ORBITE V SFERIČNEM HARMONSKEM POTENCIALU

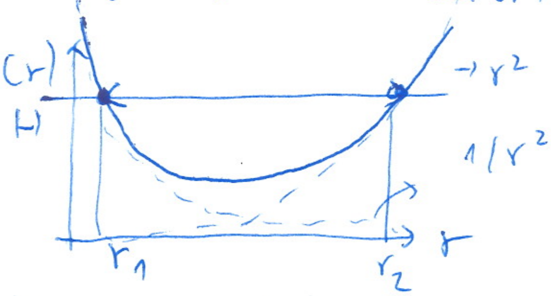
Poišči vse možne orbite delca v potencialu $V=\frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2$, kjer je m masa delca, r pa oddaljenost od izhodišča. Najprej poišči tipe orbit iz efektivnega potenciala!

NAMIGI:

- Polarne koordinate, $L = \frac{1}{2}m(\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2) - \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2$

  φ ciklična $\Rightarrow p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot\varphi} = mr^2\dot\varphi = \text{konst}$
- Celotna energija, ki konstanta gibanja:

  (1) $H = \frac{1}{2}m\dot r^2 + V_{ef}(r)$; $V_{ef}(r) = \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + \frac{1}{2}m\omega_0^2 r^2$
- $V_{ef}(r)$



Vse orbite so omejene na $r \in [r_1, r_2]$.

- Izračun orbit: Uporabi enačbo za energijo H, ker nas zanima $r(\varphi)$ naredi $\frac{d}{dt} \to \frac{d}{d\varphi}\dot\varphi$;

  $\dot r = \frac{dr}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{dr}{d\varphi} = r'\dot\varphi$. - Uvedi novo spremenljivko $u = 1/r^2$.

  (1): $u'^2 = -4\left(u - \frac{Hm}{p_\varphi^2}\right)^2 + \left(\frac{2Hm}{p_\varphi^2}\right)^2 - \left(\frac{2m\omega_0}{p_\varphi}\right)^2$

- Uvedi: $x = u - \frac{Hm}{p_\varphi^2}$, dobimo:

  (2) $x'^2 + 4x^2 = \frac{4m^2}{p_\varphi^2}\left(\frac{H^2}{p_\varphi^2} - \omega_0^2\right)$
- Enačbo (2) reši z nastavkom: $x(\varphi) = A\cos(2\varphi + \delta)$
- Končni rezultat je:

$$(3)\quad r^2 = \frac{p_\varphi^2}{Hm}\,\frac{1}{1+\sqrt{1-\frac{p_\varphi^2\omega_0^2}{H^2}}\cos(2\varphi+\delta)} \quad \left(= \frac{a}{b\cos(2\varphi)+1}\right)$$

- Pokaži, da to elipsa s centrom v izhodišču!

  $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2}$, vstavi v (3),

  s premetavanjem enačbe dobiš:

$$1 = \frac{x^2}{\frac{a}{b+1}} + \frac{y^2}{\frac{a}{-b+1}}$$

→ enačba elipse.