O ustrezni izbiri generaliziranih koordinat

Jernej Mravlje

April 6, 2015

Denimo, da je gibanje točkastega telesa v homogenem gravitacijskem polju (sila teže kaže v navpični smeri navzdol), omejeno na vodilo prikazano s polno črto na skici. Gibanje bi lahko poizkusili parametrizirati v cilindričnem koordinatnem sistemu, kjer bi bil položaj točke podan s kotom med vektorjem, ki kaže do telesa in navpičnico, ϕ, kot kaže slika, in lokalnima baznima vektorjema $\widehat{\mathbf{e}}_r$, $\widehat{\mathbf{e}}_\phi$, $\mathbf{r}(t) = r(t)\widehat{\mathbf{e}_r}$, in bi bil $r = r(\phi)$ in zato $r(t) = r(\phi(t))$. Lagrangeva funkcija bi bila

$$L = \frac{m}{2}\left[\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2\right] + mgr\cos(\phi) \tag{1}$$

Enačbe gibanja bi bile, iz

$$\frac{d}{dt}\left[\partial L/\partial \dot{q}_\alpha\right] - \partial L/\partial \alpha = Q_\alpha, \tag{2}$$

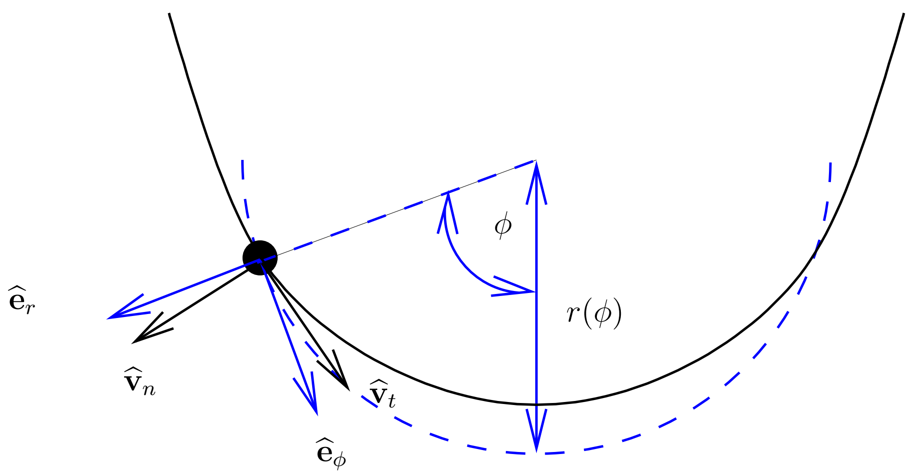
kjer je $Q_\alpha = \mathbf{F}\cdot\partial\mathbf{r}/\partial\alpha$ generalizirana sila, ki vključuje vse prispevke zunanjih sil (v tem primeru sila vodila), ki niso vključene v potencial $V(\phi)$, potem ko izberemo za koordinati ϕ in r.

$$m\frac{d}{dt}\left[r^2\dot{\phi}\right] + mgr\sin\phi = Q_\phi \tag{3}$$

in

$$m\frac{d}{dt}\left[\dot{r}\phi^2\right] - mg\cos\phi = Q_r. \tag{4}$$

Upoštevali bi lahko, da bo v vsakem trenutku telo na vodilu, $r = r(\phi) = f(\phi)$ ($f(\phi)$ vpeljemo zato, da ne mešamo z dinamično spremenljivko r) zato bi se členi z odvodom r po času prepisali v $\dot{r} = f'\dot{\phi}$. Glavni problem izbire koordinat pa je, da sta tako Q_r kot Q_ϕ od 0 različna...



Denimo, da krivuljo zapišemo v naravni parametrični obliki $\mathbf{r}(s)$, kjer je s parameter, ki meri dolžino poti po krivulji od neke izbrane točke. V vsaki točki na krivulji velja, da je tangentni vektor

$$\mathbf{v}_t(s) = \mathbf{r}(s + ds) - \mathbf{r}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \tag{5}$$

Tangentni vektor določa tudi normalno ravnino vektorjev, ki so pravokotni nanj. Če je gibanje v dveh dimenzijah, je pravokotna 'ravnina' enostavno premica s katero je potem tudi vzporedna sila vodila, če trenje zanemarimo.

Ustrezna izbira generaliziranih koordinat za Lagrangevo funkcijo je kar s. Lagrangeva funkcija se z s in $\dot{s}$ zapiše enostavno

$$L = \frac{m}{2}\dot{s}^2 - mgy(s), \tag{6}$$

ki vodi do gibalne enače

$$m\ddot{s} + mgy'(s) = Q_s. \tag{7}$$

V tem primeru je $Q_s = \mathbf{F} \cdot \partial\mathbf{r}/\partial s = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_t = 0$ saj $\mathbf{F}$ leži v normalni ravnini $\mathbf{v}_t$.

Imamo torej enačbo

$$m\ddot{s} + mgy'(s) = 0. \tag{8}$$

Če vzamemo $y'(s) = dy/ds = ks$, kjer je k konstantna, je to ravno enačba za harmonsko nihanje. Rečeno drugače, denimo, da izberemo, da merimo s od najnižje lege na vodilu, ki je stabilna lega. Potem je, če telo odmaknemo od ravnovesne lege, pogoj za harmonsko nihanje, da je potencial sorazmeren s kvadratom odmika (=prepotovane poti od ravnovesne lege), se pravi $V(s) = ks^2/2$.