1. Izpit iz klasične mehanike, 22.5.2020

1. a) Utež z maso m gladko drsi po vodilu, ki gibanje uteži omejuje na neko pot v ravnini xy (z, v smeri težnosti, je konst). Katera količina se ohranja?
b) Za vodilo velja $r = a\phi$. Zapiši ohranjeno količino iz a)! Upoštevaj vez!
c) Ob $t = 0$ sunemo utež z $r = 0$ tako, da ima začetno hitrost $|v| = v_0$. Poišči zvezo, ki določa položaj uteži ob kasnejših časih! Pomagaš si lahko z integralom $\int dx\sqrt{1+x^2} = (1/2)(x\sqrt{1+x^2} + \mathrm{arsinh}(x))$!
d) Za majhne in velike čase zapiši $\phi(t)$!
e) Izračunaj navor s katerim vodilo deluje na utež, odvisnost navora od časa skiciraj in z besedami obnašanje kvalitativno razloži!
f) Sedaj vodilo sprostimo, tako da se prosto vrti okrog izhodišča v vodoravni ravnini (z vztrajnostnim momentom J). Zapiši Lagrangeovo funkcijo za ta primer! Katera dodatna količina se ohranja? Izpelji jo!
g) Tudi v tem primeru sunimo utež z izhodišča z začetno hitrostjo v_0. Kako se bo utež gibala za majhne čase in kako za velike? [1.75 točke]

2. Delec se nahaja v splošnem centralnem potencialu $V(r)$. Zapiši ohranjene količine in efektivni potencial. Z uporabo efektivnega potenciala izrazi pogoj za obstoj krožne orbite. Denimo, da za $V(r)$ obstaja krožna orbita z radijem r_0 in da se po njej giblje delec z maso m. Kolikšen je obhodni čas delca? Izrazi ga z $V(r)$ oziroma odvodi le-tega.

Delec izmaknemo iz krožne orbite z radijem r_0 za majhen odmik ε_0, tako da je $|\varepsilon_0| \ll r_0$, vrtilna količina pa ostane nespremenjena glede na tisto, ki jo delec ima v krožni orbiti. Izrazi energijo delca z uporabo $\varepsilon = r - r_0$ (in njegovimi odvodi) in jo razvij po Taylorjevem razvoju do drugega reda v ε. Pod katerim pogojem je orbita stabilna ($|\varepsilon(t)| \ll r_0$ za vse čase)? Za primer stabilne orbite izračunaj frekvenco nihanja ε okrog ravnovesne lege in izrazi $\varepsilon(t)$! [1 točka]

3. Naj bo Lagrangeva funkcija $L(q, \dot{q})$ homogena funkcija spremenljivke $\dot{q}$, se pravi oblike $L = (\dot{q})^n f(q)$, kjer je n konstanta in $f(q)$ poljubna funkcija spremenljivke q. Naj dodatno velja $n \neq 0, 1$. Pokaži, da se vrednost L ohranja, $dL/dt = 0$! [0.5 točke]