KLASIFIKACIJA ORBIT

Orbite (- to je odvisnost $r(\varphi)$ -) izpeljemo iz ohranitve energije in vrtilne količine.

Delamo v polarnih koordinatah r, φ, $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, saj ravninski problem (Tu že upoštevamo, da se smer vrtilne količine ohranja)

celotna energija; upoštevamo, da se ohranja:

$$H = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 + V(r) =$$

upoštevamo ohranjanje velikosti vrtilne količine:

$p_\varphi = m r^2 \dot{\varphi}$ ($\sin\vartheta = 1$, kroženje pri $\frac{\pi}{2}$)

$$= \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V(r) + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} \equiv \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V_{ef}(r)$$

centrifugalni prispevek

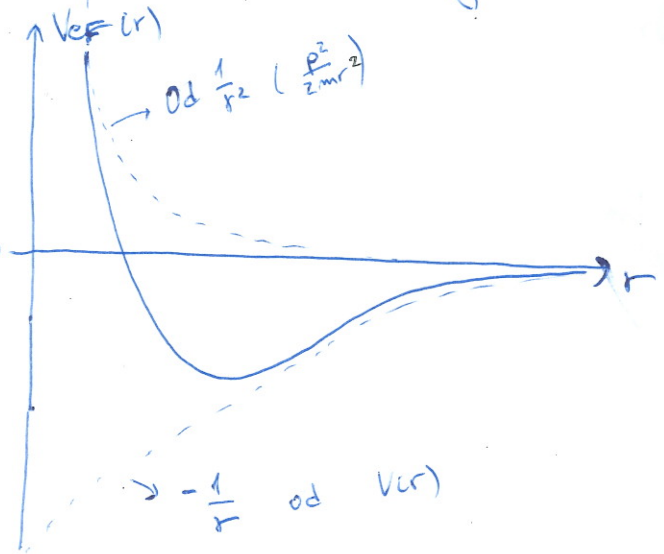
$$\boxed{H = \frac{1}{2} m\dot{r}^2 + V_{ef}(r), \quad V_{ef}(r) = V(r) + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2}}$$

Energijo imamo direktno z r izraženo. efektivna potencialna energija

$r(\varphi)$ - orbita, dobimo iz te enačbe za H, tako da $\frac{d}{dt} \to \dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi}$.

Že iz izraza za $V_{ef}(r)$ lahko uganemo veliko o orbiti:

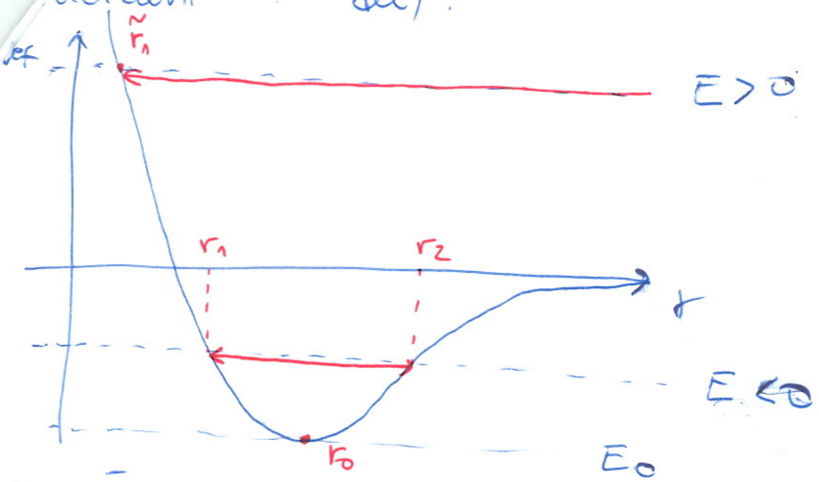
Narišemo $V_{ef}(r)$ graf: za primer Keplerskega potenciala $V(r) = \frac{-\alpha}{r}$; $\alpha > 0$.



Take oblike je $V_{ef}(r)$, če $p_\varphi \neq 0$. Le take primere obravnavamo, če $p_\varphi = 0$ potem $\dot{\varphi} = 0 \Rightarrow$ ravna črta, brez veze.

Ker mora biti $\frac{1}{2} m\dot{r}^2 \geq 0$, dobimo iz izraza za energijo ($H \to E$) $E - V_{ef}(r) \geq 0$, E = konst določena z začetnimi pogoji.

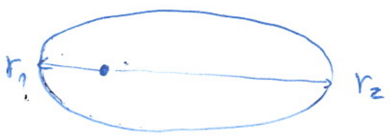
Iz tega pogoja dobimo možne orbite (njihov radialni del):



1. Če $E<0$, potem vezano omejeno gibanje, $r_1<r<r_2$, r_1 in r_2 sta obračališči (tam je $\frac{1}{2}m\dot{r}^2=0$)
2. Če $E>0$, neomejeno gibanje, gibanje le navzdol omejeno z $\tilde r_1$
3. Če $E=E_0<0$: le $r=r_0$ možen $\Rightarrow$ kroženje.

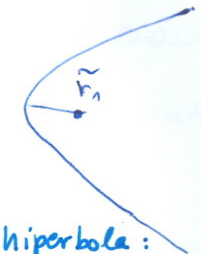
Enačba za $V=-\frac{\alpha}{r}$: $r(\varphi)=\frac{p}{1-\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)}$; $p=\frac{p_\varphi^2}{\alpha m}$; $\varepsilon=\sqrt{1+\frac{2Hp_\varphi^2}{m\alpha^2}}$

1. $E<0$



elipsa; $\varepsilon<1$

2. $E>0$

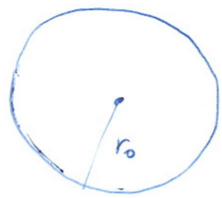


hiperbola: $\varepsilon>1$

3. $E=0$

parabola $\varepsilon=1$

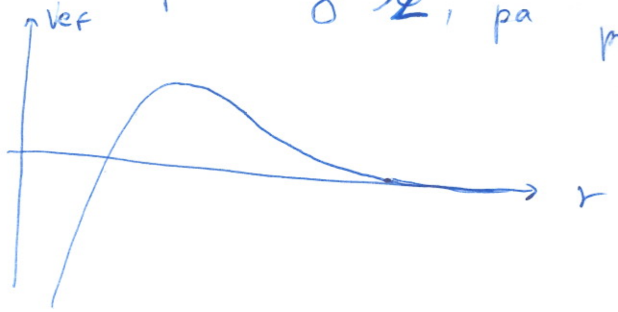
4. $E=E_0$



krožnica $\varepsilon=0$

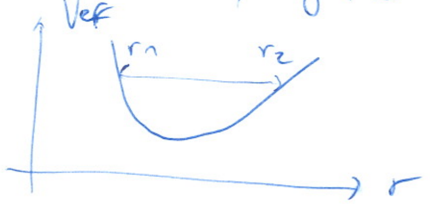
Kvalitativno so take orbite za potenciale $V(r)=-\frac{\alpha}{r^z}$, $\alpha>0$ in $0<z<2$.

Če pa $z>2$, pa pri $r\to0$ prevlada $V(r)$ nad $\frac{p_\varphi^2}{2mr^2}$ in:



Bomo obravnavali za $z=2$

Če $V(r)=\alpha r^z$; $z>0$: privlačni potencial, vse orbite so ujete



Bomo obravnavali