# Foucaultovo nihalo

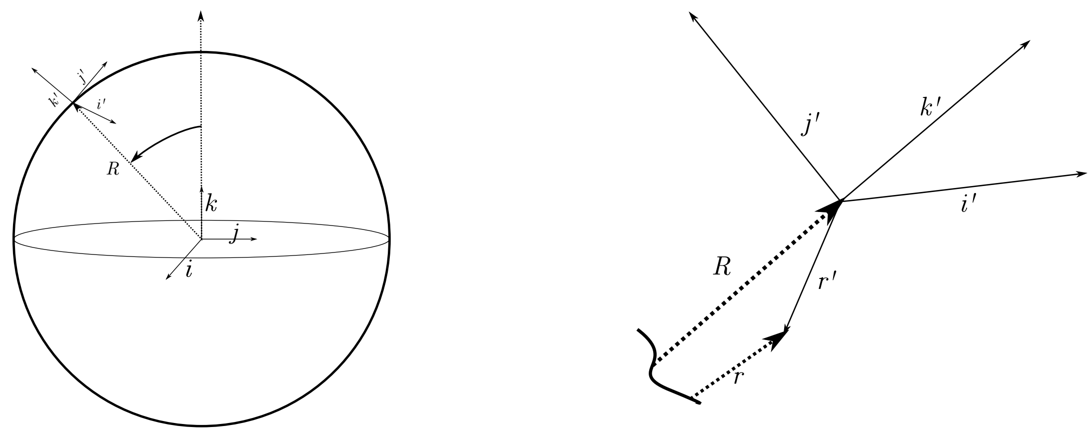
Alen Horvat in Bor Kavčič

13. marec 2012

Ta naloga obravnava gibanje matematičnega nihala na površini vrteče se krogle. V dotičnem primeru obravnavamo nihalo na Zemeljskem površju, kot je denimo Foucaultovo nihalo v Parizu na sliki 1.


Slika 1: Nihalo v pariškem Panthéonu

Problem bomo rešili v sklopu Newtonove vektorske mehanike s poudarkom na prehajanju med pospešenimi in nepospešenimi koordinatnimi sistemi. Vsak izmed nas lahko definira sebi lasten sistem v katerem miruje. Kot prebivalci površine Zemlje se z njo gibljemo in sicer po krožnem tiru. Od tod takoj sledi, da je naše gibanje pospešeno; veličina hitrosti ostaja sicer (bolj ali manj) nespremenjena, se pa hitrosti prirejenemu vektorju spreminja smer.




(a) Shema odnosov med obema sistemoma

(b) K razumevanju seštevka vektorjev

Slika 2: K boljši predstavi problema

Ob skici 2b lahko hitro zapišemo vektor položaja mase $m$ v nepospešenem (nevrtečem) sistemu z $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ kot bazo in sicer kot:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{R} + \boldsymbol{r'} \tag{1}$$

Newtonov zakon v njegovi čisti obliki smemo zapisati zgolj v nepospešenem sistemu-zanima nas torej drugi časovni odvod vektorja $\boldsymbol{r}$. Na tem mestu se bomo sklicali na rezultat, ki se nahaja v [1]. Računajmo!

$$\dot{\boldsymbol{r}} = \dot{\boldsymbol{R}} + \dot{\boldsymbol{r}}'$$

Vemo, da lahko $\dot{\boldsymbol{r}}'$ zapišemo v vrtečem se sistemu kot:

$$\dot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{v}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}' \tag{2}$$

Malce predrzno lahko zapišemo operator časovnega odvoda kot $\frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}|_{rel} + \boldsymbol{\Omega}\times$. Z $\boldsymbol{\Omega}$ smo označili vektor kotne hitrosti, z $\boldsymbol{v}_{rel}$ pa vektor hitrosti v koordinatnem sistemu na površju i.e. $\boldsymbol{v}_{rel} = \dot{x}\boldsymbol{i}' + \dot{y}\boldsymbol{j}' + \dot{z}\boldsymbol{k}'$. Z relativno eleganco lahko odtod izluščimo tudi drugi odvod, upoštevaje naslednje enakosti: za $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^3$ velja $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = 0$ ter $\frac{d(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})}{dt} = \dot{\boldsymbol{a}} \times \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \times \dot{\boldsymbol{b}}$. V nadaljevanju po analogiji z $\boldsymbol{v}_{rel}$ označimo pospešek v pospešenem sistemu kot $\boldsymbol{a}_{rel} = \ddot{x}\boldsymbol{i}' + \ddot{y}\boldsymbol{j}' + \ddot{z}\boldsymbol{k}'$. Izračunajmo:

$$\frac{d\dot{\boldsymbol{r}}'}{dt} = \boldsymbol{a}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_{rel} + \underbrace{\dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \boldsymbol{r}'}_{0} + \boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{r}}'$$

V dobljenem izrazu se pojavi $\dot{\boldsymbol{r}}'$ kar zamenjamo z enačbo (2):

$$\frac{d\dot{\boldsymbol{r}}'}{dt} = \boldsymbol{a}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{v}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}')$$

Kar preuredimo v snažnejšo obilko:

$$\ddot{\boldsymbol{r}}' = \boldsymbol{a}_{rel} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}') \tag{3}$$

Izraz je univerzalen-z njim zapišemo tudi časovni odvod vektorja $\boldsymbol{R}$ v vrtečem se sistemu:

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \underbrace{\boldsymbol{a}_{rel}^R}_{0} + \underbrace{2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_{rel}^R}_{0} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R})$$

$$\ddot{\boldsymbol{R}} = \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}) \tag{4}$$

Oboroženi z enačbama (3) ter (4) lahko končno zapišemo Newtonov zakon.

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{a}_{rel} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_{rel} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}') + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}) = -g\boldsymbol{k} - \frac{F_0}{m}\frac{\boldsymbol{r}'}{l} \tag{5}$$

Že začetkoma razmislimo o velikostnih redovih v enačbi nastopajočih členov. Kotna hitrost $\Omega$ vrtenja Zemlje je enostavno izračunljiva kot $\Omega = 2\pi/(24 \cdot 3600s) \approx 7,3 \cdot 10^{-5}$. Velikost vektorja $\boldsymbol{r}'$ je ocenljiva na nekaj metrov, kar je v primeri z radijem Zemlje $R \approx 6400$ km zanemarljivo. Od členov podobne oblike odpade torej člen $\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{r}')$. Ker nas zanima nihanje, poiščimo ravnovesno lego $\boldsymbol{r}'_0$ okrog katere bomo razvili majhna nihanja. Za ravnovesno lego sledi iz definicije, da sta tako relativna hitrost kot pospešek ničelna.

$$\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}) = -g\boldsymbol{k} - \frac{F_0}{m}\frac{\boldsymbol{r}'_0}{l} \Rightarrow \boldsymbol{r}'_0 = -\frac{ml}{F_0}\left\{\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R}) + g\boldsymbol{k}\right\}$$

Za razvoj definiramo vektor $\boldsymbol{\xi}$, ki vstopa v enačbe kot $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}_0 + \boldsymbol{\xi}$ in zanj velja $|\boldsymbol{\xi}| \ll l$. Če vstavimo tako definiran vektor v gibalno enačbo (5) ter previdno računamo ostanemo z izrazom:

$$\boldsymbol{a}_{rel} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{v}_{rel} = -\frac{F_0}{m}\frac{\boldsymbol{\xi}}{l}$$

Ker je $\boldsymbol{r}_0$ v gibajočem se sistemu konstanten, količini s spodnjim indeksom *rel* pripadajo le "relativnim" odvodom vektorja $\boldsymbol{\xi}$. Upoštevamo še dejstvo, da je $F_0 \approx mg$, kar nam preosnuje enačbo v naslednjo obliko:

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}}_{rel} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \dot{\boldsymbol{\xi}}_{rel} + \underbrace{\frac{g}{l}}_{\omega_0^2}\boldsymbol{\xi} = 0$$

Vektor $\boldsymbol{\xi}$ zapišimo po komponentah kot $\boldsymbol{\xi} = (u, v, 0)$ saj je gibanje ravninsko. Izračunajmo vektorski produkt, ki se pojavlja v izrazu:

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{i}' & \boldsymbol{j}' & \boldsymbol{k}' \\ 0 & \Omega\cos\alpha & \Omega\sin\alpha \\ \dot{u} & \dot{v} & 0 \end{vmatrix} = -\dot{v}\Omega\sin\alpha\boldsymbol{i}' + \dot{u}\Omega\sin\alpha\boldsymbol{j}' + \boldsymbol{k}'(\dots)$$

Tako dobimo set dveh sklopljenih diferencialnih enačb:

$$\ddot{u} - 2\Omega\sin\alpha\dot{v} + \omega_0^2 u = 0 \tag{6a}$$

$$\ddot{v} + 2\Omega\sin\alpha\dot{u} + \omega_0^2 v = 0 \tag{6b}$$

Nihajni problemi so lažje rešljivi v kompleksnem. Definirajmo količino $\gamma = u + iv = \gamma_0 e^{i\omega t}$. Oglejmo si še odvod $\gamma$:

$$\dot{\gamma} = \dot{u} + i\dot{v} \Rightarrow \ddot{\gamma} = \ddot{u} + i\ddot{v}$$

Pripravno je enačbo (6b) pomnožiti s kompleksno enoto ter jo prišteti k (6a). Če uredimo člene ter spretno izpostavimo $i$, se dokopljemo do naslednjega izraza:

$$(\ddot{u} + i\ddot{v}) + 2\Omega\sin\alpha \cdot i(\dot{u} + i\dot{v}) + \omega_0^2(u + iv) = 0 \Rightarrow \ddot{\gamma} + 2\Omega\sin\alpha \cdot i\dot{\gamma} + \omega_0^2\gamma = 0$$

V dobljeno enačbo vstavimo s pomočjo kompaktnejše Eulerjeve izražave zapisan $\gamma = \gamma_0 e^{i\omega t}$, kar zoži problem na reševanje *sekularne enačbe*:

$$-\omega^2 - 2\Omega\sin\alpha\omega + \omega_0^2 = 0$$

Splošna rešitev kvadratnih enačbe tega tipa je podana z znanim obrazcem:

$$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Za naš primer pridelamo enačbo:

$$\omega_{1,2} = \frac{-2\sin\alpha\Omega \pm \overbrace{\sqrt{4\sin^2\alpha\Omega^2 + 4\omega_0^2}}^{\approx 2\omega_0}}{2} \approx -\sin\alpha\Omega \pm \omega_0$$

Od koder:

$$\begin{tikzcd} \omega_{1,2} \arrow[d] \arrow[drr] & & \\ \omega^+ = -\sin\alpha\Omega + \omega_0 & & \omega^- = -\sin\alpha\Omega - \omega_0 \end{tikzcd}$$

Denimo, da ob začetnem trenutku poznamo začetno lego, t.j. $u_0$ in $v_0$ ter vemo, da je masa mirovala.

$$\gamma(0) = u_0 + iv_0 \qquad \dot{\gamma}(0) = 0$$

Splošno rešitev zapišemo kot linearno kombinacijo obeh lastnih:

$$\gamma = Ae^{it\omega^+} + Be^{it\omega^-}$$

Iz hitrostnega začetnega pogoja hitro izluščimo vrednosti obeh konstant:

$$\dot{\gamma}\Big|_0 = Ai\omega^+ e^{it\omega^+} + Bi\omega^- e^{it\omega^-} = 0$$

Ob določanju konstant si privoščimo približek $\Omega \sin\alpha \approx 0$, ki ni daleč od resnice. Od tod sledi:

$$A\omega_0 \approx B\omega_0 \Rightarrow A = B = \frac{\Lambda_0}{2}$$

Sedaj lahko zapišemo končno rešitev:

$$\gamma = \frac{\Lambda_0}{2} e^{-i\Omega\sin\alpha t}\left\{e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t}\right\} = \Lambda_0 e^{-i\Omega\sin\alpha t}\cos\omega_0 t$$

Kar prepišemo v realen prostor kot:

$$u = \mathrm{Re}\gamma = \Lambda_0 \cos(\Omega\sin\alpha t)\cos\omega_0 t \tag{7a}$$

$$v = \mathrm{Im}\gamma = -\Lambda_0 \sin(\Omega\sin\alpha t)\cos\omega_0 t \tag{7b}$$

Z zapisom $v$ ter $u$ smo opisali časovni razvoj sistema. Opazimo, da je gibanje sestavljeno iz kroženja, ki zavisi od položaja na površini ter običajnega nihanja. Frekvenca kroženja je seveda dosti nižja v primeri z nihajno frekvenco.

# Literatura


[1] Peter Prelovšek, skripta *Klasična mehanika*.


LaTeX