Sipanje delcev na U $\sim r^{-n}$ potencialu

Nejc Čeplak

2. maj 2015

1 Uvod

Obravnavali bomo sipanje na potencialih $U(r) \sim r^{-n}$, kjer bo $n = 1, 2$. Zgodovinsko je obravnavanje sipanja na takih potencialih zelo pomembn0, saj opisuje gibanje okoli točkaste mase ali točkastega naboja. Slednje je opisal Rutherford, ko je opazoval sipanje α delcev na jedru zlata.

Eksperimentalno znamo izmeriti diferecialni sipalni presek σ_{dif}, ki predstavlja število delcev na enoto časa, ki jih po sipanju zaznamo na delu prostora $d\Omega$. Diferecialni sipalni presekse izraža samo preko zveze med *impact parametrom* b ter sipalnim kotom θ kot

$$\sigma_{dif} = \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{b}{\sin(\theta)} \left| \frac{db}{d\theta} \right| \tag{1}$$

2 Gibanje delca v centralnem potencialu

Opis sipanja na centralnem potencialu je zelo podoben opisu gibanja pri Keplerjevem problemu kroženja v centralnem potencialu. Gibanje in interakcijo dveh delcev lahko prevedemo na gibanje težišča ter medsebojne razdalje med delcema. Ker je potencial neodvisen od položaja težišča je gibalna količina teŽišča ohranjena količina. Lagrangevo funkcijo gibanja lahko poenostavljeno zapišemo le kot funcijo medsebojne razdalje $\mathbf{r}$

$$L = \frac{\mu}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - U(|\mathbf{r}|)$$

Sipanje na centralnem potencialu je osno simetričen problem, ki ga lahko obravnavamo je v preseku. Pojav smo tako prevedli na samo dve dimenziji. Najbolj ugodne za opis so polarne koordinate. Tako je Lagrangeva funkcija v novih generaliziranih koordinatah

$$L = \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - U(r) \tag{2}$$

Iz Lagrangeve funkcije opazimo, da je ϕ ciklična koordinata. Torej se ohranja vrtilna količina. Prav tako se ohranja celotna energija, saj Lagrangeva funkcija ni eksplicitno odvisna od časa. Naj bo torej

$$l_z = \mu r^2 \dot{\phi} \tag{3}$$

$$E = \frac{\mu}{2}\dot{r}^2 + \frac{l_z^2}{2\mu r^2} + U(r) \tag{4}$$

Uvedemo pa lahko tudi efektivni potencial

$$U_{eff}(r) = \frac{l_z^2}{2\mu r^2} + U(r)$$

Iz izraza za energijo lahko dobimo izraz za orbito sipanega delca. Zanima nas $r(\phi)$. Zato odvod po času nadomestimo preko posrednega odvoda z odvodom po kotu.

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\phi}\dot{\phi} = \frac{l_z}{\mu r^2}\frac{dr}{d\phi}$$

Iz enačbe za polno energijo naposled lahko dobimo izraz $\phi(r)$

$$
\begin{aligned}
E &= \frac{l_z^2}{2\mu r^4}\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 + \frac{l_z^2}{2\mu r^2} + U(r) \\
\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2 &= \frac{r^4}{l_z^2}\left(2\mu(E-U) - \frac{l_z^2}{r^2}\right) \\
\frac{dr}{d\phi} &= \pm\frac{r^2}{l_z}\sqrt{2\mu(E-U) - \frac{l_z^2}{r^2}} \\
d\phi &= \pm\frac{\frac{l_z}{r^2}dr}{\sqrt{2\mu(E-U) - \frac{l_z^2}{r^2}}} \qquad (5)
\end{aligned}
$$

V kolikor uvedemo novo spremenljivko $u = 1/r$ se enačba (5) prevede v

$$
d\phi = \mp\frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu}{l_z^2}(E-U) - u^2}} \qquad (6)
$$

Ker pričakujemo hiperbolične orbite vemo, da se bosta delca približala do neke minimalne razdalje r_{min}, kar se v novi spremenljivki prevede na u_{max}. Oznacimo z $\Delta\phi$ kot med simetralo hiperbole - to je premica, ki gre skozi izhodišče potenciala in najbližjo točko hiperbole - in asimptoto. Potem velja med $\Delta\phi$ in sipalnim kotom θ zveza

$$
\theta + 2\Delta\phi = \pi \qquad (7)
$$

$\Delta\phi$ izračunamo preko integracije enačbe (6).

$$
\Delta\phi = \int_0^{u_{max}} \mp\frac{du}{\sqrt{\frac{2\mu}{l_z^2}(E-U) - u^2}} \qquad (8)
$$

Torej, za vsak primer moramo izračunati r_{min} oziroma u_{max}, izvrednotiti integral in preko zveze (7) dobiti odvisnost sipalnega kota θ od začetnih parametrov delca. Posebej, če upostevamo stanje delca daleč stran od izvora polja. Tam lahko predpostavimo, da se delec giblje prosto. Njegova cela energija je tam enaka kinetični energiji, njegova vrtilna količina pa vsebuje začetno hitrost v_0. Torej velja

$$
\begin{aligned}
E = T_0 &= \frac{\mu}{2}v_0^2 \qquad (9) \\
l_z &= \mu b v_0 \qquad (10)
\end{aligned}
$$

3 Potencial $U = C/r^2 = Cu^2$

Iz pogoja, da je na najmanjši razdalji radialna hitrost enaka 0, lahko določimo u_max.

$$\frac{2\mu}{l_z^2}E = \left(\frac{2\mu C}{l_z^2} + 1\right) u_{max}^2$$

$$u_{max}^2 = \frac{E}{C + \frac{l_z^2}{2\mu}} \tag{11}$$

Na ta način lahko preuredimo argument v korenu. Velja namreč $E - U = (C + l_z^2/2\mu)u_{max}^2 - Cu^2$. Tako je

$$\Delta\phi = \mp\frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu C}{l_z^2} + 1}} \int_0^{u_{max}} \frac{du}{\sqrt{u_{max}^2 - u^2}}$$

Ko izvrednotimo integral dobimo lahko dobimo izraz za sipalni kot.

$$\Delta\phi = \frac{\pi}{2\sqrt{\frac{2\mu C}{l_z^2} + 1}}$$

$$\theta = \pi - 2\Delta\phi = \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{2\mu C}{l_z^2} + 1}}\right) \tag{12}$$

V izraz vstavimo začetne pogoje, ki so podani z enačbama (9) in (10).

$$\frac{2\mu C}{l_z^2} = \frac{2\mu C}{\mu^2 v_0^2 b^2} = \frac{U(b)}{T_0}$$

Upoštevali smo, da je C/b^2 ravno potencial izvrednoten na razdalji b. Od tod sledi, da se sipalni kot izraža z začetnimi pogoji

$$\theta = \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{U(b)}{T_0} + 1}}\right) \tag{13}$$

Izrazimo še sipanje v limitnih primerih. To je v primeru, da se delca sipljeta zelo blizu ($b \to 0$), ali ko se delca sipljeta na velikih razdaljah ($b \to \infty$).

- $b \to 0$

$$\theta = \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{U(b)}{T_0} + 1}}\right) = \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{b^2 T_0} + 1}}\right) \approx \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{b^2 T_0}}}\right) = \pi\left(1 - b\sqrt{\frac{T_0}{C}}\right) \tag{14}$$

  Uporabili smo približek, da je zaradi majhne vrednosti b ulomek veliko večji od 1. Torej v limiti bližnjega sipanja se kot sipanja spreminja linearno z impact parametrom.

- $b \to \infty$

$$\theta = \pi\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\frac{C}{b^2 T_0} + 1}}\right) \approx \pi\left[1 - \left(1 - \frac{C}{2b^2 T_0}\right)\right] = \frac{\pi C}{2b^2 T_0} \tag{15}$$

  Uporabili smo Taylorjev razvoj v vrsto funkcije $(1 + x)^{-1/2}$. V limiti velikih razdalij med delci se torej kot sipanja manjša z kvadratom impact parametra.

4 Keplerjev potencial $U = C/r = Cu$

Sedaj pa obravnavamo potencial $U = C/r = Cu$, ki je običajen potencial sil, ki padajo s kvadratom razdalje. To so električna in gravitacijska sila. u_{max} ponovno izračunamo preko pogoja, da je na minimalni razdaji radialna hitrost enaka 0. Iz izraza za celotno energijo sistema sledi

$$\frac{2\mu}{l_z^2}E = \frac{2\mu C}{l_z^2}u_{max} + u_{max}^2$$

Dobimo splošno kvadratno enačbo. Njene ničle so:

$$u_{1,2}^{max} = -\frac{\mu C}{l_z^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu C}{l_z^2}\right)^2 + \frac{2\mu E}{l_z^2}} \tag{16}$$

Ker pa je r lahko le pozitiven je lahko tudi u le pozitivno število in posledično moramo v izrazu izbrati pozitiven predznak. Z izračunanim u_{max} lahko izvrednotimo integral (8). Pri tem pa moramo izraz pod korenom dopolniti do popolnega kvadrata.

$$\frac{2\mu}{l_z^2}(E-U) - u^2 = \frac{2\mu}{l_z^2}E - \frac{2\mu C}{l_z^2}u - u^2 = \frac{2\mu}{l_z^2}E + \left(\frac{\mu C}{l_z^2}\right)^2 - \left(u + \frac{\mu C}{l_z^2}\right)^2 = \left(u_{max} + \frac{\mu C}{l_z^2}\right)^2 - \left(u + \frac{\mu C}{l_z^2}\right)^2$$

Če vpeljemo novo spremenljivko $t = u + \frac{\mu C}{l_z^2}$ ter $t_max = u_{max} + \frac{\mu C}{l_z^2}$ elemetaren integral

$$\Delta\phi = \int_{\frac{\mu C}{l_z^2}}^{t_{max}} \frac{dt}{\sqrt{t_{max}^2 - t^2}} = \frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El_z^2}{\mu C^2}}}\right)$$

Sipalni kot je tako

$$\theta = \pi - 2\Delta\phi = 2\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2El_z^2}{\mu C^2}}}\right)$$

Ker pa velja identiteta med krožnimi funckijami (glej Matematični priročnik)

$$\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right) = \cot^{-1}(x)$$

lahko sipalni kot izrazimo kot

$$\theta = 2\cot^{-1}\left(\sqrt{\frac{2El_z^2}{\mu C^2}}\right) \tag{17}$$

Ponovno lahko vstavimo začetne pogoje preko izrazov (9) in (10).

$$\frac{2El_z^2}{\mu C^2} = \frac{2T_0\mu^2 v_0^2 b^2}{\mu C^2} = \frac{4T_0^2}{U(b)^2}$$

Ponovno smo upoštevali, da je C/b potencial izvrednoten na razdalji b. Sipalni kot lahko sedaj izrazimo z začetnimi pogoji.

$$\theta = 2\cot^{-1}\left(\frac{2T_0}{U(b)}\right) \tag{18}$$

Izrazimo še obnašanja v limitnih primerih impact parametra.

- $b \to 0$

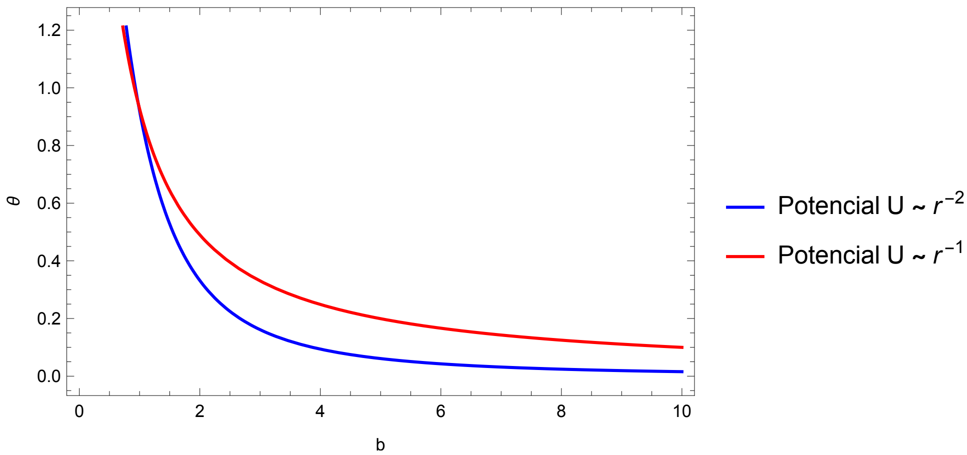
$$\theta = 2\cot^{-1}\left(\frac{2T_0}{U(b)}\right) = 2\cot^{-1}\left(\frac{2bT_0}{C}\right) \approx 2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2bT_0}{C}\right) = \pi\left(1 - b\frac{4T_0}{\pi C}\right) \tag{19}$$

Pri tem smo uprabili Taylorjev razvoj funkcije $\cot^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - x$. Torej bo na majhnih razdaljah tudi tukaj funckija padala linearno z impact parametrom.

- $b \to \infty$ Tukaj obrnemo izraz.

$$\cot\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{2T_0 b}{C}$$
$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \approx \frac{\theta}{2} \approx \frac{C}{2T_0 b}$$
$$\theta = \frac{C}{T_0}\frac{1}{b} \tag{20}$$

Vmes smo uporabili Taylorjev razvoj funkcije tan. Torej bo za Coulombski potencial sipalni kot pri velikih impact parametrih padal s prvo potenco razdalje. Tukaj se pojavi razlika v primerjavi s potencialom $1/r^2$, kjer sipalni kot pada s kvadratom razdalje. To pa pomeni, da se bo prisotnost sipalnega centrapri Coulombskem potencialu čutila na daljših razdaljah kot pa pri potenicalu $1/r^2$



Slika 1: Primerjava odvisnosti sipalnega kota θ od impact parametra b za različno obliko potenciala. V neskončnosti potencial r^{-2} pada veliko hitreje kot potencial r^{-1}. (v obeh potencialih smo vse konstante postavili na 1.)

Iz izpeljanih izrazov lahko določimo sipalni presek pri Coulombskem potencialu. Pri tem bomo predpostavili, da je tarča, na katero streljamo z delci zelo masivna. Takrat se ta ne premika in lahko predpostavimo, da je težišče sistema pri miru. Velja pa tudi, da je $\mu \approx m$, torej reducirano maso lahko nadomestimo z maso projektila. Kadar predpostavka težke tarče ni utemeljena, moramo uporabljati reducirano maso, končni rezultat za sipalni kot pa dobimo v težiščnem sistemu delcev. Za sipalni kot v laboratorjiskem sistemu moramo uporabiti transformacijo kotov. Za kot θ_1 projektila z maso m_1 velja:

$$\tan(\theta_1) = \frac{m_2 \sin(\theta)}{m_1 + m_2 \cos(\theta)}$$

Za kot θ_2 tarče za maso m_2 pa velja

$$\theta_2 = 1/2(\pi - \theta)$$

S θ smo označili kot sipanja v težiščnem sistemu.

Vendar ob predpostavki težke tarče sledi, da je za Coulombski potencial impact parameter od kota sipanja odvisen kot

$$b = \frac{C}{2E\tan(\theta/2)}$$

Po enačbi (1) sedaj izračunamo sipalni presek za centralni Coulombov potencial.

$$\sigma_{dif} = \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{C}{2E\tan(\theta/2)}\frac{C}{2E}\frac{1}{2}\frac{1}{\tan^2(\theta/2)}\frac{1}{\cos^2(\theta/2)}$$

Ker velja relacija $\sin(\theta) = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)$ sledi

$$\sigma_{dif} = \frac{c^2}{16E^2\sin^4(\theta/2)} \tag{21}$$