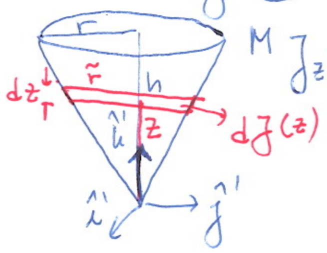
STOŽEC NA NAGNJENI PODLAGI

Na nagnjeno podlago položimo stožec in ga vpnemo v vrhu (okrog njega se lahko prosto vrti). Stožec ima višino h, radij osnovne ploske r in maso M. Zapiši kinetično energijo stožca z Eulerjevimi koti. Stožec se kotali brez zdrsavanja. Izračunaj vztrajnostne momente, zapiši Lagrangeovo funkcijo in izračunaj frekvenco nihanja stožca za majhne odmike iz ravnovesne lege! Podlaga je nagnjena za kot γ.

NAMIGI

- Izračunaj $\underline{\underline{J}}$ v lastnem sistemu: $\underline{\underline{J}} = \begin{pmatrix} J & & \\ & J & \\ & & J' \end{pmatrix}$: $J_x = J_y = J$ osna simetrija



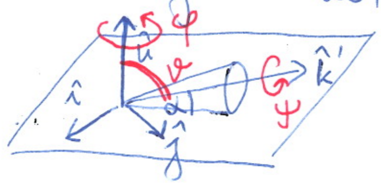
$$J_z = J' = \int dJ'(z) = \ldots = \frac{3}{10} M r^2$$

vztrajnostni moment diska pri z $= \frac{1}{2} dm \tilde{r}^2 = \frac{1}{2} \rho \pi \left(\frac{r}{h}\right)^4 z^4 dz$

$$\rho = \frac{M}{V}$$

$$2J = J_x + J_y = \int \rho dV (y^2 + z^2 + x^2 + z^2) = J' + 2\int \rho dV z^2 = \ldots = 2\left(\frac{3}{20} M r^2 + \frac{3}{5} M h^2\right)$$

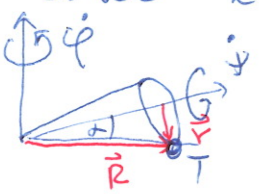
- Eulerjevi koti, vezi:



1. vez: lastna os stožca je z α nagnjena glede na podlago: $\underline{\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha}$

$\dot{\vartheta} = 0$

2. vez: kotaljenje: hitrost na stiku s površino je 0:



v T je $\vec{v} = 0 = \vec{\dot{\varphi}} \times \vec{R} + \vec{\dot{\psi}} \times \vec{r}$

$$0 = \dot{\psi} r + \dot{\varphi}\sqrt{r^2 + h^2} \Rightarrow \underline{\underline{\dot{\psi} = -\frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r}\dot{\varphi}}}$$

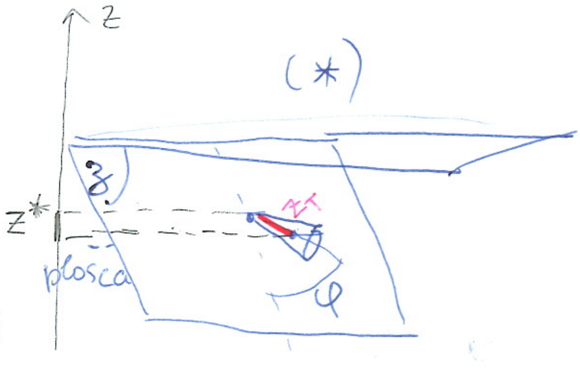
- $T = \frac{1}{2} J (\dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta + \dot{\vartheta}^2) + \frac{1}{2} J' (\dot{\varphi}\cos\vartheta + \dot{\psi})^2 \underset{\text{vezi}}{=} \ldots = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 J_{ef}$

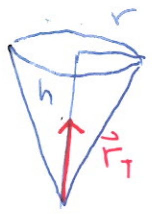
$$J_{ef} = \frac{h^2}{r^2 + h^2} M \left(\frac{3}{20} r^2 + \frac{9}{10} h^2\right)$$

- Potencialna energija:

$$V = mgz^*$$

- Izračun z_T - oddaljenost težišča na osi stožca od vrha



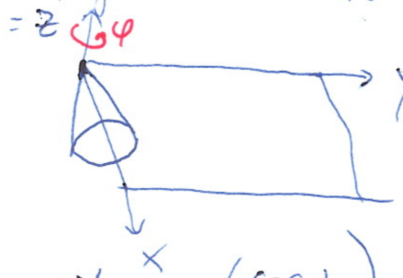


$\vec{r}_T$: $x_T = y_T = 0$ simetrija

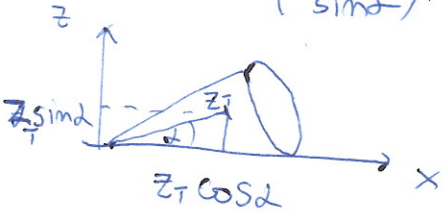
$$z_T = \frac{\int dm\, z}{\int dm} = \frac{3}{4} h$$

- z^* dobimo iz naslednjih rotacij ~~vrtal~~ stožca:

① Stožec na ravni pogladi v smeri x: $\longrightarrow$ ② zasuk za kot φ okrog z-osi



$$\vec{r}_T' = z_T \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$



$$\vec{r}_T' \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ +\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}_T' = \vec{r}_T''$$

③. zasuk za kot ϑ okrog y-osi, dobimo sliko $(*)$

$$\vec{r}_T'' \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\vartheta & 0 & \sin\vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\vartheta & 0 & \cos\vartheta \end{pmatrix} \vec{r}_T'' = \vec{r}^*$$

Izračun da $z^* = \frac{3}{4}h \cdot (\cos\vartheta \sin\alpha - \sin\vartheta \cos\alpha \cdot \cos\varphi)$

- $L = T - V$
- E - L enačbe:

$$J_{ef}\ddot{\varphi} + \frac{3}{4}h \sin\vartheta \cos\alpha \underbrace{\sin\varphi}_{\simeq\varphi \text{ za } \varphi \ll \pi} = 0$$

$\Rightarrow$ Harmonsko nihanje z $\omega^2 = \dfrac{\frac{3}{4}h \sin\vartheta \cos\alpha}{J_{ef}}$