

# Navpičen obroč z gravitacijo

Nejc Čeplak

30. marec 2015

Obravnavamo obroč, ki je postavljen v  $xz$  ravnini. Po tem obroču se giblje točkast delec. Ta čuti viskozno silo trenja, ki je sorazmerna s hitrostjo gibanja delca. Hkrati delec tudi čuti gravitacijo, ki deluje v smeri navzdol. Ker ima obroč konstanten radij so najbolj ugodne polarne koordinate, kjer uvedemo transformacijo:

$$x = r \cos(\phi)$$

$$z = r \sin(\phi)$$

Izpeljali smo že izraz za silo v polarnih koordinatah

$$\vec{F} = m \left[ (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\hat{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\hat{e}_\phi \right]$$

kjer smo upeljali ortonormirana bazna vektorja za polarne koordinate  $\hat{e}_r$  in  $\hat{e}_\phi$  kot:

$$\hat{e}_r = (\cos \phi, \sin \phi)$$

$$\hat{e}_\phi = (-\sin \phi, \cos \phi)$$

Na naš delec delujeta dve sili. In sicer viskozna sila trenja, ki je sorazmerna hitrosti in kaže v nasprotni smeri gibanja. Naj bo ta sila oblike  $\vec{F}_v = -2m\tau\vec{v}$ . Hkrati pa deluje tudi sila gravitacije, ki ima smer navpično navzdol  $\vec{F}_g = m\vec{g} = m(0, -g)$ . Medtem ko bo sila trenja delovala le v kotni smeri gibanja in bo imela tako obliko  $F_v = -2m\tau r\dot{\phi}$ , bo imela sila gravitacije neničelni obe komponenti, tako polarno kot radialno. Zato poiščemo projekcije gravitacijske sile na bazna vektorja  $\hat{e}_r$  in  $\hat{e}_\phi$  ter upoštevamo da sta že normirana. Tako je:

$$F_{g\phi} = (\vec{F}_g \cdot \hat{e}_\phi)\hat{e}_\phi = -mg \cos(\phi)\hat{e}_\phi$$

$$F_{gr} = (\vec{F}_g \cdot \hat{e}_r)\hat{e}_r = -mg \sin(\phi)\hat{e}_r$$

Lahko tudi preverimo, da je  $|\vec{F}| = |(F_{gr}, F_{g\phi})| = mg$ . Sedaj pa obravnavamo silo po komponentah. Ker se naš delec giblje po togem obroču se radij s časom ne spreminja je  $\dot{r} = \ddot{r} = 0$ . S tem se izraz za silo poenostavi za dva člena. Zanima na tangencialna smer gibanja. Tako sledi:

$$F_\phi = -2mr\tau\dot{\phi} - mg \cos \phi = mr\ddot{\phi}$$

Kar lahko preuredimo:

$$\frac{r}{g}\ddot{\phi} + 2\tau\frac{r}{g}\dot{\phi} + \cos \phi = 0$$

Uvedemo lahko krožno frekvenco  $\omega_0^2 = g/r$ , s čimer se enačba prevede na:

$$\frac{1}{\omega_0^2}\ddot{\phi} + 2\frac{\tau}{\omega_0^2}\dot{\phi} + \cos \phi = 0$$

Ali v bolj znano obliko diferencialne enačbe, ki je podobna enačbi za za dušeno nihanje:

$$\ddot{\phi} + 2\tau\dot{\phi} + \omega_0^2 \cos \phi = 0$$

Ker pa te diferencialne enačbe ne znamo anaitično rešiti. Lahko pa razvijemo kosinus okoli dveh ekstremnih leg - ko je delec na vrhu in na dnu.

- **Vrhnja lega**

Ko je delec popolnoma na vrhu je kot  $\phi = \pi/2$ . Tako razvijemo kosinus po Taylorju okoli te točke:

$$\cos(\phi) \approx \cos(\pi/2) + (-\sin(\pi/2))(\phi - \pi/2) = -\phi + \pi/2$$

Za majhne odmike iz te lege je diferencialna enačba enaka:

$$\ddot{\phi} + 2\tau\dot{\phi} + \omega_0^2(-\phi + \pi/2) = 0$$

Partikularno rešitev kar uganemo z  $\phi_p = \pi/2$ . Homogen del pa nam da rešitev kombinacijo eksponentnih funkcij ali hiperboličnih sinusov in kosinusov. Homogeno rešitev dobimo preko reševanja karakteristične enačbe te diferencialne enačbe:

$$\lambda^2 + 2\tau\lambda - \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\tau \pm \sqrt{4\tau^2 + 4\omega_0^2}}{2} = -\tau \pm \sqrt{\tau^2 + \omega_0^2}$$

Tako je končna rešitev DE vsota homogene in partikularne rešitve

$$\phi(t) = \pi/2 + \exp(-\tau t) \left[ A \sinh\left(\sqrt{\tau^2 + \omega_0^2} t\right) + B \cosh\left(\sqrt{\tau^2 + \omega_0^2} t\right) \right]$$

Konstanti  $A$  in  $B$  pa določimo preko začetnih pogojev položaja ter kotne hitrosti. Recimo, v kolikor je  $\phi(0) = 0$  potem je  $B = 0$  in dobimo za rešitev samo hiperbolični sinus. Pomembna pa je tudi opaziti, da velja neenakost  $\tau \leq \sqrt{\tau^2 + \omega_0^2}$ , kar pomeni, da kot  $\phi$  s časom narašča preko vseh mej.

- **Spodnja lega**

Ko je delec na dnu je kot enak  $\phi = -\pi/2$ . Spet kosinus kota razvijemo po Taylorju, le da imamo sedaj drugačen kot okoli katerega razvijamo.

$$\cos(\phi) \approx \cos(-\pi/2) + (-\sin(-\pi/2))(\phi + \pi/2) = \phi + \pi/2$$

Tako ponovno dobimo novo diferencialno enačbo:

$$\ddot{\phi} + 2\tau\dot{\phi} + \omega_0^2(\phi + \pi/2) = 0$$

Partikularno rešitev ponovno uganemo kot  $\phi_p = -\pi/2$ , homogena rešitev pa je tokrat rahlo drugačna, saj dobimo nihanje oziroma v končno rešitev, ki je odvisna od parametrov gibanja. To se lepo vidi iz karakteristične enačbe:

$$\lambda^2 + 2\tau\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\tau \pm \sqrt{4\tau^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\tau \pm \sqrt{\tau^2 - \omega_0^2}$$

Od tod sledijo rešitve diferencialne enačbe

$$\phi(t) = -\pi/2 + \exp(-\tau t) \left[ A \exp\left(\sqrt{\tau^2 - \omega_0^2} t\right) + B \exp\left(-\sqrt{\tau^2 - \omega_0^2} t\right) \right]$$

Rešitev je odvisna od razmerja med  $\tau$  ter  $\omega_0$  in nam da natanko takšne rešitve kot enačba za dušeno nihanje harmonskega oscilatorja. Tako ločimo tri primere:

1.  $\tau = \omega_0$

Takrat je izraz v eksponentu ob vsakem času enak 0 in moramo rešitvi dodati še en dodaten člen  $t \exp(\omega' t)$  dobimo končno rešitev:

$$\phi(t) = -\pi/2 + (C + Dt) \exp(-\tau t)$$

Ponovno  $C$  in  $D$  dobimo iz začetnih pogojev.

2.  $\tau > \omega_0$

Takrat je izraz pod korenem večji od nič, s čimer je vedno realen. Zato lahko rešitev ponovno preoblikujemo v linearno kombinacijo hiperboličnih funkcij.

$$\phi(t) = -\pi/2 + \exp(-\tau t) \left[ A \sinh\left(\sqrt{\tau^2 - \omega_0^2} t\right) + B \cosh\left(\sqrt{\tau^2 - \omega_0^2} t\right) \right]$$

3.  $\tau < \omega_0$

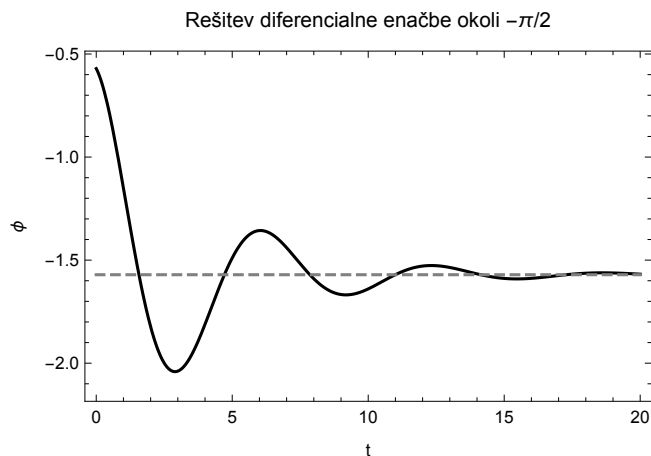
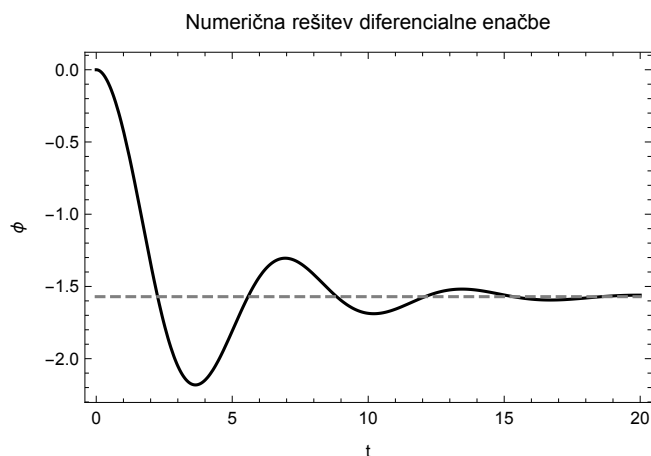
Tokrat pa je izraz pod korenem negativen in tako je eksponent imaginaren. Zato uporabimo  $\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$  in lahko zapišemo rezultat kot linearno kombinacijo harmoničnih funkcij - sinusov in kosinusov.

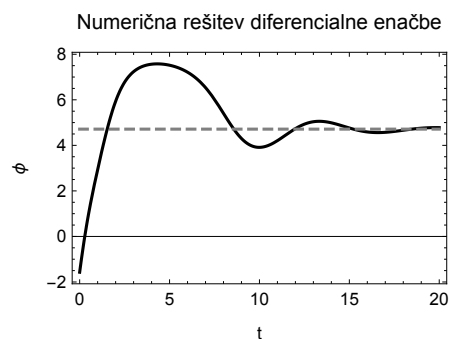
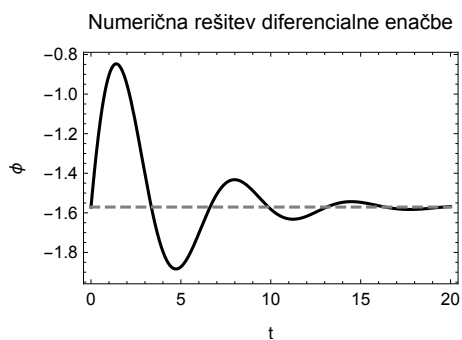
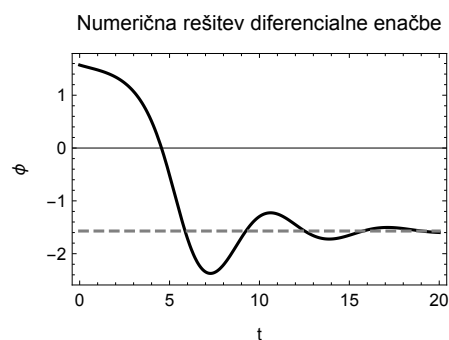
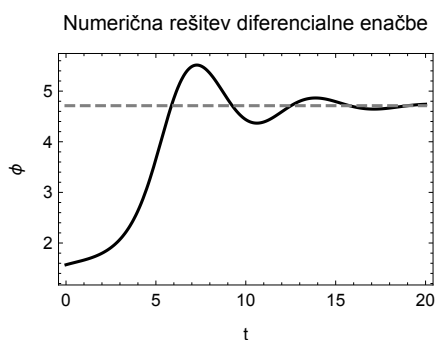
$$\phi(t) = -\pi/2 + \exp(-\tau t) \left[ A \sin\left(\sqrt{\omega_0^2 - \tau^2} t\right) + B \cos\left(\sqrt{\omega_0^2 - \tau^2} t\right) \right]$$

To pa je res enačba dusenega nihanja, kot ga dobro poznamo. Z uvedbo nadomestne frekvence  $\omega^2 = \omega_0^2 - \tau^2$  dobimo še lepšo obliko enačbe

$$\phi(t) = -\pi/2 + \exp(-\tau t) [A \sin(\omega t) + B \cos(\omega t)]$$

Narišemo lahko nekaj tipičnih primerov grafov (v večini primerov, so vsi parametri nastavljeni na 1)





Ti grafi so nastali s spreminjanjem začetnih pogojev. Na prejšnji strani sta nastala tako, da je delec na začetku na položaju  $s \phi(0) =$  ter s hitrostjo 0. Za analitično reševanje je bil tako vzet le kosinusni del in lahko opazimo, da dobimo enako funkcijsko odvisnost. Zgornja grafa na tej strani imata začetni položaj na vrhu in jima dodamo le majhno hitrost v pozitivno ali negativno smer. Čeprav se zdi, da se ustavita na različnih točkah, ima en ravnovesno lego pri  $-\pi/2$  drug pa pri  $3\pi/2$ , kar pa je v krogu ekvivalentno. Spodnji levi predstavlja majhen izmik iz spodnje ravnovesne lega in predstavlja dušeno nihanje. Medtem ko spodnji desni predstavlja izmik iz spodnje lege z močnim sunkom - takrat delec opravi cel krog, saj se ustali pri  $3\pi/2$ .