Gibanje elektrona v polju magnetnega monopola

March 5, 2017

1 Gostota magnetnega polja

Analogno jakosti električnega polja zapišemo gostoto magnetnega polja v odvisnosti od magnetnega monopola $\mathrm{e_m}$.

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e_m}{4\pi} \frac{\vec{r}}{r^3} = g \frac{\vec{r}}{r^3} \tag{1}$$

Zapišemo še Lorenzovo silo, kjer predpostavimo, da je jakost električnega polja enaka nič, ter zapišemo 2. Newtonov zakon.

$$\vec{F} = e(\cancel{\vec{E}} + \dot{\vec{r}} \times \vec{B}) \tag{2}$$

$$m\ddot{\vec{r}} = ge\,\dot{\vec{r}} \times \frac{\vec{r}}{r^3}$$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{ge}{m} \frac{1}{r^3} \dot{\vec{r}} \times \vec{r} \tag{3}$$

2 Ugotovitve iz oblike pospeška

Vidimo, da je smer pospeška pravokotna tako na koordinate, kot na hitrost $\mathrm{e^-}$.

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = 0 \tag{4}$$

$$\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \tag{5}$$

Zaradi prve zveze lahko vidimo, da je časovni odvod skalarnega produkta hitrosti in položaja $\mathrm{e^-}$ enak kvadratu velikosti hitrosti, zaradi drugege zveze pa je odvod tega kvadrata velikosti hitrosti enak nič, kar nam pove da je velikost hitrosti konstantna, kar je smiselno, glede na to da magnetna sila deluje pravokotno na gibanje in spreminja le smer hitrosti. Zgoraj omenjeni časovni odvod integriramo, ter dobimo novo zvezo.

$$(\dot{\vec{r}}^2)^\bullet = 2\,\ddot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \implies \dot{\vec{r}}^2 = konst.$$

$$(\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})^\bullet = \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r} + \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}} = \dot{\vec{r}}^2 = v_0^2 \qquad\qquad / \int \mathrm{d}t$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = v_0^2\, t + D \tag{6}$$

Pospešek ima smer vrtilne količine, če pa le to odvajamo po času, pa dobimo smer, ki je pravokotna na pospešek ter smer vektorja položaja delca. Tako lahko v enačbi povežemo časovni odvod vrtilne količine ter vrtilno količino. Ker je časovni odvod vrtilne količine pravokoten na vrtilno količino, lahko ugotovimo, da se velikost vrtilne količine ohranja. To ugotovitev dosežemo iz pravokotnosti med vrtilno količino ter njenim odvodom, ter odvajanjem kvadrata velikosti vrtilne količine.

$$\begin{aligned}
\vec{\Gamma} &= \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\,\dot{\vec{r}} \\
(\frac{-1}{m}\,\vec{\Gamma})^{\bullet} &= (\dot{\vec{r}} \times \vec{r})^{\bullet} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{r} + \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}} \times \vec{r} \\
\ddot{\vec{r}} \times \vec{r} &= \frac{ge}{m}\frac{(-1)}{r^3}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} = -\frac{ge}{m^2 r^3}\vec{\Gamma} \times \vec{r} \\
-\frac{1}{m}\,\dot{\vec{\Gamma}} &= -\frac{ge}{m^2 r^3}\vec{\Gamma} \times \vec{r} \qquad\qquad /(-m) \\
\dot{\vec{\Gamma}} &= \frac{ge}{m r^3}\vec{\Gamma} \times \vec{r} \qquad\qquad / \cdot \vec{\Gamma} \qquad (7) \\
\dot{\vec{\Gamma}} \cdot \vec{\Gamma} = 0 &\implies (\vec{\Gamma}^2)^{\bullet} = 2\,\dot{\vec{\Gamma}} \cdot \vec{\Gamma} = 0 \implies \Gamma = konst.
\end{aligned}$$

3 Gibanje po površini stožca

Sedaj po času odvajamo smer položaja e- ter s pomočjo pravil za trojni vektorski produkt vidimo, da ima ta izraz podobno obliko kot časovni odvod vrtilne količine. Ko ju povežemo, enačbo integriramo po času, iz kjer dobimo še integracijsko konstanto: $\vec{\Gamma}_0$ ulomljeno z eg. Enačbo preuredimo ter kvadriramo, ter ugotovimo, da so vsi členi, razen enega, ki ga ne poznamo, konstantni. To pomeni, da je tudi nepoznan člen konstanten, ta člen pa nam pove da vektor položaja $\vec{r}$ oklepa konstanten kot z vektorjem $\vec{\Gamma}_0$, iz česar sledi ugotovitev, da se e- giblje po površini stožca.

$$\dot{r} = (\sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}})^{\bullet} = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r}}{r}$$

$$(\frac{\vec{r}}{r})^{\bullet} = \frac{\dot{\vec{r}}r - \vec{r}\dot{r}}{r^2} = \frac{\dot{\vec{r}} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r})}{r^3} = \frac{1}{r^3}\,(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r}$$

$$\left.\begin{aligned} \dot{\vec{\Gamma}} &= \tfrac{ge}{r^3}\,(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} \\ (\tfrac{\vec{r}}{r})^{\bullet} &= \tfrac{1}{r^3}\,(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} \end{aligned}\right\} \frac{\dot{\vec{\Gamma}}}{eg} = (\frac{\vec{r}}{r})^{\bullet} \qquad\qquad / \int \mathrm{d}t \tag{8}$$

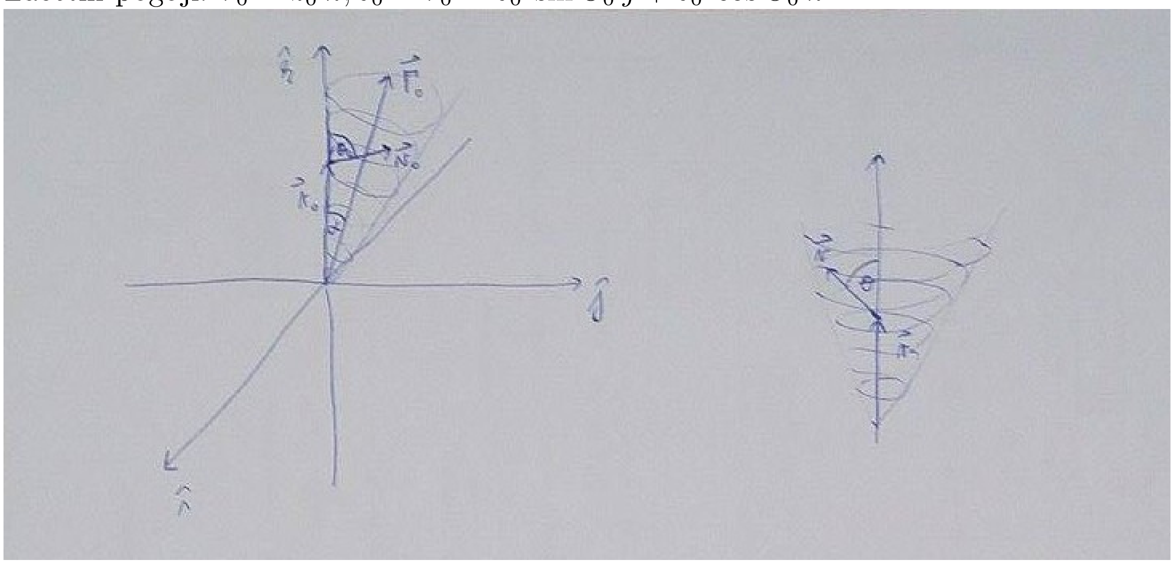
$$\frac{\vec{\Gamma}}{eg} + \frac{\vec{\Gamma}_0}{eg} = \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\frac{\vec{\Gamma}}{eg} = \frac{\vec{r}}{r} - \frac{\vec{\Gamma}_0}{eg} \qquad\qquad /^2$$

$$\frac{\vec{\Gamma}^2}{(eg)^2} = 1 - \frac{2}{eg}\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\Gamma}_0 + \frac{\vec{\Gamma}_0^2}{(eg)^2} \implies \frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\Gamma}_0 = konst.$$

$\vec{\Gamma}_0$ je os stožca. Ker se e$^-$ vedno giblje po stožcu, bo $\dot{\vec{r}}$ vedno v tangentni ravnini stožca. Θ je kot med $\dot{\vec{r}}$ in $\vec{r}$. v_0 izberemo tako, da leži v ravnini $\hat{j}$ in $\hat{k}$, začetni položaj $\vec{r}_0$ pa v smeri $\hat{k}$.

Začetni pogoji: $\vec{r}_0 = z_0\,\hat{k}, \vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0 = v_0\,\sin\Theta_0\,\hat{j} + v_0\,\cos\Theta_0\,\hat{k}$



$$\vec{\Gamma}_z = m\,\vec{r}_0 \times \vec{v}_0 = -m\,z_0\,v_0\,\sin\Theta_0\,\hat{i} = -\Gamma_z\,\hat{i}$$

$$\frac{\vec{\Gamma}}{eg} + \frac{\vec{\Gamma}_0}{eg} = \frac{\vec{r}}{r} \qquad\qquad / \cdot eg,\ -\vec{\Gamma},\ pri\ ZP$$

$$\vec{\Gamma}_0 = eg\,\hat{k} + \Gamma_z\,\hat{i}$$

$$|\,\vec{\Gamma}_0\,| = \sqrt{(eg)^2 + \Gamma_z^2}$$

$$\vec{\Gamma}_0 \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \vec{\Gamma}_0 \cdot \hat{k} = eg = \cos\alpha\,\Gamma_0$$

$$\cos\alpha = \frac{eg}{\sqrt{(eg)^2 + \Gamma_z^2}}$$

$$|\,\vec{\Gamma}_0 \times \hat{k}\,| = \Gamma_z = \sin\alpha\,\Gamma_0$$

$$\sin\alpha = \frac{\Gamma_z}{\sqrt{(eg)^2 + \Gamma_z^2}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\Gamma_z}{eg}$$

$$\dot{\vec{r}}^2 = konst.,\ \ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = 0,\ r(t) = ?$$

$$\dot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = v_0\, r\ \cos\Theta = v_0^2\, t + D \tag{9}$$

$$Ob\, t = 0 :\ D = v_0\, z_0\ \cos\Theta_0$$

$$\mid \vec{r} \times m\dot{\vec{r}} \mid = r\, v_0\, m\ \sin\Theta = \Gamma_z \tag{10}$$

$$\frac{(10)}{(9)} :\ \tan\Theta = \frac{\Gamma_z}{m\,(v_0^2\, t + D)} = \frac{\Gamma}{m\,(v_0^2\, t + v_0\, z_0\ \cos\Theta_0)} \tag{11}$$

$$(10)^2 + (9)^2 :\ r(t) = \frac{1}{v_0}\sqrt{(\frac{\Gamma}{m})^2 + (v_0^2\, t + v_0\, z_0\ \cos\Theta_0)^2} \tag{12}$$

4 Primer ob času t=0

e⁻ bo imel najmanjšo razdaljo od izhodišča, če se bo ob času t=0 gibal pravokotno na vektor položaja, torej $\Theta_0 = \frac{\pi}{2}$.

$$\cos\Theta_0 = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \implies D = 0$$

$$\sin\Theta_0 = \sin\frac{\pi}{2} = 1 \implies \Gamma_z = m\, v_0\, z_0$$

$$\tan\Theta = \frac{v_0\, z_0}{v_0^2\, t} = \frac{z_0}{v_0\, t} \tag{13}$$

$$r(t) = \frac{1}{v_0}\sqrt{(v_0\, z_0)^2 + (v_0^2\, t)^2} = \sqrt{z_0^2 + (v_0\, t)^2} \tag{14}$$

5 Sistem, kjer je os stožca vzporedna enotskem vektorju k

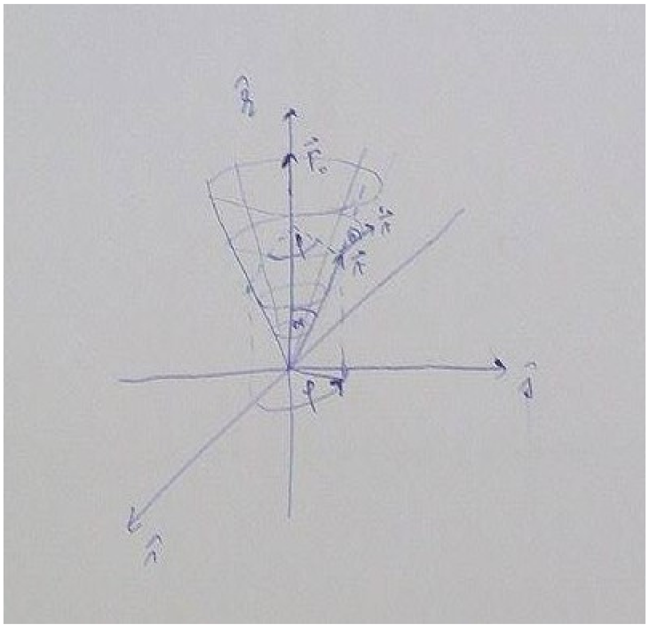
Nov sistem dobimo , če prejšnji $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ zavrtimo za kot α okoli osi $\hat{j}$. Za α velja: $\tan\alpha = \frac{\Gamma_z}{eg} = \frac{m}{eg}\, v_0\, z_0$.Poleg r(t) vpeljemo še kot $\varphi(t)$, ki je enak kot kot φ v cilindričnih ali sferičnih koordinatah.
Zapišemo lok, ter s pomočjo tega še kot, ki ju e⁻ opiše v dt. Ko ta kot integriramo, dobimo še željeno zvezo $\varphi(t)$.

$$dl = v_0\ \sin\Theta\, dt$$

$$d\varphi = \frac{dl}{\rho} = \frac{v_0\ \sin\Theta\, dt}{r\ \sin\alpha} = \frac{r\, v_0\ \sin\Theta}{r^2\ \sin\alpha}\, dt = \frac{\frac{\Gamma_z}{m}}{r^2\ \sin\alpha}\, dt = \frac{v_0\, z_0}{r^2\ \sin\alpha}\, dt$$

$$d\varphi = \frac{v_0\, z_0}{\sin\alpha}\frac{dt}{(z_0^2 + (v_0\, t)^2)} \qquad / \int$$

$$\varphi(t) = \frac{v_0\, z_0}{\sin\alpha} \int\limits_0^t \frac{dt'}{(z_0^2 + (v_0\, t')^2)} = \frac{1}{\sin\alpha} \int\limits_0^{(\frac{v_0\, t}{z_0})} \frac{d(\frac{v_0\, t'}{z_0})}{1 + (\frac{v_0\, t'}{z_0})^2} = \frac{\arctan(\frac{t\, v_0}{z_0})}{\sin\alpha} \tag{15}$$



Iz enačb (14) in (15) vidimo, da se po dolgem času e^- oddaljuje s konstantno hitrostjo, kot φ pa je po dolgem času konstanten.