Vrtavka v težnostnem polju

Definicije. $L = J_1/2(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + J_3/2(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - mgl\cos\theta$. $p_\psi := J_1 a = J_3(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) = J_3\omega_3$. $p_\phi = J_1 b = J_1\dot{\phi}\sin^2\theta + J_3\cos\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$. $\dot{\phi} = (b - acos\theta)/\sin^2\theta = (b - au)/(1-u^2)$. $u = \cos\theta$. $\dot{\psi} = p_\psi/J_3 - \dot{\phi}\cos\theta$. $\dot{u}^2 = f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (b-au)^2$. $\alpha = 2(E - J_3\omega_3^2/2)/J_1$. $\beta = 2mgl/J_1$.

1. Izpelji pogoje pri katerih lahko pride do enakomerne precesije (torej, zvezo med ω_3 in $\cos(\theta)$). Pokaži, da dobiš dve neodvisni rešitvi. Fizikalno ju interpretiraj v primeru hitre vrtavke (ω_3 velik).
   Rezultat: Iz rešljivosti kvadratne enačbe dobimo pogoj $(J_3\omega_3)^2 > 4J_1 mgl\cos(\theta)$. Za hitro vrtavko je ena rešitev $\dot{\phi} = J_3\omega_3/J_1\cos(\theta)$, ki ustreza prosti precesiji (mgl zanemarljiv), druga rešitev je $\dot{\phi} = mgl/J_3\omega_3$, kar lahko pojasnimo z enačbo $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$, če vzamemo $\mathbf{L} \approx J_3\omega_3\hat{k}'$, kar velja kadar je $\dot{\phi} \ll \dot{\psi}$.
   Postopek: u_0 mora biti dvojna ničla $f(u)$, torej $f(u_0) = 0$ in $f'(u_0) = 0$. Dobljeni enači poenostavi z uporabo $\dot{\phi} = (b-au)/\sin^2\theta$ in ju združ v enačbo oblike $\beta/2 = a\dot{\phi} - u_0\dot{\phi}^2$. Kvadratna enačba ima rešitev samo za dovolj veliko ω_3.Splošna rešitev kvadratne enačbe je $\dot{\phi} = (J_3\omega_3/J_1 \pm \sqrt{J_3\omega_3^2/J_1^2 - 4\cos\theta mgl/J_1})/2\cos\theta$. Za dovolj velike ω_3 razviješ in interpretiraš rešitev s hitro precesijo, kjer navor sile teže igra zanemarljivo vlogo in počasno precesijo, kjer je vrtilna količina v dobrem približu podana z vrtenjem vrtavke okrog njene simetrijske osi.

2. Izpelji pogoj za spečo vrtavko, torej vrtavko, ki se stabilno vrti pri $\theta = 0$.
   Rezultat: $J_3\omega_3^2/2 > 2(J_1/J_3)mgl$.
   Postopek: f(u) mora imeti dvojno ničlo pri $u = 1$, da je rešitev stabilna pa mora biti tretja ničla pri $u > 1$. Izpelješ $a = b$, $\alpha = \beta$ in iz pogoja za tretjo ničlo dobiš rezultat.

3. Obravnavaj gibanje spuščene vrtavke. Vrtavko, ki se s kotno frekvenco ω_3 vrti okrog simetrijske osi, sicer pa miruje ($\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$) ob $t = 0$ spustimo z višine podane s kotom $\theta = \theta_0$ in jo prepustimo, da se prosto giblje. Privzemi, da je vrtavka hitra, ($J_3^2\omega_3^2/J_1 \gg mgl$) in izpelji gibanje vrtavke!
   Rezultat: $\cos(\theta) = \cos\theta_0 + x_1/2(1-\cos(at))$, kjer je $x_1 = \sin^2\theta_0\beta/a^2$. $\dot{\phi} = \beta/2a(1 - \cos(at))$
   Postopek: Iz začetnih pogojev $\dot{\theta} = 0, \dot{\phi} = 0$ izpelješ $b - au_0 = 0$ in $\alpha - \beta u_0 = 0$. Zapišeš torej lahko $f(u) = (u_0 - u)[\beta(1-u^2) - a^2(u_0 - u)]$. Ena ničla $f(u)$ je u_0,

drugi dve rešitvi u_1 poiščeš z rešitvijo kvadratne enačbe v []. Če definiraš $x = u_0 - u$ in $x_1 = u_0 - u_1$, lahko prepišeš kvadratno enačbo v obliko $x_1^2 + px_1 - q = 0$, kjer je $p = a^2/\beta - 2u_0$, $q = 1 - u_0^2 = \sin^2\theta_0$. Potem privzemi, da je vrtavka hitra, kar ustreza $p \gg q$. Fizikalna rešitev kvadratne enačbe, ki ustreza $-1 < u < 1$, da $x_1 \approx q/p = \sin^2\theta_0\beta/a^2 = \sin^2\theta_0 2mglJ_1/(J_3^2\omega_3^2$. Za izpeljavo gibanja prepišeš $f(u)$ v obliko $f(u) = a^2x(x_1 - x)$. Definiraš $y = x - x_1/2$, izpelješ $\dot{y}^2 + a^2y^2 = a^2x_1^2/4$. To enačbo reši $y = -x_1/2\cos(at)$, torej $x = x_1/2(1 - \cos(at)$ (druge rešitve ne ustrezajo začetnim pogojem). $\cos\theta$ torej oscilira kot funkcija časa kot izpeljano zgoraj. Izpelješ še $\dot{\phi} = a(u_0 - u)/\sin^2\theta \approx a(x_1/2)(1 - \cos(at))/\sin^2\theta_0$.