

PROSTA SIMETRIČNA VRTAVKA - Z EULERJEVIMI KOTI

Pri Eulerjevih enačbah smo izračunali, kakšna je časovna odvisnost kotnih hitrosti v lastnem sistemu vrtačke vztrajnostnega momenta vrtačke $\mathbb{J} = (\mathbb{J} \ \mathbb{J} \ \mathbb{J}')$: $\omega_z = \mathbb{J}' \omega_z'$

$\omega_x'(t) = |\xi_0| \cos(\Omega_p t + \sigma)$; $\omega_y'(t) = |\xi_0| \sin(\Omega_p t + \sigma)$; $\omega_z'(t) = \omega_z'$
 Poišči, kako se gibe glede na minijoci zunanji sistem preko Eulerjevih kotov po Lagrangeovem formalizmu.

NAMIGI:

- $\omega_x' = \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi + \dot{\vartheta} \cos\psi$; $\omega_y' = \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi - \dot{\vartheta} \sin\psi$; $\omega_z' = \dot{\varphi} \cos\vartheta + \dot{\psi}$
- $L = T = \frac{1}{2} (\mathbb{J} \omega_x'^2 + \mathbb{J} \omega_y'^2 + \mathbb{J}' \omega_z'^2)$ - izrazi z φ, ψ, ϑ .
- Poišči ohranjene količine:

$$P_\varphi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \text{konst} \equiv (\text{oznaka } z) \mathbb{J} a$$

$$P_\psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\psi}} = \text{konst} \equiv \mathbb{J} b$$

- Izrazi celotno energijo sistema H z ohranjenimi količinami

$$H = \frac{1}{2} \mathbb{J} \left(\dot{\vartheta}^2 + \left(\frac{a - b \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \frac{\mathbb{J}'^2}{\mathbb{J}'} b^2$$

$$\dot{\varphi} = \frac{a - b \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}; \quad \dot{\psi} = \mathbb{J}' / \mathbb{J}' b - \dot{\varphi} \cos\vartheta$$

- Upoštevaj rezultat od zadnjic, daje $\dot{\vartheta} = \text{konst} \Rightarrow \dot{\vartheta} = 0 \Rightarrow \dot{\varphi} = \text{konst}, \dot{\psi} = \text{konst}$
- Izračunaj kot ϑ iz enačbe za H .
- Izračunaj hitrost precesije $\dot{\varphi}$ in hitrost sukenja $\dot{\psi}$:

① $\omega_x' = |\xi_0| \cos(\Omega_p t + \sigma) = \dot{\varphi} \sin\vartheta \sin\psi$

② $\omega_y' = |\xi_0| \sin(\Omega_p t + \sigma) = \dot{\varphi} \sin\vartheta \cos\psi$

①² + ②²: $|\xi_0|^2 = \dot{\varphi}^2 \sin^2\vartheta$, to vstaviš v ① in dobiš:

$$|\xi_0| \cos(\Omega_p t + \sigma) = |\xi_0| \cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi\right) \Rightarrow \Omega_p = -\dot{\psi}$$

Vstavi to v enačbo za $\dot{\psi}$ in dobiš: $\dot{\varphi} = \omega_z' \mathbb{J}' \frac{1}{\cos\vartheta}$

Po izračunu $\cos\vartheta$ iz enačbe za H lahko rezultat vstaviš v izraz za $\dot{\varphi} = \frac{a - b \cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}$, vendar in nato izračunaš se - deljši izračuni!