Zgornja ali labilna lega

1) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ razvoj cosinusa po Taylorju:

$$\cos\varphi \sim \cos(\pi/2) + (-\sin(\pi/2)(\varphi - \pi/2)) = -\varphi + \frac{\pi}{2}$$

Torej: $\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2(-\varphi + \pi/2) = 0$

partikularno rešitev uganemo $\varphi_p = +\pi/2$

za homogeni del pa rešimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda - \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 + 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2}$$

$$\varphi(t) = \pi/2 + \exp(-\beta t)\left[A\,\mathrm{sh}\left(t\sqrt{\beta^2+\omega_0^2}\right) + B\,\mathrm{ch}\left(t\sqrt{\beta^2+\omega_0^2}\right)\right]$$

A in B določata začetne pogoje.

velja omeniti: $\beta \leq \sqrt{\beta^2 + \omega_0^2} \rightarrow \varphi$ s časom narašča preko vseh mej

Spodnja ali stabilna lega

2) $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ razvoj cosinusa po Taylorju:

$$\cos\varphi \sim \cos(-\pi/2) + (-\sin(-\pi/2)(\varphi + \pi/2)) = \varphi + \frac{\pi}{2}$$

Torej: $\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2(\varphi + \pi/2) = 0$

partikularno rešitev uganemo $y_p = -\pi/2$

za homogeni del pa rešimo karakteristično enačbo

$$\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-2\beta \pm \sqrt{4\beta^2 - 4\omega_0^2}}{2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

$$\varphi(t) = -\pi/2 + \exp(-\beta t)\left[A\exp\left(t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right) + B\exp\left(t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)\right]$$

Dobimo enake rešitve kot enačba za dušeno nihanje HO.

a) $\beta = \omega_0$ $\quad \varphi(t) = -\pi/2 + (C + Dt)\,e^{-\beta t}$

b) $\beta > \omega_0$ $\quad \varphi(t) = -\pi/2 + \exp(-\beta t)\left[A\,\mathrm{sh}\left(t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right) + B\,\mathrm{ch}\left(t\sqrt{\beta^2-\omega_0^2}\right)\right]$

c) $\beta < \omega_0$ $\quad \varphi(t) = -\pi/2 + \exp(-\beta t)\left[A\sin\left(t\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\right) + B\cos\left(t\sqrt{\omega_0^2-\beta^2}\right)\right]$

↳ enačba dušenega nihanja kot jo poznamo

$\omega^2 = \omega_0^2 - \beta^2$: $\quad \varphi(t) = -\pi/2 + e(-\beta t)\left[A\sin(\omega t) + B\cos(\omega t)\right]$

Domača naloga

Ana Kozina, 29. 2. 2016

Dve sili: viskozna sila trenja sorazmerna s hitrostjo in sila teže, ki vedno kaže navzdol.

Polarne koordinate

$x = r\cos\varphi$

$y = r\sin\varphi$

Izraz za silo v polarnih koordinatah smo že izpeljali:

$$\vec{F} = m\left[(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\hat{e}_r + \left(\ddot{\varphi} + \frac{2\dot{\varphi}\dot{r}}{r}\right)\hat{e}_\varphi\right]$$

Pri čemer sta

$\hat{e}_r = (\cos\varphi, \sin\varphi)$ $\qquad \hat{e}_\varphi = r(-\sin\varphi, \cos\varphi)$

Viskozna sila trenja je tako oblike $\vec{F}_t = -\eta\dot{\vec{r}}$. Silo teže pa moramo pretvoriti v polarne koordinate. Ker deluje v smeri navzdol jo lahko zapišemo kot $\vec{F}_g = -mg\vec{j}$ in $\vec{j}$ izrazimo s polarnima baznima vektorjema $\hat{e}_r$ in $\hat{e}_\varphi$.

$\hat{e}_r = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j} \quad / \cdot r\sin\varphi$

$\hat{e}_\varphi = -r\sin\varphi\,\vec{i} + r\cos\varphi\,\vec{j} \quad / \cos\varphi$

$$\left.\begin{aligned}\hat{e}_r \cdot r \cdot \sin\varphi &= r\sin\varphi\cos\varphi\,\vec{i} + r\sin^2\varphi\,\vec{j}\\ \hat{e}_\varphi \cdot \cos\varphi &= -r\sin\varphi\cos\varphi\,\vec{i} + r\cos^2\varphi\,\vec{j}\end{aligned}\right) + \quad \hat{e}_r \cdot r \cdot \sin\varphi + \hat{e}_\varphi\cos\varphi = r\vec{j}$$

$$\vec{j} = \left(\sin\varphi, \frac{\cos\varphi}{r}\right)$$

Ker delec kroži po zanki s konstantnim radijem r je $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Tako nas zanima le tangencialna smer gibanja. Sledi: $m\ddot{\varphi} = -\eta\dot{\varphi} - mg\frac{\cos\varphi}{r}$ $\qquad \tau = \frac{m}{\eta}$

$\ddot{\varphi} = -\frac{1}{\tau}\dot{\varphi} - \frac{g}{r}\cos\varphi$ $\qquad$ če upeljemo še $\beta = \frac{\eta}{2m}$ in $\omega_0^2 = g/r$

$$\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\cos\varphi = 0 \rightarrow \text{podobna enačbi za dušeno nihanje}$$

Pridemo do diferencialne enačbe, ki pa je analitično ne znamo rešiti. Zato pogledamo enačbo za male odmike okoli dveh značilnih točk.