CENTRALNI POTENCIAL – RAVNINSKI PROBLEM

Za problem dveh teles v centralnem potencialu poišči $\vartheta(\varphi)$ (kota sferičnih koordinat) in nato pokaži, da gre za ravninsko gibanje!

NAMIGI:

- Lagrangean: $L = \frac{\mu}{2}(\dot r^2 + r^2\dot\vartheta^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot\varphi^2) - V(r)$; μ – reducirana masa
- E-L enačbe: φ ciklična, $\frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = p_\varphi$ ohranjena

  (1) ϑ: $\frac{d}{dt}(\mu r^2\dot\vartheta) = \mu r^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\dot\varphi^2$

- Ker nas zanima $\vartheta(\varphi)$ in ne $\vartheta(t)$, zamenjamo:

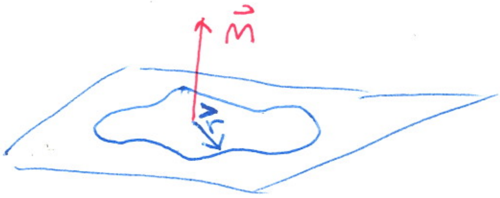
  $$\frac{d}{dt} \to \frac{d}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} \to \frac{d}{d\varphi}\dot\varphi$$

  To naredimo za enačbo (1).

- Izrazi $\dot\varphi$ z p_φ, tako da (1) izražena le s ϑ in odvodi po φ. Dobimo

  $$\frac{d^2}{d\varphi^2}\cot\vartheta + \cot\vartheta = 0$$

- Rešitev: $\cot\vartheta = A\cos(\varphi-\varphi_0)$
- Če je to ravninsko gibanje, vedno obstaja nek konstanten vektor $\vec m$, ki je vedno pravokoten na $\vec r$!



$$\vec m\cdot\vec r = 0$$

$$\vec r = (r\cos\varphi\sin\vartheta,\ r\sin\varphi\sin\vartheta,\ r\cos\vartheta)$$

$$\vec m = (\cos\varphi_0\sin\vartheta_0,\ \sin\varphi_0\sin\vartheta_0,\ \cos\vartheta_0)$$

poljuben konstanten vektor

Zmnoži $\vec m\cdot\vec r$ po komponentah. Po obračanju enačbe dobiš

$$\cos(\varphi-\varphi_0) = -\cot\vartheta_0\cot\vartheta$$

Enačba gibanja, kateri ustreza $\vartheta(\varphi)$, torej je res ravninsko gibanje! ✓