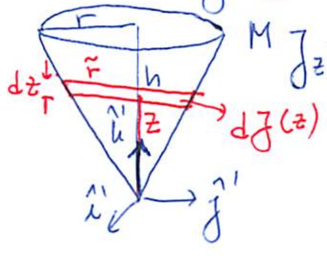
STOŽEC NA NAGNJENI PODLAGI

Na nagnjeno podlago položimo stožec in ga vpnemo v vrhu (okrog njega se lahko prosto vrti). Stožec ima višino h, radij osnovne ploske r in maso M. Zapiši kinetično energijo stožca z Eulerjevimi koti. Stožec se kotali brez zdrsavanja. Izračunaj vztrajnostne momente, zapiši Lagrangeovo funkcijo in izračunaj frekvenco nihanja stožca za majhne odmike iz ravnovesne lege!

NAMIGI Podlaga je nagnjena za kot γ.

- Izračunaj $\underline{J}$ v lastnem sistemu: $\underline{J} = \begin{pmatrix} J & & \\ & J & \\ & & J' \end{pmatrix}$; $J_x = J_y = J$ osna simetrija



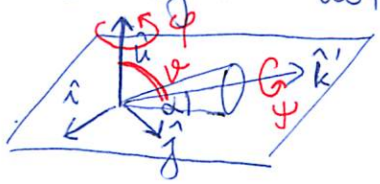
$$J_z = J' = \int dJ'(z) = \ldots = \frac{3}{10} M r^2$$

vztrajnostni moment diska pri $z = \frac{1}{2} dm\, \tilde r^2 = \frac{1}{2}\rho\pi\left(\frac{r}{h}\right)^4 z^4\, dz$

$\rho = \frac{M}{V}$

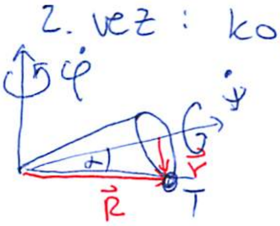
$$2J = J_x + J_y = \int \rho\, dV (y^2 + z^2 + x^2 + z^2) = J' + 2\int \rho\, dV z^2 = \ldots = 2\left(\frac{3}{20} M r^2 + \frac{3}{5} M h^2\right)$$

- Eulerjevi koti, vezi:



1. vez: lastna os stožca je z α nagnjena glede na podlago: $\underline{\vartheta = \frac{\pi}{2} - \alpha}$, $\dot\vartheta = 0$

2. vez: kotaljenje: hitrost na stiku s površino je 0:



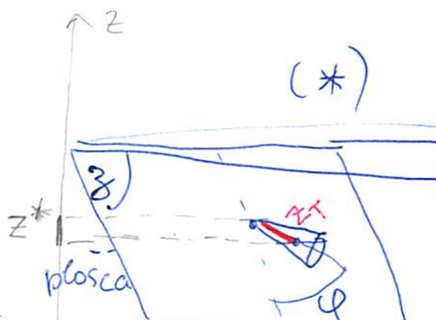
v T je $\vec v = 0 = \dot{\vec\varphi} \times \vec R + \dot{\vec\psi} \times \vec r$

$$0 = \dot\psi r + \dot\varphi \sqrt{r^2 + h^2} \Rightarrow \underline{\dot\psi = -\frac{\sqrt{r^2+h^2}}{r}\dot\varphi}$$

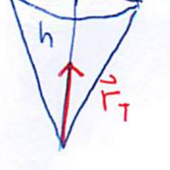
- $T = \frac{1}{2} J (\dot\varphi^2 \sin^2\vartheta + \dot\vartheta^2) + \frac{1}{2} J' (\dot\varphi\cos\vartheta + \dot\psi)^2 \underset{\text{vezi}}{=} \ldots = \frac{1}{2}\dot\varphi^2 J_{ef}$

$$J_{ef} = \frac{h^2}{r^2 + h^2} M \left(\frac{3}{20} r^2 + \frac{9}{10} h^2\right)$$

- Potencialna energija:
$V = mgz^*$



- Izračun z_T - oddaljenosti težišča na osi stožca od vrha

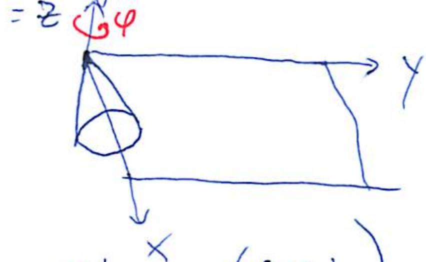


$\vec r_T$: $x_T = y_T = 0$ simetrija

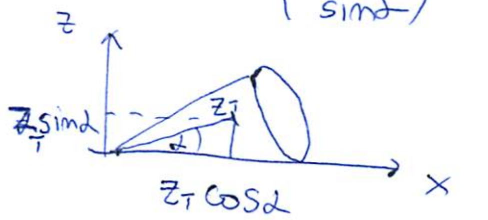
$$z_T = \frac{\int dm\, z}{\int dm} = \frac{3}{4} h$$

- z^* dobimo iz naslednjih rotacij ~~vrtca~~ stožca:

① Stožec na ravni podlagi v smeri x: ⟶ ② zasuk za kot φ okrog z osi



$$\vec{r}_T' = z_T \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ 0 \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$



$$\vec{r}_T' \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ +\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{r}_T' = \vec{r}_T''$$

③. zasuk za kot ζ okrog y-osi, dobimo skico (*)

$$\vec{r}_T'' \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\zeta & 0 & \sin\zeta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\zeta & 0 & \cos\zeta \end{pmatrix} \vec{r}_T'' = \vec{r}^*$$

Izračun da $z^* = \frac{3}{4}h \cdot (\cos\zeta \sin\alpha - \sin\zeta \cos\alpha \cdot \cos\varphi)$

- $L = T - V$
- E - L enačbe:

$$J_{ef}\ddot{\varphi} + \frac{3}{4}h \sin\zeta \cos\alpha \underbrace{\sin\varphi}_{\approx\varphi \text{ za } \varphi \ll \pi} = 0$$

$\Rightarrow$ Harmonsko nihanje z $\omega^2 = \dfrac{\frac{3}{4}h \sin\zeta \cos\alpha}{J_{ef}}$