ORBITE V SFERIČNEM HARMONSKEM POTENCIALU

Poišči vse možne orbite delca v potencialu $V = \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2$, kjer je m masa delca, r pa oddaljenost od izhodišča. Najprej poišči tipe orbit iz efektivnega potenciala.

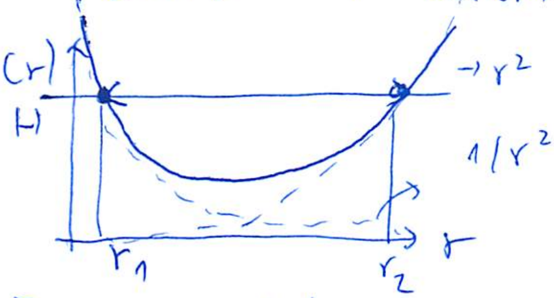
NAMIGI:

- Polarne koordinate, $L = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2) - \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2$

  φ ciklična $\Rightarrow$ $p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \dot{\varphi} = \text{konst}$

- Celotna energija, ki konstanta gibanja:

  ① $H = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_{ef}(r)$; $V_{ef}(r) = \frac{p_\varphi^2}{2 m r^2} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 r^2$

- 

  Vse orbite so omejene na $r \in [r_1, r_2]$.

- Izračun orbit: Uporabi enačbo za energijo H, ker nas zanima $r(\varphi)$ naredi $\frac{d}{dt} \to \frac{d}{d\varphi} \dot{\varphi}$;

  $\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \frac{dr}{d\varphi} = r' \dot{\varphi}$. - Uvedi novo spremenljivko $u = 1/r^2$.

  ① : $u'^2 = -4\left(u - \frac{Hm}{p_\varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{2Hm}{p_\varphi^2}\right)^2 - \left(\frac{2m\omega_0}{p_\varphi}\right)^2$

- Uvedi: $x = u - \frac{Hm}{p_\varphi^2}$, dobimo:

  ② $x'^2 + 4x^2 = \frac{4m^2}{p_\varphi^2}\left(\frac{H^2}{p_\varphi^2} - \omega_0^2\right)$

- Enačbo ② reši z nastavkom: $x(\varphi) = A\cos(2\varphi + \delta)$
- Končni rezultat je:

  ③ $r^2 = \frac{p_\varphi^2}{Hm} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \frac{p_\varphi^2 \omega_0^2}{H^2}} \cos(2\varphi + \delta)} \left(= \frac{a}{b\cos(2\varphi) + 1}\right)$

- Pokaži, da to elipsa s centrom v izhodišču!

  $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}$, vstavi v ③,

  s premetavanjem enačbe dobiš:

  $1 = \frac{x^2}{\frac{a}{b+1}} + \frac{y^2}{\frac{a}{-b+1}}$ → enačba elipse.