\widehat{H}(t_n)\mathrm{d}t_n = ...$$

in predpostavimo, da (2) velja za $n-1$. Sledi:

$$... = \frac{1}{n}\widetilde{T}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t_1)\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t_2)\mathrm{d}t_2\int_{t_0}^{t_2}\widehat{H}(t_3)\mathrm{d}t_3...\int_{t_0}^{t_{n-1}}\widehat{H}(t_n)\mathrm{d}t_n\ .$$

Zdaj integral po ploskvi $\int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2\widetilde{T}(...)$ ločimo na dva dela $t_1 > t_2$ in ostanek. Prvi del je po časih že urejen ($t_1 > t_2 > ... > t_n$), zato lahko $\widetilde{T}$ izpustimo, v drugem delu, pa je $t_2 > t_1$ zato $\widetilde{T}$ zamenja $H(t_1)H(t_2) \leftrightarrow H(t_2)H(t_1)$. Dobimo:

$$1/n\Big(\underbrace{\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t_1)\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_1}\widehat{H}(t_2)\mathrm{d}t_2...\int_{t_0}^{t_{n-1}}\widehat{H}(t_n)\mathrm{d}t_n}_{A}+$$

$$+\underbrace{\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t_2)\mathrm{d}t_2\widetilde{T}\int_{t_0}^{t_2}\widehat{H}(t_1)\mathrm{d}t_1\int_{t_0}^{t_2}\widehat{H}(t_3)\mathrm{d}t_3\int_{t_0}^{t_3}\widehat{H}(t_3)\mathrm{d}t_4...\int_{t_0}^{t_{n-1}}\widehat{H}(t_n)\mathrm{d}t_n}_{B}\Big).$$

S preimenovanjem $t_1 \leftrightarrow t_2$ lahko člen B zapišemo kot

$$\int_{t_0}^{t}\widehat{H}(t_1)\mathrm{d}t_1\underbrace{\widetilde{T}\int_{t_0}^{t_1}\widehat{H}(t_2)\mathrm{d}t_2\int_{t_0}^{t_1}\widehat{H}(t_3)\mathrm{d}t_3\int_{t_0}^{t_3}\widehat{H}(t_3)\mathrm{d}t_4...\int_{t_0}^{t_{n-1}}\widehat{H}(t_n)\mathrm{d}t_n}_{*}\ .$$

Podčrtani (*) del je po obliki enak podčrtanemu delu (*) na prejšnji strani, a z enim členom manj, zato ga obravnavamo enako. Pri postopku bi iz B izločili še en A, dobili pa bi novi ostanek B' s številom integracij zmanjšanim še za eno. Po ponovitvi postopka n-krat (n je integracij) bi izločili n A-jev, s čimer dokaz zaključimo.

2.3 Geometrijski razmislek

Def.:

$$f \equiv f(t_1, t_2, ..., t_n) \equiv \widetilde{T}\widehat{H}(t_1)\widehat{H}(t_2)...\widehat{H}(t_n)\ .$$

Za f velja, da ostane po poljubni permutaciji $t_j \to t_{\pi(j)}$ argumentov enaka

$$f(t_{\pi(1)}, t_{\pi(2)}, ..., t_{\pi(n)}) = f(t_1, t_2, ..., t_n). \tag{3}$$

Ogledamo si integral f po n-dimenzionalni kocki $\underbrace{[t_0,t]\times[t_0,t]\times...\times[t_0,t]}_{n-faktorjev} := \square$

$$\int_{\square} f = \int_{t_0}^{t}\int_{t_0}^{t}...\int_{t_0}^{t_n} f\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2...\mathrm{d}t_n\ .$$

Zaradi lastnosti (3) je smiselno razdeliti $\square$ na $n!$ po velikosti koordinat urejenih območij, npr.:

$$\square_1 = \{(t_1, t_2, ..., t_n)\ ;\ t_1 > t_2 > ... > t_n \wedge t_1 \in [t_0, t] \wedge t_i > t_0 \forall i\}.$$

Prostornina tega področja (in vsakega drugega po velikosti urejenega) je $(t-t_0)^n/n!$, kar je trivialno preveriti z integracijo, različnih področij pa je glede na definicijo $n!$, kar pomeni, da so področja neprekrivajoča!! Do enakega zaključka bi prišli z upoštevanjem simetrij kocke. (Tako za 2D zrcalna "ravnina"$t_1 = t_2$ preslika spodnji trikotnik v zgornjega, v 3D pa tri zrcalne ravnine (tiste, ki vsebujejo telesno diagonalo in točke oddaljene za ploskovno diagonalo) preslikajo piramido $t_1 > t_2 > t_3$ v pet drugih, ki skupaj sestavijo kocko). Iz povedanega sledi (in zaključuje dokaz)

$$\int_{\square} f = n!\int_{\square_1} f$$

3 Dokaz trditve 1

V enačbo (1) vstavimo $\widehat{U}$ zapisan z operatorjem časovne ureditve.

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Big(\widetilde{T}e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t_n}\widehat{H}'_I(t')\mathrm{d}t'}\Big) = \widetilde{T}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\int_{t_0}^{t_n}\widehat{H}'_I(t')\mathrm{d}t'\Big)e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}'_I(t')\mathrm{d}t'} =$$

$$= \widetilde{T}\widehat{H}'_I(t)e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}'_I(t')\mathrm{d}t'} = \widehat{H}'_I(t)\widetilde{T}e^{\frac{1}{i\hbar}\int_{t_0}^{t}\widehat{H}'_I(t')\mathrm{d}t'} = \widehat{H}'_I\widehat{U}$$

Pri računanju je edini netrivialen prehod čez predzadnji enačaj. Operator $\widehat{H}'_I$ lahko izvzamemo iz $\widetilde{T}$ zato, ker je t' manjši ali kvečjemu enak t; $\widetilde{T}$ torej (po definiciji) postavlja $\widehat{H}'_I$ v vsakem primeru na prvo mesto.