

KLASIČNA MEHANIKA

Peter Prelovšek

2. junij 2013

Kazalo

1	Newtonova mehanika	7
1.1	Izhodišča, meje in osnove klasične mehanike	7
1.1.1	Osnovni pojmi	7
1.1.2	Newtonovi zakoni	8
1.1.3	Meje veljavnosti	8
1.2	Gibanje enega delca	9
1.2.1	Gibalna količina delca	9
1.2.2	Vrtilna količina delca	10
1.2.3	Energija delca	10
1.3	Neinercialni sistemi	12
1.3.1	Sistemske sile	15
1.4	Gibanje sistema delcev	15
1.4.1	Gibalna količina sistema	16
1.4.2	Vrtilna količina sistema	17
1.4.3	Energija sistema	18
1.4.4	Nekonzervativne sile	21
2	Lagrangeova mehanika	23
2.1	Gibanje omejeno z vezmi	23
2.2	Generalizirane koordinate	26
2.3	D'Alembertov princip	26
2.4	Lagrangeove enačbe	28
2.5	Primeri Lagrangeovih enačb	31
2.6	Ohranjene količine - integrali gibanja	33
2.6.1	Ciklične koordinate	33
2.6.2	Celotna energija	34
2.7	Variacijski princip mehanike	35
2.7.1	Hamiltonov princip	35
2.7.2	Variacijski račun	36
2.7.3	Variacijska izpeljava Lagrangeovih enačb	37

3	Gibanje delca pri centralni sili	39
3.1	Problem dveh teles	39
3.2	Konstante gibanja	40
3.3	Krivulje gibanja - orbite	42
3.3.1	Klasifikacija orbit	42
3.3.2	Integrabilnost orbit	44
3.4	Keplerjev problem	44
3.4.1	Enačbe elipse	45
3.4.2	Binetova zveza	46
3.4.3	Obhodni čas	47
3.5	Sipanje delcev v centralnem potencialu	48
4	Gibanje togega telesa	51
4.1	Lega togega telesa	51
4.1.1	Eulerjevi koti	52
4.2	Togo telo s fiksno točko	55
4.2.1	Vrtilna količina in energija togega telesa	56
4.2.2	Enačbe gibanja togega telesa	56
4.2.3	Prosto gibanje togega telesa	57
4.3	Vpeta osno simetrična vrtavka	59
4.3.1	Spuščena hitra vrtavka	62
5	Majhna nihanja	65
5.1	Razvoj okrog stacionarnega stanja	65
5.2	Lastna nihanja	66
5.3	Normalne koordinate	69
6	Hamiltonova mehanika	71
6.1	Legendreova transformacija	72
6.2	Hamiltonove gibalne enačbe	73
6.3	Primeri Hamiltonskih sistemov	74
6.3.1	Masa na vzmeti	74
6.3.2	Gibanje delca v centralnem potencialu	74
6.3.3	Nabit delec v električnem in magnetnem polju	74
6.4	Konstante gibanja v Hamiltonovi mehaniki	77
6.5	Poissonov oklepaj	77
6.6	Kanonične transformacije	79
7	Dinamika zveznih sredstev	83
7.1	Longitudinalna nihanja elastične palice	83
7.1.1	Kontinuumski popis	84

7.1.2	Lagrangeova gostota	85
7.2	Variacijska formulacija mehanike kontinuuma	85
7.3	Hamiltonova formulacija za zvezno sredstvo	86

Poglavje 1

Newtonova mehanika

1.1 Izhodišča, meje in osnove klasične mehanike

1.1.1 Osnovni pojmi

Na začetku je treba spomniti, da so enačbe klasične mehanike osnovane na nekaterih pojmi, ki so nam sedaj v fiziki zelo domači, vendar predstavljajo netrivialne koncepte in so tudi v zgodovini fizike doživeli svoj razvoj.

1) Modeli: Koncepti kot so: točkasto telo, togo telo, zvezno telo (kontinuum), za katere so definirane osnovne enačbe klasične mehanike, so vsak zase idealizacija in poenostavitev realnih snovi ter sistemov. Predstavljajo osnovne gradnike oz. (v bolj sodobni formulaciji) modele, ki jih opisujejo enačbe.

2) Pojmi:

a) Prostor: V nereletivistični mehaniki je prostor, v katerem se gibljejo delci, tridimenzionalen (3D) in raven (evklidski). Prostor je homogen (enak v vseh točkah) in izotropen (enak v vseh smereh).

b) Čas je absoluten, torej enak v vseh koordinatnih krajevnih sistemih. Obstaja tudi poseben referenčni sistem prostor - čas, v katerem veljajo Newtonovi zakoni.

c) Masa je osnovna lastnost vsakega delca snovi. Predstavlja količino, ki daje delcu inercijo in gravitacijo. Masa delca je neodvisna od časa in gibanja delca.

d) Sile popisujejo medsebojno delovanje teles. Osnovne sile, kot so gravitacijska, električna in magnetna, delujejo na daljavo in so trenutne (nezakasnjene oz. neretardirane). V klasično mehaniko je možno vključiti tudi kontaktne sile med telesi, kot je npr. trenje.

1.1.2 Newtonovi zakoni

Isaac Newton je svojem osrednjem delu Principia (1687) formuliral tri osnovne zakone mehanike:

1. Zakon inercije: Točkasti delec miruje ali se giblje premo enakomerno, če nanj ne deluje nobena sila.
2. Zakon sile: Pod vplivom sile se telo giblje pospešeno,

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \tag{1.1}$$

kjer je \mathbf{F} vsota vseh sil na telo.

3. Zakon akcije in reakcije: Sile, ki delujejo med dvema telesoma, so si nasprotni po smeri in enake po velikosti, torej $\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$.

Prvi zakon, ki ga na podlagi opazovanj formuliral že Galileo Galilei, velja za inercialni referenčni sistem (IRS) in ga hkrati s tem definira ter zagotavlja njegov obstoj (v principu). Dejansko je IRS idealizacija, saj vemo, da so Zemlja, heliocentrični sistem, naša galaksija itd. le približki k idealnemu IRS.

Drugi, centralni, zakon povezuje in hkrati definira osnovne pojme klasične mehanike. To so sila in (inercialna) masa, ki jih poveže s kinematiko, t.j. pospeškom, delca.

Tretji zakon, ki je plod opazovanja, podaja osnovno značilnost medsebojnega delovanja teles.

1.1.3 Meje veljavnosti

Kot vemo danes, imajo zakoni klasične (Newtonove) mehanike svoje meje veljavnosti, in to zlasti v dveh smereh:

Veljajo le za zmerne hitrosti delcev $v \ll c_0$, dosti manjše od svetlobne hitrosti c_0 . Posplošitev izven tega območja zahteva obravnavo relativistične (Einsteinove) mehanike, kjer nepovezana koncepta prostora in časa zamenja skupni (povezani) štiridimenzionalni prostor - čas.

Veljajo za makroskopske objekte, ki so dosti razsežnejši od (tipično) atomskih dimenzij, torej $l \gg a_B$, kjer je $a_B \sim 0.05nm$ Bohrov radij kot karakteristična dimenzija atomske kvantne fizike. Osnovna relacija kvantne mehanike kot fundamentane teorije mikroskopke fizike namreč vpelje nedoločeno lege in gibalne količine delca, $\Delta x \Delta p \sim \hbar$. To presega pojme klasične mehanike, ki zato odpove v popisu nanosistemov, fizike atomov, jedra in osnovnih delcev.

1.2 Gibanje enega delca

Gibanje delca je podano z njegovo trajektorijo, torej s časovno odvisnostjo njegovega krajevnega vektorja, $\mathbf{r}(t)$. S tem sta podana tudi časovni odvisnosti njegovih vektorjev hitrosti in pospeška,

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{\mathbf{r}}. \quad (1.2)$$

Vprašanje gibanja delca pri znani sili kot funkciji kraj, časa in tudi hitrosti, se tako prevede na reševanje enačbe

$$m\mathbf{a} = \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t) \implies \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\mathbf{F}\left(\mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}, t\right), \quad (1.3)$$

kar je diferencialna enačba 2. reda za iskano trajektorijo $\mathbf{r}(t)$. Pri podanih začetnih pogojih $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(t_0)$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(t_0)$ je rešitev za $\mathbf{r}(t)$ enolična. Za klasično mehaniko torej velja **princip determiniranosti**.

Ker je Newtonov zakon enak v vseh inercialnih sistemih, velja tudi **Galilejev princip relativnosti**. Če transformiramo enačbe v koordinatni sistem, ki je premaknjen in se giblje glede na prvotni s konstantno hitrostjo, hkrati pa premaknemo štetje časa, tj.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0(t) + \mathbf{r}'(t), \quad \mathbf{r}_0(t) = \mathbf{v}_0 t + \mathbf{b}_0, \quad t = \tau + t', \quad (1.4)$$

se oblika Newtonovega zakona ne spremeni,

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F} \implies m \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt'^2} = \mathbf{F}'. \quad (1.5)$$

Ker je lahko novi koordinatni sistem tudi poljubno orientiran, pomeni, da morajo biti Newtonovi zakoni invariantni na Galilejeve transformacije, ki vsebujejo v principu 3 (\mathbf{v}_0) + 3 (\mathbf{b}_0) + 3 (rotacije sistema \mathbf{r}') + 1 (τ) = 10 prostih parametrov.

1.2.1 Gibalna količina delca

Gibalna količina \mathbf{p} je definirana kot

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (1.6)$$

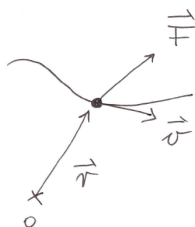
Ker velja $m \neq m(t)$, je Newtonov zakon v inercialnih sistemih izražen splošno kot

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}. \quad (1.7)$$

V posebnem primeru, ko ni sil oz. je njihova vsota na delec nič, dobimo *zakon o ohranitvi gibalne količine*,

$$\mathbf{F} = 0 \implies \dot{\mathbf{p}} = 0 \implies \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_0, \quad \mathbf{v}(t) = \mathbf{v}_0. \quad (1.8)$$

1.2.2 Vrtilna količina delca



Vrtilna količina \mathbf{l} kot tudi navor \mathbf{M} sta definirana glede na izbrano izhodišče,

$$\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}, \quad \mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}. \quad (1.9)$$

Gibalna enačba za \mathbf{l} sledi

$$\frac{d}{dt}\mathbf{l} = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{p}) = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad (1.10)$$

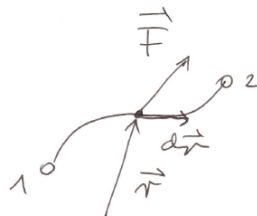
Ker prvi člen odpade zaradi $\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} = \mathbf{v} \times m\mathbf{v} = 0$, dobimo iz Newtonovega zakona

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \dot{\mathbf{l}} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \mathbf{M}. \quad (1.11)$$

V primeru, ko ni navora na izbrani delec, dobimo *zakon o ohranitvi vrtilne količine*,

$$\mathbf{M} = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{l}} = 0 \Rightarrow \mathbf{l}(t) = \mathbf{l}_0. \quad (1.12)$$

1.2.3 Energija delca



Definirajmo kinetično energijo

$$T = \frac{m}{2}v^2 \quad (1.13)$$

in delo sile med dvema točkama poti, ki jo opravi delec,

$$A = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.14)$$

Pokažimo, da je delo sile enako spremembi kinetične energije

$$d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt \implies A = \int_1^2 \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}dt = \int_1^2 P(t)dt, \quad (1.15)$$

kjer je $P(t)$ moč sile. Sledi

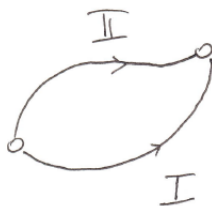
$$A = \int_1^2 m\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}dt = m \int_1^2 \dot{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{v}dt = \frac{m}{2} \int_1^2 \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v})dt = T(2) - T(1). \quad (1.16)$$

Opravljen delo sile je torej enako razliki kinetičnih energij med končno in začetno,

$$A = T(2) - T(1) = \frac{m}{2}(v_2^2 - v_1^2). \quad (1.17)$$

Potencialne (konzervativne) sile:

Poseben primer so potencialne sile, kjer je mogoče predstaviti delo sil kot razliko potencialne energije delca in vpeljati pojem ohranitve mehanske energije. Take sile so osnovne v fiziki, saj veljajo za popis delovanja med osnovnimi gradniki snovi (elektroni, jedri, atomi, masami). Vendar se v makroskopski fiziki pojavljajo tudi nekonzervativne sile, kot so npr. upor in sila trenja. Zahteva za potencialne sile je, da je njihovo delo neodvisno od poti med



dvema (poljubnima) točkama, torej velja za vse poti

$$A_I = A_{II} = A \implies \int_1^2 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_1^{II} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \implies \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (1.18)$$

Vektorje, katerih integral vzdolž poti je nič (za vse poti), je možno zapisati kot gradient potenciala

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla U(\mathbf{r}) = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}}, \quad (1.19)$$



saj je za take vektorje potni integral neodvisen od poti (Stokesov izrek),

$$\begin{aligned} A &= - \int_1^2 \nabla U(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 \frac{\partial U}{\partial \mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = - \int_1^2 \frac{dU}{ds} ds = \\ &= - \int_1^2 dU = -U(2) + U(1). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Za potencialne sile je torej delo sil možno predstaviti kot razliko potencialnih energij in vpeljati *celotno mehansko energijo, ki je ohranjena količina*,

$$W = T + U \quad \implies \quad W(2) = W(1) = W. \quad (1.21)$$

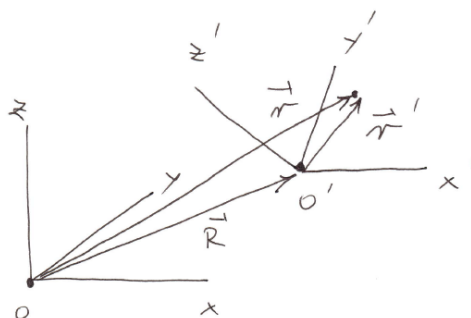
1.3 Neinercialni sistemi

Newtonovi zakoni veljajo za inercialne sisteme. Vendar so slednji idealizacija, saj nas običajno zanima gibanje v sistemih, ki niso ali pa so le približno inercialni, npr. Zemlja. Gibalne enačbe je zato koristno in tudi možno zapisati v neinercialnih sistemih. Vzemimo kot izhodišče inercialni sistem z evklidskimi koordinatnimi vektorji \mathbf{e}_α . Izhodišče neinercialnega koordinatnega sistema O' se giblje glede na inercialni kot $\mathbf{R}(t)$. Novi sistem je podan s koordinatnimi vektorji $\mathbf{e}'_\alpha(t)$, ki so enotni in pravokotni, vendar splošno orientirani in odvisni od časa. Lego v inercialnem sistemu zapišemo kot

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{r}', \quad (1.22)$$

kjer so koordinate

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \sum_{\alpha=1}^3 x_\alpha \mathbf{e}_\alpha = (x, y, z), & \mathbf{r}' &= \sum_{\alpha=1}^3 x'_\alpha \mathbf{e}'_\alpha = (x', y', z'), \\ \mathbf{R} &= \sum_{\alpha=1}^3 X_\alpha \mathbf{e}_\alpha = (X, Y, Z). \end{aligned} \quad (1.23)$$



Namen je izraziti splošno hitrost \mathbf{v} in pospešek \mathbf{a} v novem koordinatnem sistemu. Začnemo s hitrostjo

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \frac{d\mathbf{r}'}{dt}. \quad (1.24)$$

Pri splošnem koordinatnem sistemu $\mathbf{e}'_{\alpha}(t)$ lahko zapišemo

$$\frac{d\mathbf{e}'_{\alpha}}{dt} = \sum_{\beta=1}^3 a_{\alpha\beta} \mathbf{e}'_{\beta} \quad / \cdot \mathbf{e}'_{\gamma} \quad \Rightarrow \quad a_{\alpha\gamma} = \frac{d\mathbf{e}'_{\alpha}}{dt} \cdot \mathbf{e}'_{\gamma}. \quad (1.25)$$

Matrika $a_{\alpha\beta}$ je antisimetrična, kar sledi iz

$$a_{\alpha\beta} = \frac{d\mathbf{e}'_{\alpha}}{dt} \cdot \mathbf{e}'_{\beta} = \frac{d}{dt}(\mathbf{e}'_{\alpha} \cdot \mathbf{e}'_{\beta}) - \mathbf{e}'_{\alpha} \cdot \frac{d\mathbf{e}'_{\beta}}{dt} = -a_{\beta\alpha}, \quad (1.26)$$

kjer smo upoštevali, da so enotski vektorji ves čas ortonormirani. Torej so diagonalni elementi $a_{\alpha\alpha} = 0$, izvendiagonalni pa v splošnem neničelni, in sicer podani s tremi količinami $a_{12} = -a_{21}$, $a_{13} = -a_{31}$, $a_{23} = -a_{32}$. Tri neodvisne količine nakazujejo, da je možno prikazati množenje tenzorja \mathbf{a} z vektorjem kot vektorski produkt. Če izberemo

$$a_{12} = \omega'_3, \quad a_{13} = -\omega'_2, \quad a_{23} = \omega'_1, \quad (1.27)$$

in če definiramo $\omega_{\alpha'}$ kot komponente kotne hitrosti, potem lahko prikažemo enačbo (1.25) kot vektorski produkt,

$$\omega = \sum_{\alpha} \omega'_{\alpha} \mathbf{e}'_{\alpha}, \quad \frac{d\mathbf{e}'_{\alpha}}{dt} = \omega \times \mathbf{e}'_{\alpha} ? \quad (1.28)$$

Izraz (1.28) lahko dokažemo z direktno primerjavo izračunov obeh strani. Izberimo najprej $\alpha = 1$. Leva stran, izračunana iz matrike, tu da

$$\frac{d\mathbf{e}'_1}{dt} = \sum_{\beta} a_{1\beta} \mathbf{e}'_{\beta} = a_{12} \mathbf{e}'_2 + a_{13} \mathbf{e}'_3 = \omega'_3 \mathbf{e}'_2 - \omega'_2 \mathbf{e}'_3. \quad (1.29)$$

Direktni izračun vektorskega produkta v enačbi (1.28) se s tem ujema,

$$\omega \times \mathbf{e}'_1 = \omega'_3 \mathbf{e}'_2 - \omega'_2 \mathbf{e}'_3. \quad (1.30)$$

Ostale komponente $\alpha = 2, 3$ dokažemo s ciklično zamenjavo indeksov, torej je trditev (1.28) dokazana.

Iz izrazov je jasno, da ima vektor ω pomen trenutne kotne hitrosti, ki podaja tako os kot tudi hitrost vrtenja. V splošnem je ta lahko odvisna od časa, torej $\omega(t)$ se lahko spreminja tako po velikosti kot po smeri. Sedaj lahko izrazimo hitrost v gibajočem sistemu kot

$$\frac{d\mathbf{r}'}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\sum_{\alpha} x'_{\alpha} \mathbf{e}'_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha} \dot{x}'_{\alpha} \mathbf{e}'_{\alpha} + \sum_{\alpha} x'_{\alpha} (\omega \times \mathbf{e}'_{\alpha}) = \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{rel} + \omega \times \mathbf{r}'. \quad (1.31)$$

Prvi člen predstavlja hitrost, izračunano v lokalnem koordinatnem sistemu, drugi pa prispevek hitrosti zaradi (trenutnega) vrtenja sistema. Torej je celotna hitrost

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} + \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{rel} + \omega \times \mathbf{r}'. \quad (1.32)$$

Pri nadaljnjem računanju pospeškov pride prav ugotovitev, da za $\omega(t)$ velja

$$\frac{d\omega}{dt} = \left(\frac{d\omega}{dt} \right)_{rel}, \quad (1.33)$$

saj velja $\omega \times \omega = 0$. Sedaj lahko postopek odvajanja ponovimo,

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \left[\sum_{\alpha} \dot{x}'_{\alpha} \mathbf{e}'_{\alpha} + \omega \times \sum_{\alpha} x'_{\alpha} \mathbf{e}'_{\alpha} \right] = \sum_{\alpha} \ddot{x}'_{\alpha} \mathbf{e}'_{\alpha} + \\ &+ 2 \sum_{\alpha} \dot{x}'_{\alpha} (\omega \times \mathbf{e}'_{\alpha}) + \omega \times \sum_{\alpha} \dot{x}'_{\alpha} \mathbf{e}'_{\alpha} + \dot{\omega} \times \sum_{\alpha} x'_{\alpha} \mathbf{e}'_{\alpha} = \\ &= \left(\frac{d^2\mathbf{r}'}{dt^2} \right)_{rel} + 2\omega \times \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{rel} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}') + \dot{\omega} \times \mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (1.34)$$

kjer pri zadnjem členu zaradi relacije (1.33) lahko izražamo odvod $\dot{\omega}$ v lokalnem ali v inercialnem sistemu.

Dobljene prispevke k pospešku (1.34) po vrsti interpretiramo. Prvi je pospešek, izražen v lokalnem sistemu. Drugi je Coriolisov pospešek, ki nastopi, če se telo giblje v vrtečem se sistemu. Tretji je centripetalni pospešek zaradi vrtenja sistema. Četrty pa je posledica pospešenega vrtenja (kotnega pospeška) sistema.

1.3.1 Sistemske sile

Če v inercialnem sistemu zapišemo Newtonov zakon z zvezo med absolutnim pospeškom (ki je enak za vse inercialne sisteme) in (celotno) silo na delec,

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (1.35)$$

lahko za neinercialni sistem uporabimo podobno zvezo z lokalnim pospeškom, če vpeljemo sistemsko silo kot dodatno silo. Gornje enačbe lahko prepisemo kot

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} \right)_{rel} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_s, \quad (1.36)$$

kjer je \mathbf{F}_s sistemska sila podana kot

$$\mathbf{F}_s = -m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} - 2m\boldsymbol{\omega} \times \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{rel} - m\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') - m\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r}'. \quad (1.37)$$

Posamezni prispevki k sistemske sili (1.37) so: sila zaradi pospeška izhodišča sistema, Coriolisova sila \mathbf{F}_C , centrifugalna sila \mathbf{F}_{cf} in sila zaradi pospešenega vrtenja.

Ugotovimo lahko, da se tudi v neinercialnem sistemu lahko napiše ustrezni Newtonov zakon, kjer je nova sila zaradi sistemskega prispevka v splošnem funkcija relativne lege, lokalne hitrosti in časa,

$$m \left(\frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} \right)_{rel} = \mathbf{F}'(\mathbf{r}', \left(\frac{d\mathbf{r}'}{dt} \right)_{rel}, t). \quad (1.38)$$

1.4 Gibanje sistema delcev

Pri obravnavi sistema delcev ločimo *zunanje sile*, torej tiste, ki imajo izvor izven sistema (npr. gravitacijske sile, sile zaradi zunanjega električnega ali magnetnega polja) in *meddelčne sile*, ki delujejo med telesi znotraj sistema. Slednje so običajno dvodelčne in so npr. električne in magnetne za nabite delce ali gravitacijske za masne delce. Izberimo, da je znotraj sistema $i = 1, N$ točkastih delcev (oz. dovolj majhnih delcev) s konstantnimi (časovno neodvisnimi) masami m_i , in za njih zapišemo sistem Newtonovih enačb,

$$m_i \dot{\mathbf{v}}_i = \dot{\mathbf{p}}_i = \mathbf{F}_i^z + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji}, \quad (1.39)$$

kjer je \mathbf{F}_i^z zunanja sila na i -ti delec in \mathbf{F}_{ji} meddelčna sila, s katero j -ti delec deluje na i -ti delec.

1.4.1 Gibalna količina sistema

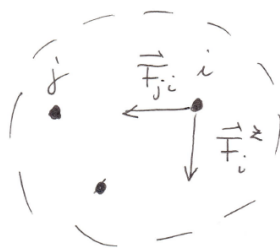
Analogno kot za en delec definiramo *celotno gibalno količino sistema delcev* kot vsoto posameznih gibalnih količin,

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i. \quad (1.40)$$

Gibalna enačba za \mathbf{P} je

$$\dot{\mathbf{P}} = \sum_i \dot{\mathbf{p}}_i = \sum_i \mathbf{F}_i^z + \sum_{i,j \neq i} \mathbf{F}_{ji}. \quad (1.41)$$

Če definiramo celotno zunanjo silo na sistem \mathbf{F}^z in meddelčne sile razdelimo



na vsoto parov delcev, dobimo

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^z + \sum_{i,j < i} (\mathbf{F}_{ji} + \mathbf{F}_{ij}), \quad \mathbf{F}^z = \sum_i \mathbf{F}_i^z. \quad (1.42)$$

Iz 3. Newtonovega zakona o akciji in reakciji sledi, da si morata biti medsebojni sili med delcema nasprotni, torej prispevek notranjih sil odpade, in sledi *Newtonov zakon za gibalno količino sistema delcev*, kjer nastopa le vsota zunanjih sil.

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^z. \quad (1.43)$$

Poseben primer dobimo, ko je vsota zunanjih sil nič. V tem primeru sledi *zakon o ohranitvi gibalne količine sistema*,

$$\mathbf{F}^z = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{P}} = 0 \Rightarrow \mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0. \quad (1.44)$$

Prikladno je tudi definirati *težišče sistema* kot center mase,

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i = M \mathbf{r}_T, \quad \sum_i m_i = M, \quad (1.45)$$

kjer je M celotna masa sistema in \mathbf{r}_T vektor težišča sistema. Gibalno količino sistema je namreč mogoče povezati le z gibanjem težišča,

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \mathbf{v}_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{r}_i \right) = M \dot{\mathbf{r}}_T = M \mathbf{v}_T. \quad (1.46)$$

Torej Newtonov zakon velja, kot bi bila vsa masa zbrana v težišču,

$$M \dot{\mathbf{v}}_T = M \mathbf{a}_T = \dot{\mathbf{P}} = \mathbf{F}^z. \quad (1.47)$$

1.4.2 Vrtilna količina sistema

Izpeljava je podobna za celotno vrtilno količino sistema, ki je vsota vrtilnih količin posameznih delcev. Za izbrano izhodišče dobimo

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i. \quad (1.48)$$

Gibalne enačbe dajo

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i) = \sum_i \dot{\mathbf{r}}_i \times m_i \mathbf{v}_i + \sum_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{p}}_i. \quad (1.49)$$

Prvi člen odpade zaradi vektorskega produkta enakih vektorjev. V drugem



razdelimo zunanje in medsebojne sile,

$$\dot{\mathbf{L}} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^z + \sum_{i,j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji}. \quad (1.50)$$

Navore notranjih sil zopet seštejemo po parih delcev. Ob upoštevanju zakona o akciji in reakciji ugotovimo, da se navori izničijo pod pogojem, če so medsebojne sile na zveznici (centralne sile),

$$\mathbf{M}^n = \sum_{i,j \neq i} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} = \sum_{i,j < i} (\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij}) = \sum_{i,j < i} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji} = 0. \quad (1.51)$$

Dobimo zakon o vrtilni količini, ki vsebuje le navor vseh zunanjih sil,

$$\dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M}^z, \quad \mathbf{M}^z = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^z. \quad (1.52)$$

Če je celotni zunanji navor nič, sledi *zakon o ohranitvi vrtilne količine sistema*,

$$\mathbf{M}^z = 0 \Rightarrow \dot{\mathbf{L}} = 0 \Rightarrow \mathbf{L}(t) = \mathbf{L}_0. \quad (1.53)$$

1.4.3 Energija sistema

Vzemimo, da se v časovnem intervalu med t_1 in t_2 delci premaknejo iz lege 1 v lege 2. Delo sil vzdolž poti posameznih delcev razdelimo na delo zunanjih sil in notranjih sil med delci,

$$A = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i \cdot d\mathbf{r}_i = I^n + I^z, \quad (1.54)$$

kjer so

$$I^z = \int_1^2 \sum_i \mathbf{F}_i^z \cdot d\mathbf{r}_i, \quad I^n = \int_1^2 \sum_{i,j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_i. \quad (1.55)$$

Iz 2. Newtonovega zakona lahko izrazimo sile s pospeški delcev in podobno



kot za posamezen delec dobimo,

$$\begin{aligned} A &= \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot d\mathbf{r}_i = \sum_i \int_1^2 m_i \dot{\mathbf{v}}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \\ &= \int_1^2 \frac{d}{dt} \left(\sum_i \frac{m_i}{2} v_i^2 \right) dt = T(2) - T(1). \end{aligned} \quad (1.56)$$

Opravljen delo sil je torej razlika končne in začetne celotne kinetične energije sistema,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2. \quad (1.57)$$

Kinetična energija se ugodno izrazi v *težiščnem sistemu*,

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_T + \mathbf{r}'_i, \quad \mathbf{v}_i = \mathbf{v}_T + \mathbf{v}'_i. \quad (1.58)$$

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\mathbf{v}_T + \mathbf{v}'_i) \cdot (\mathbf{v}_T + \mathbf{v}'_i). \quad (1.59)$$

Če upoštevamo definicijo težišča,

$$\sum_i m_i \mathbf{v}'_i = \frac{d}{dt} \left(\sum_i m_i \mathbf{r}'_i \right) = 0, \quad (1.60)$$

dobimo

$$T = \frac{1}{2} M v_T^2 + \frac{1}{2} \sum_i m_i (v'_i)^2. \quad (1.61)$$

Torej lahko razdelimo kinetično energijo na gibanje težišča in kinetično energijo zaradi relativnega gibanja delcev v težiščnem sistemu.

Potencialne (konzervativne) sile

Če so zunanje kot tudi notranje sile potencialne, potem lahko njihovo delo izrazimo kot razliko potencialne energije. Najprej to pokažemo za zunanje sile, za katere velja polna analogija z izpeljavo za en delec. Sila je gradient potencialne energije

$$\mathbf{F}_i^z = -\nabla_i U_i^z(\mathbf{r}_i) = -\frac{\partial U_i^z(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad (1.62)$$

$$\int_1^2 \mathbf{F}_i^z \cdot d\mathbf{r}_i = - \int_1^2 \frac{\partial U_i^z(\mathbf{r}_i)}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot d\mathbf{r}_i = -U_i^z(\mathbf{r}_{i2}) + U_i^z(\mathbf{r}_{i1}). \quad (1.63)$$

Odtod lahko napišemo delo zunanjih sil kot razliko potencialnih energij zunanjih sil,

$$I^z = \sum_i \int_1^2 \mathbf{F}_i^z \cdot d\mathbf{r}_i = -U^z(2) + U^z(1), \quad U^z = \sum_i U_i^z(\mathbf{r}_i). \quad (1.64)$$

Za sile med delci znotraj sistema privzamemo, da so posledica potencialne energije, ki je odvisna le od razdalje med delci (take so gravitacijska sila, električna sila itd.),

$$V_{ji} = V_{ji}(r_{ij}) = V_{ij}(r_{ij}). \quad (1.65)$$

Delo notranjih sil izrazimo po parih,

$$I^n = \sum_{i,j < i} \left[\int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_i + \int_1^2 \mathbf{F}_{ij} \cdot d\mathbf{r}_j \right] = \sum_{i,j < i} \int_1^2 \mathbf{F}_{ji} \cdot d\mathbf{r}_{ij}, \quad (1.66)$$

kjer je $\mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$. Sile, ki izvirajo iz potencialnih energij, odvisnih le od razdalj, so centralne. Delujejo na zveznici med delci,

$$\mathbf{F}_{ji} = -\frac{\partial V_{ji}(r_{ij})}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (1.67)$$

To pokažemo z upoštevanjem relacije iz vektorskega računa,

$$\frac{\partial r}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \frac{\partial r_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial r_{ij}}{\partial \mathbf{r}_{ij}} \frac{\partial \mathbf{r}_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i} = \frac{\partial r_{ij}}{\partial \mathbf{r}_{ij}} = \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}. \quad (1.68)$$

kjer sledi,

$$\mathbf{F}_{ji} = -\frac{\partial V_{ji}(r_{ij})}{\partial \mathbf{r}_{ij}} = -V'_{ji} \frac{\mathbf{r}_{ij}}{r_{ij}}. \quad (1.69)$$

Za delo notranjih sil torej sledi

$$\begin{aligned} I^n &= -\sum_{i,j<i} \int_1^2 \frac{\partial V_{ji}(r_{ij})}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = -\sum_{i,j<i} \int_1^2 \frac{\partial V_{ji}(r_{ij})}{\partial \mathbf{r}_{ij}} \cdot d\mathbf{r}_{ij} = \\ &= -\sum_{i,j<i} \int_1^2 dV_{ji}(r_{ij}) = -U^n(2) + U^n(1), \end{aligned} \quad (1.70)$$

in jih lahko zopet izrazimo kot razliko notranje potencialne energije sistema

$$U^n = \sum_{i,j<i} V_{ji}(r_{ij}) = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ji}(r_{ij}). \quad (1.71)$$

Vsak par nastopa v potencialni energiji le enkrat, zato je pri neomejeni dvojni vsoti dodatni faktor. Končno je celotna potencialna energija sistema

$$U = U^z + U^n = \sum_i U_i^z(\mathbf{r}_i) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} V_{ji}(r_{ij}). \quad (1.72)$$

Za tak sistem velja *zakon o ohranitvi celotne mehanske energije*,

$$W = T + U \Rightarrow W(t) = W_0. \quad (1.73)$$

Zaprto mehansko sistem je sistem, na katerega ne delujejo zunanje sile in zunanji navori. Če so sile med delci konzervativne, iz gornjih izpeljav sledi, da so v takem sistemu ohranjene količine (konstante gibanja): celotna gibalna količina \mathbf{P} , celotna vrtilna količina \mathbf{L} in celotna mehanska energija sistema W .

1.4.4 Nekonkonzervativne sile

Vse zunanje sile niso potencialne in jih ni mogoče prikazati z gradienti skalar-
larnih funkcij. Primeri takih nekonkonzervativnih sil so sile trenja in upora.

a) Linearni zakon upora - trenje: Sila je v tem primeru sorazmerna in
nasprotna hitrosti,

$$\mathbf{F}_i^z = -k_i \mathbf{v}_i, \quad k_i > 0. \quad (1.74)$$

Delo takih sil je

$$\begin{aligned} A^z &= \int_1^2 \sum_i \mathbf{F}_i^z \cdot d\mathbf{r}_i = - \sum_i k_i \int_1^2 \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i dt = \\ &= - \sum_i k_i \int_1^2 v_i^2 dt \leq 0, \end{aligned} \quad (1.75)$$

Delo je negativno (oz. manjše ali enako nič) ne glede na opravljeno pot
in imamo opravka z disipacijo (oddajanjem) energije okolici. Primer linear-
nega zakona upora je npr. gibanje telesa v tekočini, kjer je upor posledica
viskoznosti tekočine.

a) Kvadratni zakon upora: Pri večjih hitrostih teles v tekočinah in plinih
je običajno upor kvadratna funkcija hitrosti in sila deluje nasproti hitrosti,

$$\mathbf{F}_i^z = -w_i v_i^2 \mathbf{e}_{\mathbf{v}_i}, \quad w_i > 0. \quad (1.76)$$

Tudi tu je delo sil vedno negativno in se energija ne ohranja.

Poglavje 2

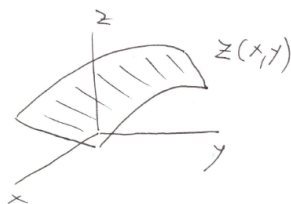
Lagrangeova mehanika

Newtonove enačbe, podane kot vektorske gibalne enačbe za en delec ali sistem delcev, ob danih začetnih pogojih popolnoma določajo gibanje delcev. Vendar se pri reševanju bolj zapletenih problemov izkaže kot bolj koristen pristop, kjer namesto vektorjev lege delcev nastopajo posplošene (generalizirane) koordinate. Posebej so posplošene koordinate pripravne, ko je gibanje delcev omejeno z vezmi. Pot posplošitve vodi preko funkcije novih koordinat, ki jo je uvedel Joseph-Louis (Giuseppe-Lodovico) Lagrange (1736-1813) in se imenuje po njem. Taka obravnava klasične mehanike ima za razliko od Newtonove (vektorske) mehanike ime **analitična mehanika** in ima poleg bolj formalnega in lažjega reševanja tudi prednost pri posplošitvah v smeri relativistične mehanike in predvsem kvantne mehanike.

2.1 Gibanje omejeno z vezmi

V mnogih primerih je treba obravnavati dinamiko delcev, katerih gibanje je zaradi delovanja drugih teles je omejeno le na del možnega vektorskega prostora (leg in hitrosti). Nekaj enostavnih primerov:

I) **Gibanje po površini:** Gibanje telesa je lahko omejeno na določeno površino v prostoru iz različnih vzrokov:

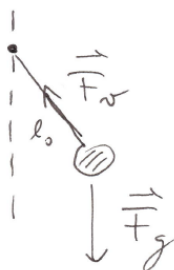


a) Telo se pod vplivom teže giblje po površini drugega mirujočega telesa, npr. krogle. V takem primeru je njegovo gibanje omejeno na določeno ploskev, podano kot $z = z(x, y)$ ali pa drugo obliko enačbe ploskve v 3D prostoru.

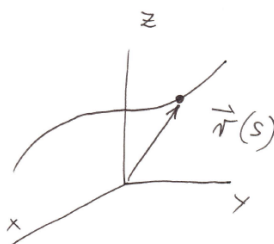
b) Nihalo na togi palici: Telo, pripeto na (lahki) konec toge palice, ki je vpeta (in sicer prosto vrtljiva v osi), je omejeno na gibanje po sferi, določeni z vezjo

$$x^2 + y^2 + z^2 = l_0^2, \quad (2.1)$$

kjer je l_0 dolžina palice.



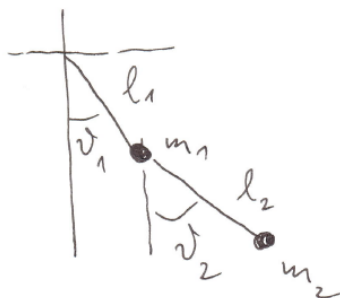
II) Gibanje po krivulji v prostoru: Če se telo giblje npr. v cevi, po bob stezi ipd., je njegovo gibanje omejeno na krivuljo, ki je podana z $\vec{r}(s)$, kjer je s pot (razdalja) vzdolž krivulje.



III) Dvojno nihalo: Dve masi, ki sta zaporedno povezani na togih palicah ali vrveh, predstavljata dvojno nihalo. Gibanje je omejeno z dolžinama obeh palic.

Holonomne vezi

Vzemimo kot primer N delcev in je $\tilde{N} = 3N$ število (kartezičnih, cilindričnih, sferičnih) neodvisnih koordinat delcev. Vez imenujemo holonomno, če lahko



omejitev zapišemo v obliki

$$f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_N, t) = f(\mathbf{r}, t) = f(\underline{x}, t) = 0, \quad (2.2)$$

kjer označujemo z \mathbf{r} vse vektorje in z \underline{x} vse koordinate delcev

$$\mathbf{r} = \{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_N\}, \quad \underline{x} = \{x_1, x_2 \dots x_{\tilde{N}}\}. \quad (2.3)$$

Če vez ne vsebuje eksplicitno časa, torej $f(\underline{x}) = 0$, jo imenujemo *skleronomna vez*. Če vsebuje eksplicitno čas, torej $f(\underline{x}, t) = 0$, je *vez reonomna*. Primeri, navedeni v začetku poglavja, predstavljajo skleronomne vezi. Npr. pri primeru Ib) nihala na togi palici, lahko zapišemo enačbo vezi kot

$$f = r^2 - l_0^2 = x^2 + y^2 + z^2 - l_0^2 = 0. \quad (2.4)$$

Holonomne vezi omogočajo zmanjšanje števila neodvisnih koordinat delca. Vsaj v principu lahko izrazimo eno od koordinat z ostalimi in tako zmanjšamo njihovo število.

Neholonomne vezi so vse vezi oz. pogoji, ki jih ne moremo zapisati v obliki (2.2), torej samo s koordinatami in časom. Take vezi zapletejo obravnavo, vsaj v okviru Lagrangeovega formalizma. Zato se jih v nadaljnji obravnavi izognemo, kar še ne pomeni, da ne obstajajo.

Seveda so tudi primeri, kjer neholonomne vezi ne predstavljajo posebnih težav. Npr. primer telesa, katerega gibanje je po vplivom teže omejeno na površino krogle. Vendar se bo ta omejitev veljala le, dokler se telo pri dovolj veliki hitrosti ne odlepi od površine krogle. Pogoj vezi je torej v principu neholonomni, vendar se tu splošnim težavam z neholonomnimi vezmi zlahka izognemo.

Sistem holonomnih vezi

V splošnem je vezi več. Torej moramo upoštevati pri holonomnih vezeh več enačb,

$$f_k(\mathbf{r}_1 \dots \mathbf{r}_N, t) = 0, \quad k = 1, K \quad (2.5)$$

kjer je K število vezi. Pri primeru II gibanja po krivulji je $K = 2$, podobno tudi za dvojno nihalo, primer III.

2.2 Generalizirane koordinate

Če obravnavamo gibanje N delcev, ki je omejeno s K enačbami vezi, je število neodvisnih koordinat n ,

$$n = \tilde{N} - K = 3N - K. \quad (2.6)$$

V takem primeru je smiselno vpeljati n neodvisnih posplošenih - generaliziranih koordinat $q_j, j = 1, n$. Prehod je podan s transformacijo vektorjev vseh delcev $i = 1, N$ v nove koordinate

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1 \dots q_n, t) = \mathbf{r}_i(\underline{q}, t), \quad \underline{q} = \{q_1 \dots q_n\}. \quad (2.7)$$

Ni splošnega navodila, kako izbrati nove koordinate q_j . Vendar je (v principu) za sistem z izključno K holonomnimi vezmi, take neodvisne koordinate mogoče najti, kar za sedaj zadošča za nadaljevanje.

Za primere navedene v poglavju, so optimalne izbire generaliziranih koordinat precej očitne. Za primer I gibanja delca po površini krogle z eno vezjo, $K = 1$, bosta zadoščali dve koordinati sfernih kotov, $\underline{q} = \{\theta, \phi\}$. Za primer dvojnega nihala sta vezi dve, $K = 2$. Za nihanja v ravnini bosta zadoščali zopet $n = 2N - K = 2$ koordinati, ki bosta najprimerneje kota obeh nihala, $\underline{q} = \{\theta_1, \theta_2\}$.

2.3 D'Alembertov princip

Delec, ki je pri gibanju omejen z vezmi, čuti zaradi omejitev (dodatne) sile, ki jih poimenujemo *sile vezi*. Iz enačb holonomnih vezi sledijo sile vezi \mathbf{F}_i^v

$$f_k(\underline{\mathbf{r}}, t) = 0, \quad k = 1, K \implies \mathbf{F}_i^v, \quad (2.8)$$

ki pa so določene šele ob poznavanju dejanskega gibanja vseh delcev, torej vseh trajektorij $\underline{\mathbf{r}}(t)$. Iz izkušenj vemo, da so sile vezi (sila podlage pri gibanju na krogli, sila vezne vrvi, palice itd.) pravokotne na gibanje. Pri nadaljnji obravnavi je zato prikladno sile na delce razdeliti na aktivne sile in na sile vezi,

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v, \quad (2.9)$$

kjer aktivne sile \mathbf{F}_i^a direktno vplivajo na gibanje v dovoljenem (pod)prostoru koordinat \underline{q} .

Vezi omejujejo možne premike. Za majhne premike, torej za diferencialne premikov $d\mathbf{r}_i$, iz diferenciala enačb vezi (2.8) sledi,

$$df_k = \sum_i \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot d\mathbf{r}_i + \frac{\partial f_k}{\partial t} dt = 0, \quad k = 1, K, \quad (2.10)$$

kar da povezave med možnimi $d\mathbf{r}_i$ in dt .

Poseben primer so **virtualni premiki**. To so možni premiki pri istem času, torej pri $dt = 0$. Že sama definicija pove, da ti nimajo zveze z dejanskimi premiki in gibanjem delcev, ki so podani s časovno odvisnimi $\mathbf{r}_i(t)$, torej z rešitvami gibalnih enačb. Virtualne odmike bomo zato ločili tudi s pisavo $d\mathbf{r}_i \rightarrow \delta\mathbf{r}_i$, in bodo omejeni z vezmi,

$$df_k(dt = 0) = \sum_i \frac{\partial f_k}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad k = 1, K. \quad (2.11)$$

Sile vezi naj bi bile vedno pravokotne na vse možne premike, torej vse virtualne premike. Če je to res, imamo opravka z **idealnimi vezmi**. Ne moremo sicer pokazati ali celo dokazati, da so vse vezi idealne, vendar bomo odslej obravnavali le take primere. Za njih velja, da je delo sil vezi (virtualno delo) enako nič,

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i^v \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad (2.12)$$

Iz splošnih Newtonovih enačb za sistem delcev,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i = \mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^a + \mathbf{F}_i^v, \quad (2.13)$$

ki jih je očitno možno prepisati za kakršnekoli premike, tudi virtualne, sledi

$$\sum_i^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0. \quad (2.14)$$

Če sedaj upoštevamo ničelni prispevek virtualnega dela, lahko enačbo (2.14) prepisemo kot

$$\sum_i^N (m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i^a) \cdot \delta\mathbf{r}_i = 0, \quad (2.15)$$

kar je **d'Alembertova enačba**. Novost in bistvena prednost je, da v enačbi ne nastopajo več sile reakcije, ampak le aktivne sile, ki so nam običajno znane. Za razliko od enačbe (2.14), kjer je za vsak delec i oklepaj identično nič, pa to v končni d'Alembertovi obliki (2.15) ni več res v splošnem,

$$m_i \ddot{\mathbf{r}}_i - \mathbf{F}_i^a \neq 0, \quad (2.16)$$

saj v njih ne nastopajo vse sile in po drugi strani odmiki $\delta\mathbf{r}_i$ niso več neodvisni.

2.4 Lagrangeove enačbe

Uporabimo sedaj transformacijo

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{r}_i(q_1 \dots q_n, t), \quad (2.17)$$

v generalizirane koordinate $q_j, j = 1, n$. Za vse transformacije predpostavimo, da so zvezne in zvezno odvedljive funkcije. Torej lahko splošno napišemo

$$d\mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} dq_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} dt. \quad (2.18)$$

Če gledamo le virtualne premike, torej premike pri $dt = 0$, dobimo povezave,

$$\delta \mathbf{r}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j. \quad (2.19)$$

Želimo zapisati d'Alembertovo enačbo (2.15) le z novimi koordinatami. Drugi člen s silami prepisemo kot

$$\sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_i^N \sum_{j=1}^n \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j = \sum_{j=1}^n Q_j \delta q_j, \quad (2.20)$$

kjer so Q_j **generalizirane sile**,

$$Q_j = \sum_i^N \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}. \quad (2.21)$$

Pri tem je treba upoštevati, da Q_j nimajo več nujno enote sile $[N]$, ampak so lahko enote različne, odvisno od ustreznih koordinat q_j . Npr., za kotne koordinate $q_j = \phi$ dobi Q_j enoto $[Nm]$ in pomen, ki ustreza navoru.

Predelava prvega člena v enačbi (2.15) zahteva več napora.

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \delta \mathbf{r}_i = \sum_{i,j} m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \delta q_j, \quad (2.22)$$

kjer s pomočjo odvajanja per partes prepisemo

$$\sum_i m_i \ddot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i \left[\frac{d}{dt} \left(m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) - m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) \right] = I + II. \quad (2.23)$$

Iz enačbe (2.18) sledi

$$\dot{\mathbf{r}}_i = \sum_j \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \dot{q}_j + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t}. \quad (2.24)$$

Če obravnavamo \dot{q}_j kot novo spremenljivko poleg q_j , iz (2.24) sledi

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j}, \quad (2.25)$$

kar izgleda kot očitna zveza za odpravljanje pik (časovnih odvodov).

Z uporabo zveze (2.24) predelamo oklepaj člena I v enačbi (2.23),

$$\sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_i \frac{m_i}{2} \dot{\mathbf{r}}_i \cdot \dot{\mathbf{r}}_i \right) = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j}, \quad (2.26)$$

kjer je T kinetična energija sistema delcev, ki je v splošnem funkcija koordinat, njihovih časovnih odvodov in časa, torej $T = T(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$. Od tod končno sledi za člen I,

$$I = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right). \quad (2.27)$$

Pri drugem členu II lahko pokažemo, da velja

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_l \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial^2 \mathbf{r}_i}{\partial q_j \partial t} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left[\sum_l \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_l} \dot{q}_l + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t} \right] = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}_i}{\partial q_j}, \quad (2.28)$$

torej se odvajanja po času prevede samo na odvajanje vektorja $\dot{\mathbf{r}}_i$. S pomočjo zveze (2.24) lahko predelamo člen II v

$$\sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} \right) = \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial q_j} = \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \sum_i m_i \mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i \right), \quad (2.29)$$

in dobimo

$$II = - \frac{\partial T}{\partial q_j}. \quad (2.30)$$

Ko združimo vse člene, dobimo virtualno delo

$$\sum_j \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} - Q_j \right] \delta q_j = 0. \quad (2.31)$$

Ker so generalizirane koordinate q_j neodvisne in so torej δq_j neodvisni in poljubni, morajo biti zadoščene zveze

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j, \quad (2.32)$$

kar predstavlja eno od oblik Lagrangeovih enačb.

Primer: polarne koordinate

Gornje enačbe lahko preverimo na netrivialnem primeru ravninskega gibanja v polarnih koordinatah $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\rho, \phi)$,

$$\mathbf{r} = \rho(\cos \phi, \sin \phi) = \rho \mathbf{e}_\rho. \quad (2.33)$$

Najprej preverimo teorem o odpravljanju pik

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\rho}(\cos \phi, \sin \phi) + \rho\dot{\phi}(-\sin \phi, \cos \phi) = \dot{\rho}\mathbf{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\mathbf{e}_\phi, \quad (2.34)$$

od koder sledi

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\rho}} = \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho}, \quad \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \dot{\phi}} = \rho \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi}, \quad (2.35)$$

kar potrjuje prej splošno izpeljan teorem.

Podobno lahko pokažemo za odvajalno zvezo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \rho} \right) = \frac{d}{dt} \mathbf{e}_\rho = \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \rho}, \quad (2.36)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \right) = \frac{d}{dt} (\rho \mathbf{e}_\phi) = \dot{\rho} \mathbf{e}_\phi - \rho \dot{\phi} \mathbf{e}_\rho = \frac{\partial \dot{\mathbf{r}}}{\partial \phi}. \quad (2.37)$$

Kinetična energija pa se zapiše kot

$$T = \frac{m}{2} v^2 = \frac{m}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2). \quad (2.38)$$

Potencialne (konzervativne) sile:

Korak naprej je možno narediti, če so aktivne sile potencialne, torej,

$$\mathbf{F}_i^a = -\nabla_i V = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i}, \quad (2.39)$$

kjer je V potencialna energija,

$$V = V(\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_N, t) = V(q_1, \dots, q_n, t). \quad (2.40)$$

Sedaj lahko generalizirane sile izrazimo kot

$$Q_j = \sum_i \mathbf{F}_i^a \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \sum_i \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (2.41)$$

Iz zveze (2.32) sedaj sledi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = - \frac{\partial V}{\partial q_j}. \quad (2.42)$$

Ker (če) V ni funkcija hitrosti, torej $V \neq f(\dot{q})$, lahko vpeljemo **Lagrangeovo funkcijo**,

$$L = T - V, \quad (2.43)$$

za katero velja **Lagrangeova enačba**

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, n, \quad (2.44)$$

ki je centralna enačba analitične mehanike.

2.5 Primeri Lagrangeovih enačb

I) **Gibanje delca brez omejitev**: kartezične koordinate

Lagrangeova funkcija pri splošni potencialne energiji delca $V(\mathbf{r})$ je

$$L = T - V = \frac{1}{2}mv^2 - V(\mathbf{r}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - V(x, y, z), \quad (2.45)$$

kjer so generalizirane koordinate kar $\underline{q} = (x, y, z)$ in za prvo dobimo,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \implies \frac{d}{dt}(m\dot{x}) = m\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x} = F_x, \quad (2.46)$$

in analogno za y, z komponente, kar da običajno Newtonovo enačbo

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} = -\nabla V. \quad (2.47)$$

II) **Ravninsko gibanje v potencialu**: polarne koordinate

Glede na omejitev na ravnino tu kinetično in potencialno energijo izrazimo v polarnih koordinatah,

$$T = \frac{m}{2}v^2 = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2), \quad V(\mathbf{r}) = V(r, \phi). \quad (2.48)$$

Lagrangeove enačbe za obe koordinati r, ϕ dajo

$$r : \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) = \frac{d}{dt}(m\dot{r}) = m\ddot{r}, \quad \frac{\partial L}{\partial r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}, \\ m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - \frac{\partial V}{\partial r}, \quad (2.49)$$



kjer prvi člen predstavlja centrifugalni prispevek (v polarnih koordinatah), in

$$\begin{aligned} \phi: \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) &= \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi}) = m(r^2 \ddot{\phi} + 2r\dot{r}\dot{\phi}), & \frac{\partial L}{\partial \phi} &= -\frac{\partial V}{\partial \phi}, \\ \frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi}) &= -\frac{\partial V}{\partial \phi}, \end{aligned} \quad (2.50)$$

Poseben primer je centralni potencial: $V = V(r)$, ki da

$$\frac{d}{dt} (mr^2 \dot{\phi}) = -\frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \implies mr^2 \dot{\phi} = l = l_0, \quad (2.51)$$

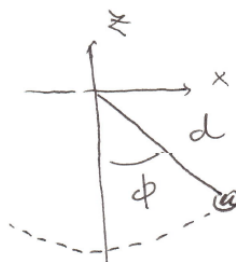
kar predstavlja ohranitev vrtilne količine.

III) Težno nihalo na togi palici

Tu je generalizirana koordinata le ena: $q = \phi$, ker je $r = d$ stalen, torej

$$T = \frac{m}{2} d^2 \dot{\phi}^2, \quad V = mgz = -mgd \cos \phi, \quad (2.52)$$

kar da gibalno enačbo



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial L}{\partial \phi} \implies md^2 \ddot{\phi} = -\frac{\partial V}{\partial \phi} = -mgd \sin \phi, \quad (2.53)$$

ki popisuje (v splošnem) anharmonično nihanje

$$\ddot{\phi} = -\omega_0^2 \sin \phi, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{d}}. \quad (2.54)$$

in za majhna nihanja linearno enačbo nihanj: $\ddot{\phi} = -\omega_0^2 \phi$.

2.6 Ohranjene količine - integrali gibanja

Reševanje dinamičnih Lagrangeovih enačb v splošnem zahteva rešitev sistema diferencialnih enačb 2.reda,

$$\ddot{q}_j = \mathcal{F}_j(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t), \quad j = 1, n, \quad (2.55)$$

npr. integracijo pri danih začetnih pogojih, kar vodi do rešitve (ki seveda ni nujno analitično dosegljiva),

$$q_j(t=0) = q_j^0, \quad \dot{q}_j(t=0) = w_j^0 \quad \longrightarrow \quad q_j(t), \quad j = 1, n. \quad (2.56)$$

Konstante oz. integrale gibanja imenujemo količine, funkcije koordinat in odvodov, ki so neodvisne od časa,

$$I_l(\underline{q}(t), \underline{\dot{q}}(t), t) = \mathcal{I}_l(t) = I_l^0 = \text{konst.} \quad (2.57)$$

Osnovne konstante gibanja lahko ugotovimo brez dejanske integracije enačb gibanja, saj sledijo iz osnovnih lastnosti Lagrangeovih funkcij. Nam pa to ne zagotavlja, da smo izčrpali vse konstante za dani problem.

2.6.1 Ciklične koordinate

Če Lagrangeova funkcija ni direktno odvisna od koordinate q_α , tako koordinato imenujemo ciklično,

$$L \neq L(\dots, q_\alpha, \dots, t), \quad \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0. \quad (2.58)$$

Od tod sledi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_\alpha} = 0 \quad \Longrightarrow \quad p_\alpha = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_\alpha} = \text{konst.} \quad (2.59)$$

Vsaki ciklični koordinati q_α torej ustreza ohranjena (konjugirana) količina $p_\alpha(t) = p_\alpha^0$, ki jo imenujemo **generalizirana gibalna količina** oz. generalizirani impulz.

Primeri

I) Delec v homogenem potencialu, kjer je $V(\mathbf{r}) = V_0$. Če zapišemo kinetično energijo v kartezičnih koordinatah,

$$T = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \quad (2.60)$$

vidimo, da $L = T - V$ ni funkcija koordinat x, y, z , ki so torej vse ciklične. Konjugirane ohranjene količine so gibalne količine,

$$p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad \text{itd.} \quad \implies \quad \mathbf{p}(t) = \mathbf{p}^0, \quad (2.61)$$

kar predstavlja znano ohranitev (običajne) gibalne količine delca.

II) Ravninsko gibanje delca v centralnem potencialu. V tem primeru so naravne polarne koordinate $\underline{q} = (r, \phi)$. Upoštevajoč $V = V(r)$, je Lagrangeova funkcija

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r). \quad (2.62)$$

V tem primeru je ciklična koordinata ϕ , ki ne nastopa direktno v L . Ustrezna ohranjena količina je

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi} = l, \quad (2.63)$$

ki je vrtilna količina (komponenta v smeri osi pravokotne na ravnino).

2.6.2 Celotna energija

Poglejmo splošno Lagrangeovo funkcijo $L(\underline{q}, \dot{\underline{q}}, t)$. Totalni odvod funkcije po času je

$$\frac{d}{dt}L = \sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.64)$$

Z upoštevanjem Lagrangeovih enačb lahko prvi člen v vsoti nadomestimo,

$$\frac{d}{dt}L = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \dot{q}_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \ddot{q}_j + \frac{\partial L}{\partial t} = \sum_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j \right) + \frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.65)$$

Definirajmo **energijsko funkcijo** oz. posplošeno energijo h ,

$$h = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L, \quad (2.66)$$

za katero iz definicije in enačbe (2.65) sledi

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (2.67)$$

Če $L \neq L(\dots, t)$ ni eksplicitna funkcija časa, je tudi $h(t) = h_0$ ohranjena količina.

Da ima h pomen celotne mehanske energije, lahko pokažemo pri (običajnem) pogoju, da potencialna energija ni funkcija hitrosti $V \neq f(\dot{q})$ in da je kinetična energija običajne oblike

$$T = \frac{1}{2} \sum_{ij} w_{ij}(\underline{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j. \quad (2.68)$$

in $w_{ij} = w_{ji}$. Prvi člen v enačbi (2.66) je v tem primeru

$$\sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j = 2T, \quad (2.69)$$

in energijska funkcija je celotna energija, vsota kinetične in potencialne energije,

$$h = 2T - L = T + V = E. \quad (2.70)$$

2.7 Variacijski princip mehanike

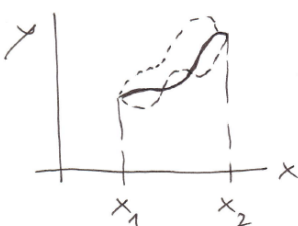
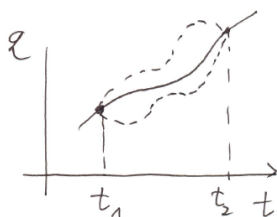
Lagrangeove enačbe analitične mehanike smo doslej izpeljali iz d'Alembertovega principa, ki je diferencialni princip. Možna pa je druga pot, ki vodi preko Hamiltonovega variacijskega računa, kar je integralni princip.

2.7.1 Hamiltonov princip

Iščemo časovni razvoj sistema $j = 1, n$ generaliziranih koordinat $\underline{q}(t)$, pri čemer sta podane začetne in končne koordinate, torej $\underline{q}(t_1) = \underline{q}_1$ in $\underline{q}(t_2) = \underline{q}_2$. Hamiltonov princip pravi, da mora rešitev $\underline{q}(t)$ zadoščati minimalnosti akcije S ,

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(\underline{q}(t), \dot{\underline{q}}(t), t) dt = \text{minimum}, \quad (2.71)$$

pri danih robnih pogojih $\underline{q}_1, \underline{q}_2$. Tak integralni pogoj formalno pomeni, da je akcija S funkcional gibanja $\underline{q}(t)$, $S = \mathcal{S}(\underline{q}(t))$.



2.7.2 Variacijski račun

Pred izpeljavo Lagrangeovih enačb iz Hamiltonovega principa ponovimo nekaj osnov diferencialnega računa. Pri podani funkciji $f(y, y', x)$, kjer je $y' = dy/dx$, iščemo rešitev $y(x)$, ki zadošča pogoju

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y, y', x) dx = \text{minimum}, \quad (2.72)$$

pri danih robnih pogojih $y(x_1) = y_1, y(x_2) = y_2$. Rešitev iščemo z variacijo okrog (še neznan) rešitve $y(x) = y(x, 0)$, torej z nastavkom

$$y(x, \alpha) = y(x, 0) + \alpha \eta(x). \quad (2.73)$$

$\eta(x)$ je poljubna zvezna in zvezno odvedljiva funkcija, ki hkrati zadošča fiksnim robnim pogojem za $y(x_{1,2}, \alpha) = y_{1,2}$, torej mora biti $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$. Skozi nastavek (2.73) postane integral pri fiksnih $y(x), \eta(x)$ funkcija $I = I(\alpha)$. Ker mora biti pri pogoj minimalnosti oz. vsaj ekstremalnosti (2.72) izpolnjen za vsako funkcijo $\eta(x)$, sledi tudi

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \alpha} + \frac{\partial f}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial \alpha} \right] dx = 0. \quad (2.74)$$

V prvem členu je $\partial y / \partial \alpha = \eta(x)$. Drugi člen pa lahko izrazimo z $\eta(x)$ preko per partes integriranja

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{\partial f}{\partial y'} \eta' dx = \frac{\partial f}{\partial y'} \eta(x) \Big|_{x_1}^{x_2} - \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) dx. \quad (2.75)$$

Ker prvi člen ne prispeva zaradi robni pogojev $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$, preoblikujemo pogoj (2.74) v

$$\frac{dI(\alpha)}{d\alpha} = \int_{x_1}^{x_2} \eta(x) \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right] dx. \quad (2.76)$$

Pogoj minimalnosti oz. ekstremalnosti mora biti izpolnjen za vse $\eta(x)$, zato je rešitev variacijskega problema podana v diferencialni obliki kot

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0. \quad (2.77)$$

2.7.3 Variacijska izpeljava Lagrangeovih enačb

Posplošimo variacijski račun iz prejšnjega podpoglavja na več spremenljivk in ga uporabimo na funkcionalu akcije $S = \mathcal{S}(\underline{q}(t))$, enačba (2.71). Vpeljimo kot variacijske funkcije

$$q_j(t, \alpha) = q_j(t) + \alpha \eta_j(t) = q_j(t) + \delta q_j(t), \quad (2.78)$$

kjer predstavlja $q_j(t)$ pravo (iskano) rešitev in $\delta q_j(t)$ variacijo okrog nje, z določenimi robnimi pogoji $\delta q_j(t_1) = \delta q_j(t_2) = 0$. Diferencial akcije sedaj zapišemo po analogiji z (2.74),

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} \left[\sum_j \frac{\partial L}{\partial q_j} \delta q_j + \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j \right] dt = 0. \quad (2.79)$$

Po integraciji per partes

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta \dot{q}_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \delta q_j \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta q_j \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right), \quad (2.80)$$

kjer je prvi člen nič zaradi robnih pogojev, lahko variacijo (2.79) zapišemo

$$\delta S = \int_{t_1}^{t_2} dt \sum_j \delta q_j \left[\frac{\partial L}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) \right] = 0. \quad (2.81)$$

Ker mora pogoj ekstremalnosti (2.81) veljati za vse $\delta q_j(t)$, ki so neodvisne funkcije, sledi

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad (2.82)$$

kar so ponovno Lagrangeove enačbe.

Ugotoviti je treba, da smo izpeljali Lagrangeove enačbe iz pogoja ekstremalnosti akcije (2.71) in nismo dokazali, da je pri dobljenih rešitvah Lagrangeovih enačb $q_j(t)$ akcija S dejansko minimalna. Za konkretne primere je to običajno zlahka pokazati, bodisi formalno ali tudi intuitivno (vsako odstopanje od prave rešitve običajno povečuje kinetični del L itd.). Ni pa možno izključiti obstoja nestabilnih ali metastabilnih rešitev, ki so formalne rešitve v posebnih primerih.

Variacijski pristop k analitični mehaniki ne vodi k lažjemu reševanju konkretnih primerov, ima predvsem nekatere konceptualne prednosti pri posplošitvah na kvantno mehaniko (Feynmanov potni integral preko vseh klasičnih poti) in na teorijo polja.

Iz Hamiltonovega principa je zlahka ugotoviti invariantnost Lagrangeovih funkcij in enačb na nekatere transformacije. Vzemimo splošno funkcijo $F(\underline{q}, t)$. Definirajmo transformirano Lagrangeovo funkcijo

$$L' = L + \frac{dF}{dt}. \quad (2.83)$$

Ustrezna akcija je

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + F|_{t_1}^{t_2} = S + F|_{t_1}^{t_2}, \quad (2.84)$$

kar sledi iz transformacije (2.83), kjer nastopa totalni odvod F po času. Pri fiksnih robnih pogojih bo torej diferencial S ,

$$\delta S' = \delta S + \delta F|_{t_1}^{t_2} = \delta S, \quad (2.85)$$

saj je

$$\delta F|_{t_1}^{t_2} = \sum_j \frac{\partial F}{\partial q_j} \delta q_j(t)|_{t_1}^{t_2} = 0. \quad (2.86)$$

Ker tudi nova funkcija L' zadošča Hamiltonovemu principu, bodo imele transformirane Lagrangeove enačbe

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L'}{\partial q_j} = 0, \quad (2.87)$$

iste rešitve $q_j(t)$ kot prvotne za L .

Poglavje 3

Gibanje delca pri centralni sili

3.1 Problem dveh teles

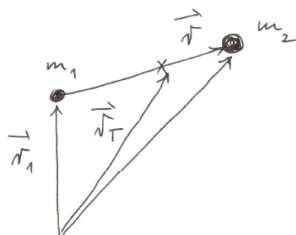
Problem potencialni sklopitvi delcev je možno reducirati problem dveh točkastih delcev na problem enega delca v centralnem polju. Kinetično energijo in potencialno energijo dveh točkastih delcev z različnima masama lahko v tem primeru napišemo kot

$$T = \frac{m_1}{2}v_1^2 + \frac{m_2}{2}v_2^2, \quad V = U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}), \quad (3.1)$$

kjer je $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ relativni vektor med delcema in v splošnem U odvisen poleg \mathbf{r} tudi od relativne hitrosti $\dot{\mathbf{r}}$. Če vpeljemo koordinato težišča kot

$$M\mathbf{r}_T = m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2, \quad M = m_1 + m_2, \quad (3.2)$$

potem lahko izrazimo



$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_T - \frac{m_2}{M}\mathbf{r}, \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_T + \frac{m_1}{M}\mathbf{r}. \quad (3.3)$$

Ko vstavimo to v enačbo (3.1), dobimo

$$T = \frac{M}{2}|\dot{\mathbf{r}}_T|^2 + \frac{m_1m_2^2 + m_2m_1^2}{2M^2}|\dot{\mathbf{r}}|^2 = \frac{M}{2}|\dot{\mathbf{r}}_T|^2 + \frac{\mu}{2}|\dot{\mathbf{r}}|^2, \quad (3.4)$$

kjer je μ reducirana masa dveh teles

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}, \quad \frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}. \quad (3.5)$$

Lagrangeova funkcija je torej

$$L = \frac{M}{2} |\dot{\mathbf{r}}_T|^2 + \frac{\mu}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (3.6)$$

Ker L ni odvisen od \mathbf{r}_T , ki je ciklična koordinata, se ohranja gibalna količina težišča,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_T} \right) = 0 \quad \implies \quad M \dot{\mathbf{r}}_T = M \mathbf{v}_T = \mathbf{G}_T = \text{konst.} \quad (3.7)$$

Problem se torej reducira na reševanje enodelčnega gibanja, podanega z efektivno Lagrangeovo funkcijo

$$\tilde{L} = \frac{\mu}{2} |\dot{\mathbf{r}}|^2 - U(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (3.8)$$

3.2 Konstante gibanja

V nadaljevanju obravnavajmo gibanje točkastega delca z maso m v izotropnem centralnem potencialu $V = V(r)$. Ker je sila v tem primeru centralna,

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r) = -V'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (3.9)$$

je navor glede na izhodišče nič,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = 0 \quad \implies \quad \dot{\mathbf{L}} = \mathbf{M} = 0, \quad (3.10)$$

torej je ena od konstant gibanja **vrtilna količina kot vektor**

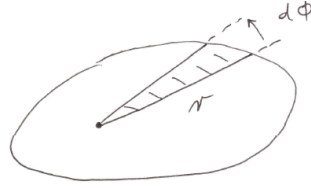
$$\mathbf{L}(t) = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = \mathbf{L}_0. \quad (3.11)$$

Koordinate lahko izberemo tako, da ima vrtilna količina smer z $\mathbf{L} = l \mathbf{e}_z$. Ker morata biti pri taki izbiri $L_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}) = 0$ in $L_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}) = 0$ za vse čase, je očitno, da je $z(t) = 0$ in gibanje ravninsko $\mathbf{r} = (x, y, 0)$. Smiselna je v tem primeru izbira polarnih koordinat (r, ϕ) z Lagrangeovo funkcijo

$$L = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2) - V(r). \quad (3.12)$$

Ker je ϕ ciklična koordinata, je njej ustrezna ohranjena posplošena gibalna količina

$$p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = m r^2 \dot{\phi} = l = l_0, \quad (3.13)$$



ki je z -komponenta vrtilne količine.

Ugotovimo lahko, da je vrtilni količini sorazmerna ploskovna hitrost,

$$\dot{A} = \frac{dA}{dt} = \frac{1}{dt} \frac{r \cdot r d\phi}{2} = \frac{r^2}{2} \dot{\phi} = \frac{l}{2m}. \quad (3.14)$$

Ker je l konstanta, je stalna tudi **ploskovna hitrost** \dot{A} , kar predstavlja **2. Keplerjev zakon gibanja planetov**.

Ohranjena je tudi **celotna energija**, saj kinetična energija (3.12) ustreza obliki (2.68), torej je ohranjena energija

$$E = T + V = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) + V(r). \quad (3.15)$$

Koristno je vedeti, da nas do ohranitve celotne energije vodi tudi direktna integracija Lagrangeovih gibalnih enačb. Enačba za r da

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 + V'(r) = 0, \quad (3.16)$$

Ob upoštevanju $mr^2\dot{\phi} = l_0$, dobimo diferencialno enačbo za r ,

$$m\ddot{r} = mr\dot{\phi}^2 - V'(r) = \frac{l^2}{mr^3} - V'(r), \quad (3.17)$$

Z upoštevanjem $\dot{r}dt = dr$ levo stran (3.17) prepoznamo kot diferencial kinetične energije, desno pa kot diferencial potencialne energije

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{m}{2} \dot{r}^2 \right) dt = \frac{d}{dr} \left[-\frac{l^2}{2mr^2} - V(r) \right] dr, \quad (3.18)$$

torej sledi ohranitev energije

$$d(T + V) = dE = 0 \quad \implies \quad T + V = E. \quad (3.19)$$

3.3 Krivulje gibanja - orbite

Iz ohranitve energije (3.15) in vrtilne količine (3.13) sledi

$$\frac{m}{2}\dot{r}^2 = E - \tilde{V}(r), \quad \tilde{V}(r) = V(r) + \frac{l^2}{2mr^2}, \quad (3.20)$$

kjer je $\tilde{V}(r)$ efektivna potencialna energija in drugi člen predstavlja centrifugalni prispevek. Iz enačbe (3.20) sledi

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}} \sqrt{E - \tilde{V}(r)}. \quad (3.21)$$

S separacijo spremenljivk lahko izraz prevedemo na integracijo

$$\int_{t_0}^t dt = \pm \sqrt{\frac{m}{2}} \int_{r_0}^r \frac{dr}{\sqrt{E - \tilde{V}(r)}}, \quad (3.22)$$

kar nam da vsaj formalno rešitev $t = f(r)$. Običajno nas zanima obratna relacija, ki sledi iz prejšnje $r = \mathcal{F}(t) = f^{-1}(t)$.

Če nas zanima krivulja (orbita) gibanja delca, lahko nadomestimo diferencial časa dt s kotom $d\phi$ iz enačbe (3.13),

$$mr^2 \frac{d\phi}{dt} = l \quad \implies \quad dt = \frac{mr^2}{l} d\phi, \quad (3.23)$$

in dobimo

$$\int_{\phi_0}^{\phi} d\phi = \pm \sqrt{\frac{1}{2m}} \int_{r_0}^r \frac{l dr}{r^2 \sqrt{E - \tilde{V}(r)}}, \quad (3.24)$$

kar formalno vodi do enačbe orbite

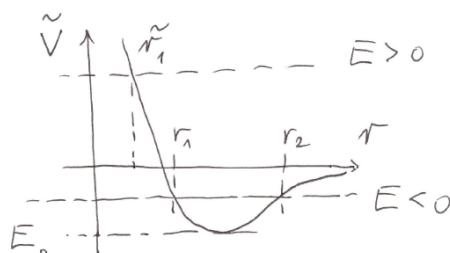
$$\phi = g(r) \quad \implies \quad r = g^{-1}(\phi) = \mathcal{G}(\phi). \quad (3.25)$$

3.3.1 Klasifikacija orbit

Oglejmo si možne orbite za različne primere potencialov $V(r)$. Privzemimo kot dane konstante $E, l \neq 0$ (primeri z $l = 0$ so lahko kvalitativno drugačni), ki določajo efektivni potencialno energijo $\tilde{V}(r)$ (3.20).

I. Privlačni singularni (Keplerjev) potencial $V(r) = -\alpha/r$.

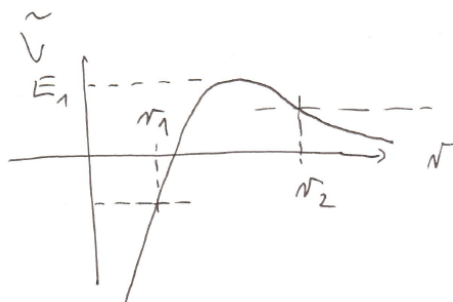
Orbite so določene s pogojem, da mora biti izraz pod korenem v (3.24) pozitiven, kar vodi do dveh možnosti (glej skico),



a) vezano (omejeno) gibanje, če je $E < 0$. V splošnem se orbita giblje med obračališčema $r_1 < r < r_2$, določenima z enačbama $\tilde{V}(r_{1,2}) = E$. Poseben primer je kroženje $r = r_0$, pri najmanjši možni energiji (pri določenem l) $E = E_0$.

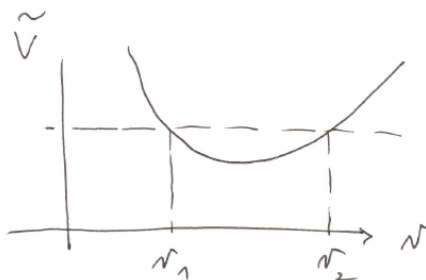
b) neomejeno gibanje, če je $E > 0$, ki je omejeno le navzdol $r > \tilde{r}_1$.

II. Splošni privlačni singularni potencial $V(r) = -\alpha/r^\beta$, kjer je $\beta > 0$. Tu je za $0 < \beta < 2$ gibanje kvalitativno podobno kot za prejšnji poseben primer $\beta = 1$.



Pri $\beta > 2$ (glej skico) pa prevlada pri $r \rightarrow 0$ singularni privlačni potencial nad odbojnim centrifugalnim in je za $E < E_1$ možna ujeta orbita $0 < r < r_1$, za $0 < E < E_1$ pa hkrati tudi neomejena orbita $r > r_2$. Za $E > E_1$ pa se neomejena orbita razteza na vse $r > 0$. So pa vse orbite za $r \rightarrow 0$ singularne, saj delec strmoglavi v izhodišče.

III. Privlačni regularni potencial $V(r) = \alpha r^\beta$ z $\beta > 0$. Tu je gibanje za $l \neq 0$ vedno omejeno $r_1 < r < r_2$ (glej skico). Omenimo lahko poseben primer $l = 0$, ki ustreza (v splošnem za $\beta \neq 2$) anharmoničnemu enodimenzionalnem nihanju delca, za $\beta = 2$ pa harmoničnemu nihanju.



3.3.2 Integrabilnost orbit

Za splošen potenčni potencial $V(r) = \alpha r^\beta$ so rešitve podane z integralom (3.24). Slednji je mogoče enostavno rešiti v okviru trigonometričnih funkcij za $\beta = 2, -1, -2$. V okviru eliptičnih integralov je možno zapisati še $\beta = 6, 4, 1, -3, -4, -6$, sicer (ali pa tudi bolj praktično in hitreje v slednjih primerih) pa se je treba lotiti integralov numerično.

3.4 Keplerjev problem

Obravnavajmo gibanje delca v privlačnem potencialu $V = -\alpha/r$, kot velja za gravitacijske sile in električne sile med nabitimi delci. Vodi do zakonov gibanja planetov, kot jih je prvi formuliral Johannes Kepler.

Integral v enačbi orbite (3.24) izvedemo z uvedbo nove spremenljivke $r = 1/u$ in $dr = -du/u^2$ in dobimo

$$\begin{aligned} \phi - \phi_0 &= \mp \sqrt{\frac{1}{2m}} \int^u \frac{l du}{\sqrt{E - \frac{l^2}{2m} u^2 + \alpha u}} = \mp \int^u \frac{du}{\sqrt{d^2 - (u - c)^2}} = \\ &= \mp \arccos\left(\frac{c - u}{d}\right), \end{aligned} \quad (3.26)$$

kar vodi do rešitve

$$u = \frac{1}{r} = c - d \cos(\phi - \phi_0). \quad (3.27)$$

Oziroma

$$r = \frac{p}{1 - \epsilon \cos(\phi - \phi_0)}, \quad (3.28)$$

kjer so konstante določene z

$$c = \frac{1}{p} = \frac{\alpha m}{l^2}, \quad d^2 - c^2 = \frac{2mE}{l^2} \implies d^2 = \frac{2mE}{l^2} + \left(\frac{\alpha m}{l^2}\right)^2, \quad (3.29)$$

in

$$\epsilon = dp = \frac{d}{c} = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\alpha^2}}. \quad (3.30)$$

Splošna oblika (3.28) ustreza enačbam stožnic (izsekom stožca) in sicer se orbite ločijo po velikosti parametra ekscentričnosti ϵ , ki smo ga v enačbi (3.30) izbrali pozitivnega, $\epsilon > 0$ (možna druga izbira predznaka korena z $\epsilon < 0$ bi pomenila le redefinicijo ϕ_0) in sicer: a) omejeno gibanje in **gibanje po elipsi** dobimo za $\epsilon < 1$ in iz enačbe (3.30) $E < 0$. Poseben primer **krožnica** z $\epsilon = 0$ in $E = -m\alpha^2/(2l^2)$.

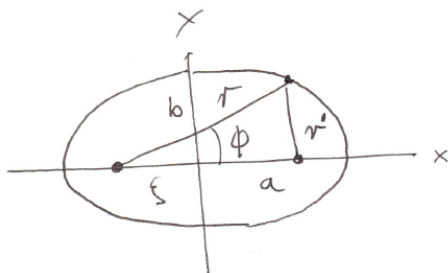
b) Za $\epsilon > 1$ je gibanje neomejeno po **hiperbolični orbiti**, če je $E > 0$.

c) Poseben primer je $\epsilon = 1$, ko je **orbita parabola** in gibanje neomejeno za $E = 0$.

Enačba (3.28) za $\epsilon < 1$ predstavlja tudi **1. Keplerjev zakon gibanja planetov**: planeti se gibljejo po elipsi, kjer je v gorišču elipse Sonce. Tu upoštevamo, da je masa Sonca dosti večja od mase planetov, tako da je težišče obeh mas skoraj v središču Sonca.

3.4.1 Enačbe elipse

Oglejmo si enačbe stožnic in elipse (3.28) v povezavi z dvema običajnjima definicijama elipse.



I. Elipso potegnemo tako, da je vsota razdalj od gorišč stalna,

$$r + r' = 2a. \quad (3.31)$$

Izrazimo relacijo v vektorski obliki, kjer je ζ razdalja gorišča a od središča elipse

$$\mathbf{r}' = 2\zeta - \mathbf{r}, \quad (3.32)$$

odkoder sledi

$$r'^2 = 4\zeta^2 + r^2 - 4r\zeta \cos \phi = (r - 2a)^2, \quad (3.33)$$

in

$$r\left(1 - \frac{\zeta}{a} \cos \phi\right) = \frac{a^2 - \zeta^2}{a} = p. \quad (3.34)$$

Primerjava z enačbo (3.28) da $\zeta = a\epsilon$ in odtod tudi $p = a(1 - \epsilon^2)$. Sedaj vstavimo še izraza za ϵ (3.30) in p (3.29) in dobimo direkten izraz za polos a ,

$$a = \frac{l^2}{\alpha m} \frac{\alpha^2 m}{2|E|l^2} = \frac{\alpha}{2|E|}. \quad (3.35)$$

II. Elipsa je v kartezičnih koordinatah izražena kot

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (3.36)$$

Izrazimo vektorja \mathbf{r}, \mathbf{r}' v kartezičnih koordinatah iz skice,

$$r^2 = (x + \zeta)^2 + y^2, \quad r'^2 = (x - \zeta)^2 + y^2, \quad (3.37)$$

odkoder sledi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(r^2 + r'^2) &= x^2 + y^2 + \zeta^2, \\ \frac{1}{2}(r^2 - r'^2) &= \frac{1}{2}(r + r')(r - r') = 2x\zeta \implies r - r' = \frac{2x\zeta}{a} = 2\epsilon x. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Iz relacije

$$\frac{1}{2}(r^2 + r'^2) - \frac{1}{4}(r - r')^2 = \frac{1}{4}(r + r')^2 = a^2, \quad (3.39)$$

sedaj sledi

$$x^2 + y^2 + \zeta^2 = a^2 + \epsilon^2 x^2. \quad (3.40)$$

Enačba je sedaj oblike (3.36), kjer lahko potrdimo

$$b^2 = a^2(1 - \epsilon^2). \quad (3.41)$$

3.4.2 Binetova zveza

Alternativna izpeljava enačbe orbite sledi iz diferencialne enačbe za $(1/r)(\phi)$. Slednjo lahko izpeljemo iz Lagrangeovih enačb za centralni potencial

$$m\ddot{r} - mr\dot{\phi}^2 = f(r), \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{dt} = \frac{l}{mr^2}, \quad (3.42)$$

iz katere lahko nadomestimo

$$\begin{aligned}\dot{r} &= \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{dr}{d\phi} = -\frac{l}{m} \frac{d}{d\phi} \left(\frac{1}{r} \right), \\ \ddot{r} &= \frac{d\dot{r}}{d\phi} \frac{d\phi}{dt} = \frac{l}{mr^2} \frac{d\dot{r}}{d\phi} = -\frac{l^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right).\end{aligned}\quad (3.43)$$

S pomočjo relacije (3.43) lahko enačbo (3.42) prepisemo kot

$$-\frac{l^2}{mr^2} \frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{l^2}{mr^3} = f(r), \quad (3.44)$$

in

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{mr^2}{l^2} f(r), \quad (3.45)$$

kar je diferencialna oblika za splošno enačbo orbite.

Binetova zveza (3.45) nudi zlasti enostavno pot do rešitve za Keplerjev problem $V = -\alpha/r$ in $f = -\alpha/r^2$, kjer sledi

$$\frac{d^2}{d\phi^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \frac{\alpha m}{l^2}. \quad (3.46)$$

Rešitev linearne diferencialne enačb sestavimo iz partikularne rešitve, ki je konstanta, in splošne rešitve homogene enačbe, in dobimo

$$\frac{1}{r} = \frac{\alpha m}{l^2} + C \cos(\phi - \phi_0), \quad (3.47)$$

kar je že prej izpeljana enačba stožnice.

3.4.3 Obhodni čas

Za izračun obhodnega časa T upoštevamo izraz za ploščino elipse in stalno ploščinsko hitrost (2. Keplerjev zakon),

$$A_0 = \pi ab, \quad \dot{A} = \frac{l}{2m}, \quad (3.48)$$

od koder sledi,

$$T = \frac{2\pi abm}{l}. \quad (3.49)$$

Vstavimo še izraze za b (3.41), a (3.35) in ϵ (3.30)

$$T = \frac{2\pi a^2 m}{l} \sqrt{1 - \epsilon^2} = \pi a^2 \sqrt{\frac{2m|E|}{\alpha^2}} = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{\alpha}}, \quad (3.50)$$

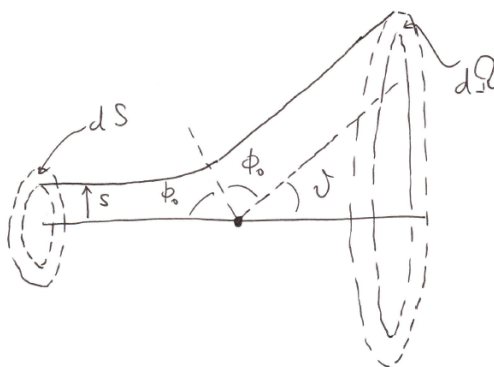
Če upoštevamo gravitacijski zakon $\alpha = GmM$, kjer sta m masa planeta in M masa Sonca ter G gravitacijska konstanta, ter da dejansko v enačbi (3.50) nastopa $m \rightarrow \mu = mM/(m + M)$ reducirana masa, potem sledi

$$\frac{T^2}{a^3} = (2\pi)^2 \frac{\mu}{GmM} = \frac{(2\pi)^2}{G(m + M)} \sim \frac{(2\pi)^2}{GM} = K, \quad (3.51)$$

kar je konstanta za vse planete. Enačba predstavlja **3. Keplerjev zakon o gibanju planetov** in je netrivialna posledica splošnega gibanja v gravitacijskem potencialu.

3.5 Sipanje delcev v centralnem potencialu

Obravnavajmo sedaj nevezano gibanje v centralnem potencialu $V = \tilde{\alpha}/r$. Privzeli bomo odbojni potencial $\tilde{\alpha} > 0$, čeprav so rešitve za privlačni potencial podobne. Primer takega gibanja je sipanje nabitih delcev (prvotno delcev α) na potencialu jedra (oz. atoma, saj imajo elektroni dosti manjšo maso), kar je zgodovinsko znano kot Rutherfordovo sipanje, ki je vodilo do razumevanja zgradbe atoma. V računu upoštevamo, da je masa jedra $M \gg m$ dosti večja od mase sipanega delca, kar pa je pri dejanskem Rutherfordovem sipanju le približek.



Želimo izračunati diferencialni sipalni presek, definirano kot razmerje med tokom delcev sipanih v prostorski kot $d\Omega$ in vpadlo enakomerno gostoto toka vpadlih delcev

$$\sigma(\Omega)d\Omega = \frac{dI}{j}. \quad (3.52)$$

Ker ima problem sferično simetrijo, je sipalni presek odvisen le od odklonskega kot θ , torej $\sigma(\Omega) \rightarrow \sigma(\theta)$. Če povežemo sedaj diferenciale prostorskega

3.5. Sipanje delcev v centralnem potencialu

kota Ω s kotom θ in toka I z oddaljenostjo od osi s ,

$$d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta, \quad dI = j dS = 2\pi j s ds, \quad (3.53)$$

dobimo zvezo

$$\sigma(\theta) = \frac{s ds}{\sin \theta d\theta}. \quad (3.54)$$

Pri sipanju v $1/r$ potencialu so orbite hiperbole, izražene v isti obliki kot v enačbi (3.28),

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 - \epsilon \cos(\phi - \phi_0)) = \frac{1}{\tilde{p}} (\epsilon \cos(\phi - \phi_0) - 1), \quad (3.55)$$

vendar so sedaj $p < 0$, $E > 0$ in $\epsilon > 1$,

$$p = \frac{l^2}{m\alpha} = -\frac{l^2}{m\tilde{\alpha}} = -\tilde{p}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\tilde{\alpha}^2}} > 1. \quad (3.56)$$

Če za kot ϕ_0 izberemo simetralo hiperbole, sledi iz enačbe (3.55) pogoj za asimptoto hiperbole pri vpadnem curku z $\phi = 0$,

$$r \rightarrow \infty : \quad \epsilon \cos \phi_0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \cos \phi_0 = \frac{1}{\epsilon} < 1, \quad (3.57)$$

torej bo $\phi_0 < \pi/2$ in sipalni kot

$$\theta = \pi - 2\phi_0 \quad \Longrightarrow \quad \cos \phi_0 = \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) = \sin \frac{\theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}. \quad (3.58)$$

Sedaj povežemo kot θ preko ϵ z s . Upoštevamo relacije

$$l = mvs \quad \Longrightarrow \quad l^2 = m^2 v^2 s^2 = 2mEs^2, \quad (3.59)$$

$$\epsilon^2 - 1 = \sin^{-2} \frac{\theta}{2} - 1 = \operatorname{ctg}^2 \frac{\theta}{2} = \frac{2El^2}{m\tilde{\alpha}^2}, \quad (3.60)$$

od koder sledi

$$\operatorname{ctg} \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{4E^2 s^2}{\tilde{\alpha}^2}} = \frac{2Es}{\tilde{\alpha}}. \quad (3.61)$$

Relacijo (3.61) uporabimo v enačbi (3.54),

$$ds = -\frac{\tilde{\alpha}}{4E} \frac{d\theta}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}, \quad (3.62)$$

in končno

$$\sigma(\theta) = \frac{\tilde{\alpha}^2}{8E^2 \operatorname{tg}(\frac{\theta}{2}) \sin^2(\frac{\theta}{2}) \sin \theta} = \frac{\tilde{\alpha}^2}{16E^2} \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}, \quad (3.63)$$

kar je znana **Rutherfordova formula** za sipanje, prvotno za delce α na jedru. Izkaže se, da velja enak izraz tudi znotraj kvantne mehanike, če se zanemari relativistične efekte. Slednje je še ena posebnost potenciala $V \propto 1/r$.

Pri sipanju definiramo tudi totalni sipalni presek,

$$\sigma_{tot} = \int \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin \theta d\theta. \quad (3.64)$$

Lahko ga tudi izrazimo kot $\sigma_{tot} = I/j$ kot celotni tok sipanih delcev deljeno z vpadlo gostota toka, torej predstavlja efektivno ploščino sipalnega centra. Hitro ugotovimo, da je v primeru Rutherfordovega sipanja (3.63) $\sigma_{tot} = \infty$, saj integral divergira na spodnji meji. To je posledica počasnega padanja Coulomskega potenciala, kjer se tudi zelo oddaljeni delci odklonijo za majhen θ , kar vodi do efektivno neskončnega sipalnega preseka.

Poglavje 4

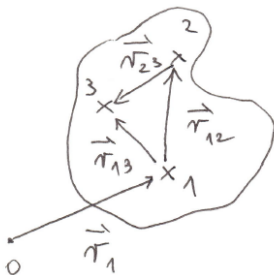
Gibanje togega telesa

4.1 Lega togega telesa

Togo telo je ena od koristnih idealizacij v mehaniki. Nekatera trdna telesa se pri delovanju zunanjih sil in pri gibanju dejansko obnašajo kot toga, saj se skoraj ne deformirajo. Definicija togosti telesa je, da so medsebojne razdalje delcev znotraj telesa ves čas konstantne. Torej mora veljati za medsebojno razdaljo dveh točk $r_{ij}(t) = c_{ij}$.

Lega togega telesa je v tem primeru podana z $n = 6$ neodvisnimi koordinatami. Dokaz sledi iz dejstva, da je lega togega telesa določena z lego treh (nekolinearnih) točk telesa. Glede na skico lego prve točke določa vektor s tremi prostimi koordinatami, pri naslednji točki imamo pri dani razdalji r_{12} samo še dve prosti koordinati in pri tretji točki samo še eno,

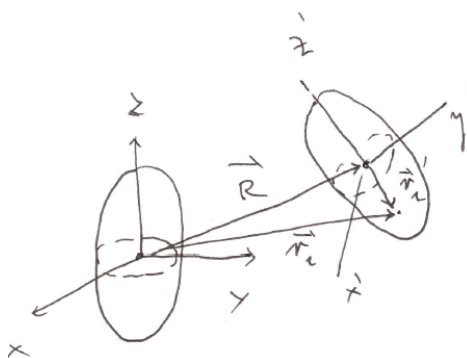
$$\begin{aligned} \mathbf{r}_1 &\implies i = 1, 3, \\ \mathbf{r}_{12} = c_{12} &\implies i = 4, 5, \\ \mathbf{r}_{23} = c_{23}, \quad \mathbf{r}_{13} = c_{13} &\implies i = 6, \end{aligned} \tag{4.1}$$



Pri gibajočem togem telesu je ugodno uporabljati koordinatni sistem, ki se giblje s telesom. Če izberemo za izhodišče koordinatnega sistema (glej skico) vektor \mathbf{R} potem je lega vsake točke določena z

$$\mathbf{r}_i = \mathbf{R} + \mathbf{r}'_i. \quad (4.2)$$

Lega \mathbf{R} je določena s tremi parametri, preostale trije pa določajo orientacijo novega koordinatnega sistema glede na prvotnega.



Tu se spomnimo lastnosti transformacij med ortonormiranimi (in desnosučnimi) koordinatnimi sistemi. Izrazimo vektor \mathbf{v} v dveh sistemih in odtod izrazimo nove koordinate s starimi,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \sum_{\alpha} x_{\alpha} \mathbf{e}_{\alpha} = \sum_{\beta} x'_{\beta} \mathbf{e}'_{\beta} \quad / \cdot \mathbf{e}'_{\gamma}, \\ \implies x'_{\gamma} &= \sum_{\alpha} (\mathbf{e}'_{\gamma} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}) x_{\alpha} = \sum_{\alpha} a_{\gamma\alpha} x_{\alpha}. \end{aligned} \quad (4.3)$$

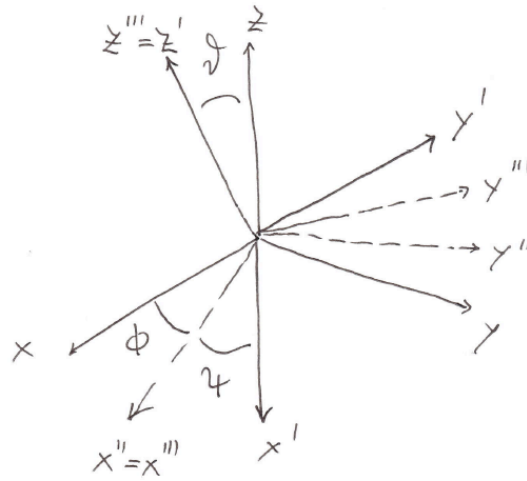
Transformacija koordinat se torej prevede na matrično zvezo

$$\underline{x}' = \underline{a} \underline{x}, \quad a_{\gamma\alpha} = (\mathbf{e}'_{\gamma} \cdot \mathbf{e}_{\alpha}) = \cos(\theta_{\alpha\gamma'}). \quad (4.4)$$

4.1.1 Eulerjevi koti

Eno od najbolj uporabnih parametrizacij relativne lege dveh koordinatnih sistemov (oz. dveh togih teles) pri eni fiksni točki so Eulerjevi koti. Opravimo tri zaporedne rotacije sistema, kar transformira sisteme $\underline{x} \rightarrow \underline{x}'' \rightarrow \underline{x}''' \rightarrow \underline{x}'$:

- 1) rotacijo okoli prvotne z osi za kot precesije ϕ ,
- 2) rotacijo okrog nove x'' za kot nutacije θ ,



3) rotacijo okrog nove osi z''' za kot rotacije Ψ .

Izbira operacij, kotov kot tudi poimenovanje kotov je tesno povezano s problemom gibanja vrtavke, kot vidimo kasneje.

Izrazimo sedaj zaporedne transformacije sistema; Rotacija za kot ϕ

$$\mathbf{e}''_{\alpha} = \sum_{\beta} T_{\alpha\beta}(\phi) \mathbf{e}_{\beta}, \quad \Longrightarrow \quad T_{\alpha\beta}(\phi) = \mathbf{e}''_{\alpha} \cdot \mathbf{e}_{\beta}, \quad (4.5)$$

in iz skice sledi

$$T_{11} = \mathbf{e}''_1 \cdot \mathbf{e}_1 = \cos \phi, \quad T_{12} = \mathbf{e}''_1 \cdot \mathbf{e}_2 = \sin \phi, \quad (4.6)$$

in analogno za celo matriko

$$\underline{\underline{T}}(\phi) = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}}_3(\phi), \quad (4.7)$$

kar lahko označimo kot splošno rotacijo R_3 okoli osi $z = 3$. Podobno obravnavamo rotacijo za kot nutacije θ ,

$$\mathbf{e}'''_{\alpha} = \sum_{\beta} U_{\alpha\beta}(\theta) \mathbf{e}''_{\beta}, \quad \Longrightarrow \quad U_{\alpha\beta}(\theta) = \mathbf{e}'''_{\alpha} \cdot \mathbf{e}''_{\beta}, \quad (4.8)$$

od koder sledi

$$\underline{\underline{U}}(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}}_1(\theta), \quad (4.9)$$

in zadnjo rotacijo za kot Ψ

$$\mathbf{e}'_\alpha = \sum_\beta V_{\alpha\beta}(\Psi) \mathbf{e}''_\beta, \quad \implies \quad V_{\alpha\beta}(\Psi) = \mathbf{e}'_\alpha \cdot \mathbf{e}''_\beta, \quad (4.10)$$

$$\underline{\underline{V}}(\Psi) = \begin{pmatrix} \cos \Psi & \sin \Psi & 0 \\ -\sin \Psi & \cos \Psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\underline{R}}_3(\Psi). \quad (4.11)$$

Končno lahko zapišemo transformacijo iz prvotnega v končni koordinatni sistem,

$$\mathbf{e}'_\alpha = \sum_\beta R_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta, \quad (4.12)$$

ki je produkt zaporednih transformacij in ustreznih matrik,

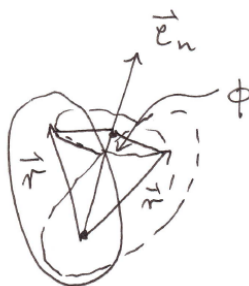
$$\underline{\underline{R}}(\phi, \theta, \Psi) = \underline{\underline{V}}(\Psi) \underline{\underline{U}}(\theta) \underline{\underline{T}}(\phi) = \underline{\underline{R}}_3(\Psi) \underline{\underline{R}}_1(\theta) \underline{\underline{R}}_3(\phi). \quad (4.13)$$

Ker so posamezne transformacije in matrike unitarne, je posledično tudi celotna transformacija unitarna,

$$\underline{\underline{T}}^{-1}(\phi) = \underline{\underline{T}}(-\phi) = \underline{\underline{T}}^T(\phi) \quad \implies \quad \underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}^T. \quad (4.14)$$

Eulerjev teorem

Teorem Eulerja pravi, da je možno vsak premik togega telesa z eno fiksno točko popisati kot vrtenje okoli osi. Očitno je, da so za popis vrtenja okoli osi potrebni trije parametri: dva za določitev osi vrtenja \mathbf{e}_n (npr. dva kota na sferi) in še kot zasuka φ . Torej imamo opraviti z parametrizacijo, ki je alternativa Eulerjevemu kotu (v posebnih primerih je lahko tudi enaka).



Za dokaz teorema, je treba pokazati, da obstaja za vsako transformacijo (4.12),(4.13) lastna os transformacije, ki se pri transformaciji ohranja

$$\underline{\underline{x}}' = \underline{\underline{R}} \underline{\underline{x}} = \lambda_1 \underline{\underline{x}} = \underline{\underline{x}}, \quad (4.15)$$

z lastno vrednostjo $\lambda_1 = 1$. Da taka lastna vrednost obstaja, mora veljati pogoj za determinanto

$$(\underline{R} - \underline{I}) \underline{x} = 0 \implies |\underline{R} - \underline{I}| = 0 \quad (4.16)$$

Pri dokazovanju upoštevamo, da je transformacijska matrika unitarna, (4.14), in da je njena determinanta ena, kar sledi iz delnih rotacijskih matrik,

$$|\underline{R}| = |\underline{V}||\underline{U}||\underline{T}| = 1 = |\underline{R}^T|. \quad (4.17)$$

Odtod izpeljemo

$$\begin{aligned} (\underline{R} - \underline{I})\underline{R}^T = \underline{I} - \underline{R}^T &\implies |\underline{R} - \underline{I}| |\underline{R}^T| = |\underline{I} - \underline{R}^T| \\ &\implies |\underline{R} - \underline{I}| = |\underline{I} - \underline{R}^T|. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Upoštevamo še, da je matrika dimenzije 3×3 ,

$$|\underline{I} - \underline{R}^T| = |\underline{I} - \underline{R}| = (-1)^3 |\underline{R} - \underline{I}|. \quad (4.19)$$

Pogoj (4.18) je možno zadostiti, le če velja

$$|\underline{R} - \underline{I}| = 0, \quad (4.20)$$

kar smo želeli dokazati. Hkrati pa velja, da ima transformacija nadaljnji dve lastni vrednosti,

$$|\underline{R}| = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \implies \lambda_2 \lambda_3 = 1 \implies \lambda_{2,3} = e^{\pm i\phi}, \quad (4.21)$$

torej sta ti dve lastni vrednosti konjugirano kompleksni (saj matrika ni hermitska) in določata tudi kot zasuka ϕ okoli osi.

4.2 Togo telo s fiksno točko

Upoštevajoč Eulerjev teorem lahko v vsakem trenutku popišemo gibanje togega telesa z eno fiksno točko z vrtenjem okoli osi \mathbf{e} in velikostjo kotne hitrosti $\omega = d\phi/dt$, torej z vektorjem kotne hitrosti $\boldsymbol{\omega} = \omega \mathbf{e}$. Hitrost vsake točke je zato mogoče zapisati kot

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}, \quad (4.22)$$

saj je relativni sistem vezan za togo telo in je člen relativne hitrosti nič.

4.2.1 Vrtilna količina in energija togega telesa

Vrtilno količino togega telesa lahko s pomočjo izraza za hitrost posamezne točke (4.22) zapišemo kot

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{l}_i = \sum_i m_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{v}_i) = \sum_i m_i \mathbf{r}_i \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i), \quad (4.23)$$

in

$$\mathbf{L} = \sum_i m_i [r_i^2 \boldsymbol{\omega} - (\mathbf{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \mathbf{r}_i] = \underline{J} \cdot \boldsymbol{\omega}, \quad (4.24)$$

kjer je \underline{J} tenzor vztrajnostnega momenta, ki predstavlja splošno linearno zvezo med dvema vektorjema, in je podan za sistem točkastih teles oz. za zvezno telo kot

$$J_{\alpha\beta} = \sum_i m_i [r_i^2 \delta_{\alpha\beta} - x_{\alpha i} x_{\beta i}] = \int dV \rho(\mathbf{r}) [r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta]. \quad (4.25)$$

Analogno lahko izrazimo tudi kinetično energijo togega telesa,

$$T = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_i) \cdot \mathbf{v}_i = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{L} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\omega} \cdot \underline{J} \cdot \boldsymbol{\omega}. \quad (4.26)$$

Lastne osi in vrednosti vztrajnostnega tenzorja

Vztrajnostni tenzor (4.25) je realen in simetričen. Zato je možno najti njegove lastne osi in vrednosti

$$\underline{J} \cdot \mathbf{e}_l = J_l \mathbf{e}_l, \quad (4.27)$$

kjer so lastne vrednosti J_l realne in pozitivne, in lastne osi \mathbf{e}_l med seboj pravokotne. Sama pozitivnost J_l ne sledi direktno iz oblike (4.25), ampak iz pozitivnosti kinetične energije, ki jo v lastnem sistemu zapišemo kot

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3 \quad \implies \quad T = \frac{1}{2} (J_1 \omega_1^2 + J_2 \omega_2^2 + J_3 \omega_3^2) > 0. \quad (4.28)$$

4.2.2 Enačbe gibanja togega telesa

Eden od pristopov k reševanju gibanja togega telesa (z eno fiksno točko) je zapis gibalnih enačb v lastnem sistemu vztrajnostnega momenta (drugi je preko Eulerjevih kotov, ki ga obravnavamo kasneje). Zakon o vrtilni količini zapišemo v lastnem koordinatnem sistemu

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \left(\frac{d\mathbf{L}}{dt} \right)_{rel} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \mathbf{M}, \quad (4.29)$$

kjer je

$$\underline{J} = \sum_l J_l \mathbf{e}_l \mathbf{e}_l \implies \mathbf{L} = \underline{J} \cdot \boldsymbol{\omega} = \sum_l J_l \omega_l \mathbf{e}_l. \quad (4.30)$$

Za togo telo je v lastnem sistemu časovno odvisen le ω ,

$$\left(\frac{d\mathbf{L}}{dt}\right)_{rel} = \sum_l J_l \dot{\omega}_l \mathbf{e}_l. \quad (4.31)$$

Z upoštevanjem vektorskega produkta

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{L} = \left((J_3 - J_2)\omega_2\omega_3, (J_1 - J_3)\omega_3\omega_1, (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 \right), \quad (4.32)$$

dobimo v lastnem sistemu **Eulerjeve enačbe**,

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - (J_2 - J_3)\omega_2\omega_3 &= M_1, \\ J_2 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1)\omega_3\omega_1 &= M_2, \\ J_3 \dot{\omega}_3 - (J_1 - J_2)\omega_1\omega_2 &= M_3. \end{aligned} \quad (4.33)$$

4.2.3 Prosto gibanje togega telesa

Poseben primer je gibanje togega telesa, če ni navora zunanjih sil ,

$$\mathbf{M} = 0 \implies \frac{d\mathbf{L}}{dt} = 0 \implies \mathbf{L}(t) = \mathbf{L}_0 = \text{konst.} \quad (4.34)$$

Čeprav je \mathbf{L} konstanten, gibanje telesa ni trivialno. Slednje je res le za **izotropno telo**, kjer je $J_l = J$ in (4.34) vodi k

$$J_l \dot{\omega}_l = J \dot{\omega}_l = 0 \implies \omega(t) = \omega_0, \quad (4.35)$$

torej je stalna tudi kotna hitrost.

Če telo ni izotropno, v splošnem kotna hitrost ni stalna. Vzemimo lažji primer osno simetričnega telesa, kjer je $J_1 = J_2 \neq J_3$. Iz Eulerjevih enačb sedaj sledi

$$J_3 \dot{\omega}_3 = 0 \implies \omega_3(t) = \omega_3 = \omega_0, \quad (4.36)$$

da je konstantna ena komponenta kotne hitrosti, in

$$\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 - (J_1 - J_3)\omega_2\omega_0 &= 0, \\ J_1 \dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1)\omega_1\omega_0 &= 0. \end{aligned} \quad (4.37)$$

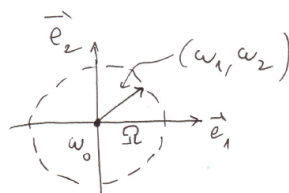
Odtod sledita sklopljeni linearni diferencialni enačbi

$$\dot{\omega}_1 = -\alpha\omega_2, \quad \dot{\omega}_2 = \alpha\omega_1, \quad \alpha = \frac{J_3 - J_1}{J_1}\omega_0 = \zeta\omega_0, \quad (4.38)$$

ki imata rešitev

$$\begin{aligned} \ddot{\omega}_1 = -\alpha^2 \omega_1 \quad \implies \quad \omega_1 &= \Omega \cos(\alpha t + \delta), \\ \omega_2 &= \Omega \sin(\alpha t + \delta). \end{aligned} \quad (4.39)$$

V lokalnem sistemu torej kotna hitrost ni stalna, ampak se glede na enačbo



(4.39) vrta enakomerno okrog osi 3, in sicer s kotno hitrostjo α in amplitudo Ω . Kaj predstavlja tako gibanje zunanjemu opazovalcu, torej v absolutnem koordinatnem sistemu? Ker je edina konstanta vrtilna količina (4.34), pomeni, da se kotna hitrost kot vektor vrta okrog \mathbf{L} in tako tudi celo togo telo.



Tresenje Zemlje

Zemlja obravnavamo lahko kot osno simetrično telo, rahlo sploščeno zaradi vrtenja okoli lastne osi, in sicer je sploščenost

$$\zeta = (J_3 - J_1)/J_1 \sim 0.00327. \quad (4.40)$$

Ker je $\omega_0 = 2\pi/T_0$ določen z dnevnim vrtenjem Zemlje, dobimo za frekvenco prostega vrtenja

$$\alpha = \frac{2\pi}{\tau} = \zeta \omega_0 \quad \implies \quad \tau = \frac{T_0}{\zeta} \sim 300 \text{ dni}. \quad (4.41)$$

Dejansko se tako gibanje opazi kot gibanje Zemljine osi, to je vrtenje Zemljinih polov. V geofiziki ima pojav ime Chandlerjevo tresenje (wobble). Sama amplituda odstopanja je majhna, $\phi_0 \sim 1''$ (ena ločna sekunda). Kot vsako lastno nihanje je tako gibanje tudi dušeno. Vendar prihaja do ponovnega vzbujanja, zato je gibanje neperiodično in deloma podobno tresenju. Kaj tako lastno nihanje vzbudi, ni čisto jasno. Vzrok so lahko premiki znotraj Zemlje, potresi, sklopitev z atmosfero itd. Dejansko opažena perioda $\tilde{\tau} \sim 420$ dni tudi precej odstopa od napovedi toge Zemlje, kar je možno razložiti s tem, da zaradi gibanje voda, elastičnih deformacij notranjosti ipd. Zemlja ni idealno tego telo.

4.3 Vpeta osno simetrična vrtavka

Obravnavamo gibanje vrtavke, ki je na spodnjem robu vpeta, in nanjo deluje sila teže. Osno simetrijo upoštevamo z $J_1 = J_2 \neq J_3$. Pri vrtavki je smiselno izraziti lego telesa z Eulerjevimi koti ϕ, θ, Ψ . Glede na definicijo posameznih kotov lahko predstavimo vektor kotne hitrosti kot vsoto posameznih prispevkov

$$\omega = \dot{\phi}\mathbf{e}_3 + \dot{\theta}\mathbf{e}_1'' + \dot{\Psi}\mathbf{e}_3'. \quad (4.42)$$

Ker želimo zapisati ω v lastnem koordinatnem sistemu, ki je tu končni sistem \mathbf{e}_l' , iz slike določimo projekcije

$$\begin{aligned} (\mathbf{e}_3)_{x'} &= \sin \theta \sin \Psi, & (\mathbf{e}_3)_{y'} &= \sin \theta \cos \Psi, & (\mathbf{e}_3)_{z'} &= \cos \theta, \\ (\mathbf{e}_1'')_{x'} &= \cos \Psi, & (\mathbf{e}_1'')_{y'} &= -\sin \Psi, & (\mathbf{e}_1'')_{z'} &= 0. \end{aligned} \quad (4.43)$$

Komponente ω se torej v lastnem sistemu \mathbf{e}_l' izrazijo

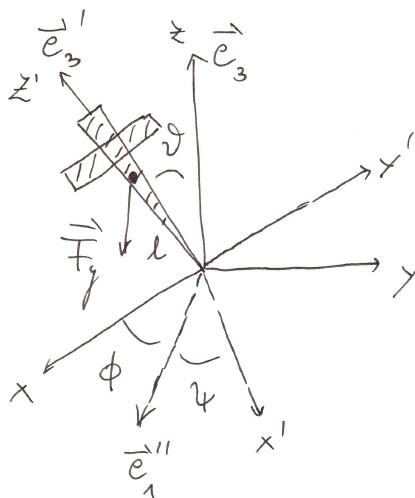
$$\begin{aligned} \omega_1 &= \sin \theta \sin \Psi \dot{\phi} + \cos \Psi \dot{\theta}, \\ \omega_2 &= \sin \theta \cos \Psi \dot{\phi} - \sin \Psi \dot{\theta}, \\ \omega_3 &= \cos \theta \dot{\phi} + \dot{\Psi}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

K reševanju gibanja vrtavke pristopimo z Lagrangeovim formalizmom. Kinetično in potencialno energijo zapišemo v lastnem sistemu osno simetrične vrtavke

$$T = \frac{J_1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \frac{J_3}{2}\omega_3^2, \quad V = Mgz_T = Mgl \cos \theta, \quad (4.45)$$

kjer je l oddaljenost težišča vrtavke od osi. Ko vstavimo tudi izraze (4.45), dobimo Lagrangeovo funkcijo

$$L = \frac{J_1}{2}(\sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{J_3}{2}(\dot{\Psi} + \cos \theta \dot{\phi})^2 - Mgl \cos \theta. \quad (4.46)$$



Ohranjene količine in Lagrangeova funkcija

Izraz (4.46) nakazuje več ohranjenih količin. Ker L ne vsebuje Ψ niti ϕ , sta ta kota ciklični koordinati in sta ustrezna impulza p_Ψ in p_ϕ ohranjena,

$$p_\Psi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Psi}} = J_3(\dot{\Psi} + \cos \theta \dot{\phi}) = J_3 \omega_3 = J_1 a, \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned} p_\phi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = J_1 \sin^2 \theta \dot{\phi} + J_3 \cos \theta (\dot{\Psi} + \cos \theta \dot{\phi}) = \\ &= (J_1 \sin^2 \theta + J_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + J_3 \cos \theta \dot{\Psi} = J_1 b, \end{aligned} \quad (4.48)$$

kjer smo vpeljali količini a, b , ki se bosta izkazali koristni kasneje. Tretja ohranjena količina je celotna energija, ki tudi sledi iz izraza (4.46),

$$E = T + V = \frac{J_1}{2}(\sin^2 \theta \dot{\phi}^2 + \dot{\theta}^2) + \frac{J_3}{2}(\dot{\Psi} + \cos \theta \dot{\phi})^2 + Mgl \cos \theta. \quad (4.49)$$

S pomočjo ohranjenih količin (4.47), (4.48) lahko izrazimo odvode $\dot{\Psi}, \dot{\phi}$,

$$J_3 \dot{\Psi} = J_1 a - J_3 \cos \theta \dot{\phi}, \quad (4.50)$$

in

$$\begin{aligned} (J_1 \sin^2 \theta + J_3 \cos^2 \theta) \dot{\phi} + J_1 a \cos \theta - J_3 \cos^2 \theta \dot{\phi} &= J_1 b, \\ \implies \dot{\phi} &= (b - a \cos \theta) / \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Ko to vstavimo v enačbo za energijo (4.49) in odštejemo del, ki je konstanten, dobimo

$$\begin{aligned}\tilde{E} = E - \frac{J_3}{2}\omega_3^2 &= \frac{J_1}{2}\left(\dot{\theta}^2 + \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta}\right) + Mgl \cos \theta = \\ &= \frac{J_1}{2}\dot{\theta}^2 + \tilde{V}(\theta),\end{aligned}\quad (4.52)$$

kjer je $\tilde{V}(\theta)$ efektivna potencialna energija vrtavke

$$\tilde{V}(\theta) = \frac{J_1}{2} \frac{(b - a \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} + Mgl \cos \theta. \quad (4.53)$$

Rešitev v obliki integrala

Reševanje gibalnih enačb lahko torej reduciramo na reševanje integrala za $\theta(t)$,

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2}{J_1}(\tilde{E} - \tilde{V}(\theta)) \quad \implies \quad t = \pm \sqrt{\frac{J_1}{2}} \int \frac{d\theta}{\sqrt{\tilde{E} - \tilde{V}(\theta)}}, \quad (4.54)$$

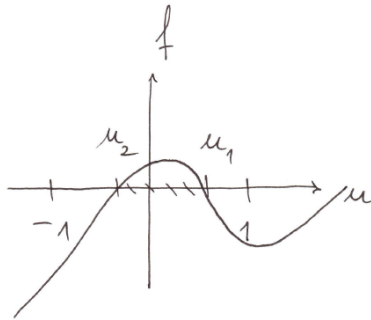
Integral lepše izrazimo v novi spremenljivki $u = \cos \theta$, $du = -\sin \theta d\theta$,

$$t = \pm \int \frac{du}{\sqrt{f(u)}}, \quad f(u) = (1 - u^2)(\alpha - \beta u) - (b - au)^2, \quad (4.55)$$

kjer smo vpeljali konstanti

$$\alpha = \frac{2\tilde{E}}{J_1}, \quad \beta = \frac{2Mgl}{J_1}. \quad (4.56)$$

Funkcija $f(u)$ (4.55) je polinom tretje stopnje v u in integrala ni možno v



splošnem izvesti analitično. Lahko pa ugotovimo nekatere lastnosti gibanja pri različnih parametrih a, b, α, β . Zanima nas najprej območje gibanja, ki je pogojeno z zahtevo po realnosti v (4.55), torej na območje $f(u) > 0$. Ker je $f(u)$ polinom, se za večje argumente $|u|$ vede kot

$$f(u \rightarrow \pm\infty) \sim \beta u^3. \quad (4.57)$$

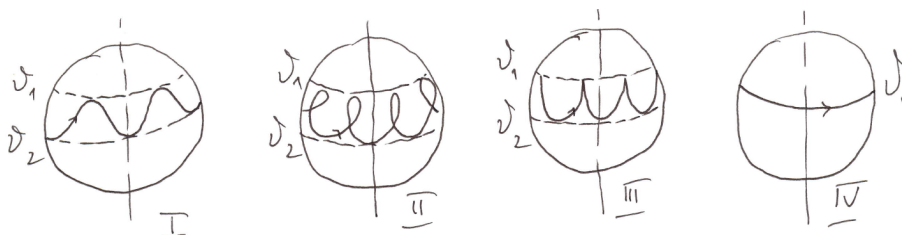
Najbolj pomembno je obnašanje na fizikalnem območju $|u| < 1$, kjer iz

$$f(u = \pm 1) = -(b \mp a)^2 < 0, \quad (4.58)$$

ugotovimo, da je fizikalno le območje $f(u_1 < u < u_2) > 0$, kjer sta $|u_1|, |u_2| < 1$. Ni nujno, da tako območje tudi obstaja pri vseh parametrih, vendar sama vrtavka zagotavlja, da neka fizikalna rešitev mora obstajati.

Možna gibanja

Na tej stopnji postane jasno poimenovanje Eulerjevih kotov z gibanjem vrtavke. $\Psi(t)$ predstavlja vrtenje vrtavke okoli lastne osi, $\phi(t)$ precesijo osi vrtavke (okoli prvotne z osi), in $\theta(t)$ nutacijo (t.j. nihanje nagiba) osi vrtavke.



Konkretno gibanje vrtavke je odvisno od parametrov vrtavke β , energije \tilde{E} oz. α , in začetnih pogojev zajetih z a, b oz. u_1, u_2 . Kot rezultat vrtavka v splošnem niha (nutira) med dva nagiba $\theta_1 < \theta_2$ oz. ustreznima $u_1 > u_2$. Kot kaže skica, je lahko pri danih u_1, u_2 hitrost vrtenja $\dot{\phi}(t)$ stalno istega predznaka (primer I), lahko pa menja predznak med nutacijo (primer II). Mejni primer III, kjer je $\dot{\phi} \geq 0$ in v začetku $\dot{\phi}(0) = 0$, ustreza spuščeni vrtavki, ki ga bomo obravnavali podrobneje. Poseben primer je regularna precesija (primer IV), kjer ni nutacije $\theta(t) = \theta_0$, in vrtavka enakomerno precedira z $\dot{\phi}(t) = \omega_{pr}$.

4.3.1 Spuščena hitra vrtavka

Obravnavajmo realističen primer, ko najprej držimo fiksno os vrteče vrtavke in jo hipoma spustimo. Tak primer ustreza začetnima pogojema $\dot{\phi}(t = 0) =$

$\dot{\theta}(t=0) = 0$, torej začetnima ničelnima hitrostma precesije in nutacije. Iz pogojev in enačbe (4.51) sledi

$$\dot{\phi}(t=0) = 0 \implies b - a \cos \theta_1 \implies b = au_1, \quad (4.59)$$

in analogno iz (4.52)

$$\dot{\theta}(t=0) = 0 \implies \tilde{E} = Mgl \cos \theta_1 \implies \alpha - \beta u_1 = 0. \quad (4.60)$$

Parametre α, b vnesemo v enačbo (4.55) in iščemo spodnjo mejno vrednost $u_2 = \cos \theta_2$

$$\begin{aligned} f(u) &= \beta(1 - u^2)(u_1 - u) - a^2(u_1 - u)^2 = \\ &= (u_1 - u)[\beta(1 - u^2) - a^2(u_1 - u)] = 0 \implies u_2. \end{aligned} \quad (4.61)$$

Rešitev za u_2 sledi iz kvadratne enačbe. Posebej enostaven je za primer **hitre vrtavke**, pri kateri je začetna kinetična energija veliko večja od potencialne,

$$\frac{a^2}{\beta} = \left(\frac{J_3 \omega_3}{J_1} \right)^2 \frac{J_1}{2Mgl} = \frac{J_3}{J_1} \frac{J_3 \omega_3^2}{2Mgl} \gg 1. \quad (4.62)$$

Pri taki vrtavki je razpon nutacije majhen, saj sledi iz enačbe (4.61),

$$x = u_1 - u_2 = \frac{\beta(1 - u_2^2)}{a^2} \sim \frac{\beta}{a^2}(1 - \bar{u}^2) \ll 1. \quad (4.63)$$

V istem približku lahko eksplicitno izračunamo časovno odvisnost nutacije, saj velja

$$f(u) \sim a^2(u_1 - u)(u - u_2). \quad (4.64)$$

Rešitev integrala (4.55) zapišemo v obliki,

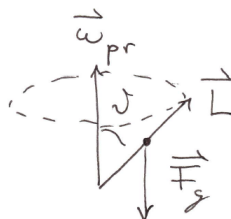
$$u = \bar{u} + \frac{x_1}{2} \cos at, \quad a = \frac{J_3}{J_1} \omega_3, \quad (4.65)$$

kjer je $\bar{u} = (u_1 + u_2)/2$ in a frekvenca nutacije. Za časovno odvisnost hitrosti precesije sledi

$$\dot{\phi} = \frac{b - au}{\sin^2 \bar{\theta}} = \frac{a(u_1 - u)}{\sin^2 \bar{\theta}} = \frac{a}{\sin^2 \bar{\theta}} \frac{x_1}{2} (1 - \cos at). \quad (4.66)$$

Sama hitrost precesije niha, pri čemer za povprečna vrednost sledi iz (4.63),

$$\omega_{pr} = \bar{\dot{\phi}} = \frac{ax_1}{2 \sin^2 \bar{\theta}} = \frac{\beta}{2a} = \frac{Mgl}{J_3 \omega_3}. \quad (4.67)$$



Rezultat za precesijo hitre vrtavke lahko dobimo tudi s poenostavljenim pristopom, kot je običajen v osnovnih predavanjih fizike. Privzemimo, da je vsa vrtilna količina v vrtenju okoli lastne osi, torej $\Gamma = J_3\omega_3$. Ker deluje na vrtavko navor teže, to vodi preko zakona o vrtilni količini do precesije,

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma}{dt} = \omega_{pr} \times \Gamma = \mathbf{M} &\implies \omega_{pr}\Gamma \sin\theta = Mgl \sin\theta \\ &\implies \omega_{pr} = \frac{Mgl}{J_3\omega_3}. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Ne preseneča, da je rezultat isti. Bolj je poučna ugotovitev, koliko poenostavitvev je skritih v pristopu in rezultatu (4.68).

Poglavje 5

Majhna nihanja

Harmonična nihanja okoli ravnovesnih (stabilnih) leg in rešitev so zelo pogost pojav v fiziki. So tudi pomemben koncept pri prehodu k kvantnem popisu, torej pri kvantizaciji stanj.

Obravnavajmo konzervativni sistem z $q_i, i = 1, n$ prostostnimi stopnjami. Omejimo se na sisteme, kjer kinetično energijo in Lagrangeovo funkcijo zapišemo kot

$$L = T - V = \frac{1}{2} \sum_{i,j} w_{ij}(\underline{q}) \dot{q}_i \dot{q}_j - V, \quad (5.1)$$

kjer je $w_{ij} = w_{ji}$ in je ohranjena celotna energija, kot sledi iz (2.68), (2.70)

$$E = \sum_j \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \dot{q}_j - L = T + V. \quad (5.2)$$

5.1 Razvoj okrog stacionarnega stanja

Vzemimo, da obstaja stacionarna rešitev Lagrangeovih enačb, $q_i(t) = q_i^0$. Pogoji sledi iz (5.1),

$$\left. \frac{\partial L}{\partial q_i} \right|_{\underline{q}^0} = - \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{\underline{q}^0} = 0, \quad \underline{q}^0 = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0). \quad (5.3)$$

Stacionarna stanja so lahko stabilna, nestabilna ali metastabilna. Za **absolutno stabilno stanje** je pogoj

$$V(\underline{q}) > V(\underline{q}^0), \quad (5.4)$$

torej absolutni minimum potencialne energije. Za stabilnost majhnih nihanj zadošča **lokalna stabilnost**, kjer je pogoj (5.4) izpolnjen v dovolj majhni okolici stacionarne rešitve \underline{q}^0 .

Predpostavimo, da je $V(\underline{q})$ analitična funkcija koordinat in jo lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli ravnovesja

$$V(\underline{q}) = V(\underline{q}^0) + \sum_i \left. \frac{\partial V}{\partial q_i} \right|_{\underline{q}^0} \eta_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\underline{q}^0} \eta_i \eta_j + \dots, \quad (5.5)$$

kjer je $\eta_i = q_i - q_i^0$. Linearni člen v razvoju (5.5) odpade zaradi pogoja stacionarnosti (5.3). Pogoj lokalne stabilnosti se torej prevede na zahtevo

$$\frac{1}{2} \sum_{i,j} \left. \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \right|_{\underline{q}^0} \eta_i \eta_j = \frac{1}{2} \sum_{i,j} V_{ij} \eta_i \eta_j > 0, \quad (5.6)$$

za vse η_i, η_j . Matrika, ki zadošča takemu pogoju, je pozitivno definitna.

Zanimajo nas majhna nihanja okoli ravnovesne rešitve. Najnižji netrivialni členi v odmikih $\eta_i, \dot{\eta}_i$ v (5.1) so bilinearni, zato lahko poenostavimo

$$w_{ij}(\underline{q}) = w_{ij}(\underline{q}_0) = T_{ij}, \quad (5.7)$$

in za Lagrangeovo funkcijo sledi

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} (T_{ij} \dot{\eta}_i \dot{\eta}_j - V_{ij} \eta_i \eta_j), \quad L = \tilde{L} - V^0, \quad (5.8)$$

kjer je $V^0 = V(\underline{q}^0)$. Lagrangeove dinamične enačbe za spremenljivke η_i se v takem primeru zapišejo

$$\sum_j T_{ij} \ddot{\eta}_j + \sum_j V_{ij} \eta_j = 0, \quad (5.9)$$

kar je sistem linearnih homogenih diferencialnih enačb 2.reda za $\eta_j(t)$.

5.2 Lastna nihanja

Osnovne rešitve dinamičnih enačb (5.9) so lastna nihanja, torej harmonično gibanje vseh $\eta_i(t)$ z isto frekvenco, kar popisuje nastavek

$$\eta_i(t) = \alpha a_i e^{i\omega t}, \quad (5.10)$$

kjer α predstavlja velikost (amplitudo) nihanja, relativni (in normirani) odmiki a_i in ω pa so povezani z

$$\sum_j V_{ij} a_j - \omega^2 \sum_j T_{ij} a_j = 0 \quad \implies \quad \underline{\underline{V}} \underline{\underline{a}} = \omega^2 \underline{\underline{T}} \underline{\underline{a}}. \quad (5.11)$$

Reševanje problema lastnih nihanj se prevede na iskanje lastnih vrednosti $\lambda = \omega^2$ in ustreznih lastnih vektorjev \underline{a} enačbe (5.11) oz. na posplošeno diagonalizacijo matrik \underline{V} , \underline{T} . Simetričnost matrik zagotavlja realnost lastnih vrednosti λ_k , $k = 1, n$, pozitivna definitnost matrik pa tudi $\lambda_k = \omega_k^2 > 0$, torej obstoj stabilnih nedušenih nihanj z realnimi ω_k .

Ponovimo nekatere ugotovitve linearne analize za problem lastnih vrednosti in vektorjev matrik. Vzamemo bolj domač primer, ko je matrika $\underline{T} = T\underline{I}$ izotropna, t.j. diagonalna z enakimi elementi. Takrat se reševanje prevede na običajno diagonalizacijo, t.j. iskanje lastnih vrednosti matrike \underline{V} ,

$$(\underline{V} - \lambda\underline{T})\underline{a} = 0 \quad \Longrightarrow \quad |\underline{V} - \lambda T\underline{I}| = 0, \quad (5.12)$$

in pri zahtevi za neničelen lastni vektor \underline{a} na gornji pogoj za determinanto.

Če označimo lastne vrednosti $\tilde{\lambda}_k = T\lambda_k$, dobimo pogoj za lastne vektorje \underline{a}_k (stolpec) in transponirane lastne vektorje \underline{a}_l^T (vrstica),

$$(\underline{V} - \tilde{\lambda}_k)\underline{a}_k = \underline{V}\underline{a}_k - \underline{a}_k\tilde{\lambda}_k = 0, \quad \underline{a}_l^T(\underline{V} - \tilde{\lambda}_l) = 0. \quad (5.13)$$

Odtod sledi z enostavnim množenjem (prvega izraza z leve z \underline{a}_l^T in drugega za desne z \underline{a}_k in odštetjem obeh, da morajo biti pri različnih lastnih vrednostih lastni vektorji ortogonalni (in normirani), to je

$$\tilde{\lambda}_k \neq \tilde{\lambda}_l \quad \Longrightarrow \quad \underline{a}_l^T \cdot \underline{a}_k = \delta_{lk}. \quad (5.14)$$

Pogoj ortogonalnosti sicer ni potreben za primere degeneriranih lastnih vrednosti $\tilde{\lambda}_k = \tilde{\lambda}_l$, vendar je možno in ugodno tudi takrat izbrati lastne vektorje ortonormirane v skladu z (5.14). Lastne vektorje lahko zložimo v matriko

$$\underline{A} = [\underline{a}_1, \dots, \underline{a}_n] = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{n1} \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{1n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \quad (5.15)$$

Podobno lahko definiramo tudi transponirano matriko \underline{A}^T . Iz lastnosti (5.13) za lastne vrednosti in vektorje lahko zapišemo matrično enačbo,

$$\underline{A}^T \underline{V} \underline{A} - \underline{A}^T \underline{A} \tilde{\Lambda} = 0, \quad (5.16)$$

kjer je $\tilde{\Lambda}$ diagonalna matrika z diagonalnimi elementi enakim lastnim vrednostim $\tilde{\Lambda}_{ll} = \tilde{\lambda}_l$. Matrika je tudi unitarna, kar sledi iz ortonormiranosti lastnih vektorjev (5.14),

$$\underline{A}^T \underline{A} = \underline{I} \quad \Longrightarrow \quad \underline{A}^T = \underline{A}^{-1}, \quad (5.17)$$

Zveza (5.16) torej pomeni, da predstavlja $\underline{\underline{A}}$ transformacijsko matriko, ki transformira matriko $\underline{\underline{V}}$ v diagonalno obliko $\underline{\underline{\Lambda}}$,

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{V}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{V}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^{-1} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{\Lambda}}. \quad (5.18)$$

Podobno lahko obravnavamo posplošen problem lastnih vrednosti (5.11),

$$\underline{\underline{V}} \underline{\underline{a}} = \lambda \underline{\underline{T}} \underline{\underline{a}}. \quad (5.19)$$

Ker sta matriki $\underline{\underline{V}}$ in $\underline{\underline{T}}$ realni in simetrični, so realne tudi lastne vrednosti λ in vektorji $\underline{\underline{a}}$. Podobno kot prej lahko zapišemo za lastne vektorje in njihove transponiranke,

$$\underline{\underline{V}} \underline{\underline{a}}_k = \lambda_k \underline{\underline{T}} \underline{\underline{a}}_k, \quad \underline{\underline{a}}_l^T \underline{\underline{V}} = \lambda_l \underline{\underline{a}}_l^T \underline{\underline{T}}. \quad (5.20)$$

Množenje prvega izraza z $\underline{\underline{a}}_l^T$ in drugega z $\underline{\underline{a}}_k$ vodi do enačbe

$$0 = (\lambda_l - \lambda_k) \underline{\underline{a}}_l^T \underline{\underline{T}} \underline{\underline{a}}_k, \quad (5.21)$$

in odtod sledi posplošena ortogonalnost lastnih vektorjev

$$\lambda_k \neq \lambda_l \implies \underline{\underline{a}}_l^T \underline{\underline{T}} \underline{\underline{a}}_k = 0. \quad (5.22)$$

Tudi če je $\lambda_k = \lambda_l$, vendar $k \neq l$, lahko izberemo vektorje tako, da bodo ortogonalni v smislu enačbe (5.22). Sami diagonalni členi pa morajo biti zaradi pozitivne definitnosti kinetične energije T neničelni in pozitivni. Zato lahko izberemo tudi

$$\underline{\underline{a}}_k^T \underline{\underline{T}} \underline{\underline{a}}_k = 1. \quad (5.23)$$

Posledica zahteve (5.22) in izbire (5.23) je, da matrika lastnih vektorjev $\underline{\underline{A}}$ transformira matriko kinetične energije v enotsko matriko,

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{T}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{I}}. \quad (5.24)$$

Analogno kot smo izpeljali zvezo (5.18), sedaj sledimo korakom za posplošen problem. Enačbo (5.20) za vse lastne vektorje združimo v matrično enačbo, upoštevajoč, da je matrika lastnih vrednostih $\underline{\underline{\Lambda}}$ diagonalna z $\Lambda_{ll} = \lambda_l$,

$$\underline{\underline{V}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{T}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\Lambda}}. \quad (5.25)$$

Množenje z adjungirano matriko nam končno da s pomočjo zveze (5.24),

$$\underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{V}} \underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T \underline{\underline{T}} \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{\Lambda}}. \quad (5.26)$$

Matrika lastnih vektorjev torej tudi v posplošenem primeru transformira matriko $\underline{\underline{V}}$ v lastni sistem z diagonalno matriko lastnih vrednosti $\underline{\underline{\Lambda}}$, hkrati pa tudi kinetično energijo v enotsko matriko.

Primer: torzijsko sklopljeni težni nihali

Vzemimo primer dveh nihali, ki nihata pravokotno na skupno os, ki deluje hkrati kot torzijska sklopitev (glej skico).

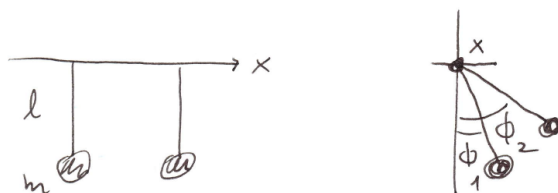
Za enaki nihali lahko zapišemo Lagrangeovo funkcijo kot

$$L = \frac{J}{2}(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) + mgl(\cos \phi_1 + \cos \phi_2) - \frac{D}{2}(\phi_1 - \phi_2)^2, \quad (5.27)$$

kjer je zadnji (potencialni) člen torzijska sklopitev preko skupne osi. V primeru, ko je ravnovesna rešitev $\phi_1^0 = \phi_2^0 = 0$ (kar ni res pri vseh parametrih), potem dobimo za majhna nihanja poenostavljeno Lagrangeovo funkcijo,

$$\tilde{L} = \frac{J}{2}(\dot{\phi}_1^2 + \dot{\phi}_2^2) - \frac{mgl}{2}(\phi_1^2 + \phi_2^2) - \frac{D}{2}(\phi_1 - \phi_2)^2, \quad (5.28)$$

katere rešitev so harmonična (sklopljena) lastna nihanja oz. poljubna njihova vsota.



5.3 Normalne koordinate

Lastna nihanja predstavljajo posebne rešitve gibalnih enačb (5.9), splošno rešitev gibalnih enačb pa zapišemo kot vsoto lastnih nihanj. Temu ustrezno je pripravno uvesti nove t.im. normalne koordinate, ki nadomestijo odmike η_i z amplitudami lastnih nihanj α_k . Uvedemo transformacijo

$$\eta_i(t) = \sum_k \alpha_k(t) a_{ki} = \sum_k a_{ki} \alpha_k(t), \quad (5.29)$$

kjer so a_{ki} komponente lastnega vektorja, ki pripada lastni vrednosti $\tilde{\lambda}_k$, in hkrati elementi matrike $\underline{\underline{A}}$ (5.15). Torej lahko zapišemo transformacijo kot

$$\underline{\underline{\eta}} = \underline{\underline{A}} \underline{\underline{\alpha}}, \quad \underline{\underline{\eta}}^T = \underline{\underline{\alpha}}^T \underline{\underline{A}}^T. \quad (5.30)$$

Namen normalnih koordinat je, da z njimi enostavno zapišemo celotno Lagrangeovo funkcijo harmoničnih nihanj. Transformirajmo \tilde{L} (5.8) v nove koordinate, pri čemer upoštevamo izbiro (5.24),

$$\begin{aligned}\tilde{L} &= \frac{1}{2}\dot{\underline{\eta}}^T \underline{T} \dot{\underline{\eta}} - \frac{1}{2}\underline{\eta}^T \underline{V} \underline{\eta} = \frac{1}{2}\dot{\underline{\alpha}}^T \underline{A}^T \underline{T} \underline{A} \dot{\underline{\alpha}} - \frac{1}{2}\underline{\alpha}^T \underline{A}^T \underline{V} \underline{A} \underline{\alpha} = \\ &= \frac{1}{2}\dot{\underline{\alpha}}^T \underline{\alpha} - \frac{1}{2}\underline{\alpha}^T \underline{\Lambda} \underline{\alpha}.\end{aligned}\quad (5.31)$$

Eksplicitno lahko končno zapišemo

$$\tilde{L} = \frac{1}{2} \sum_k (\dot{\alpha}_k^2 - \omega_k^2 \alpha_k^2), \quad (5.32)$$

kjer je za vsako normalno koordinato časovna odvisnost podana z lastnim nihanjem

$$\alpha_k(t) = \alpha_{k0} \cos(\omega_k t + \delta). \quad (5.33)$$

Lagrangeova funkcija je torej vsota $k = 1, n$ neodvisnih harmoničnih oscilatorjev (v splošnem) različnih frekvenc ω_k , kjer so ustrezne amplitude normalne koordinate α_k . Tak prikaz Lagrangeove funkcije je posebej koristen, če želimo posplošiti klasično mehaniko sistema nihajočih delcev v kvantno mehaniko in je pri tem dobro znan le predpis za kvantizacijo neodvisnih oscilatorjev.

Poglavje 6

Hamiltonova mehanika

Doslej smo obravnavali Lagrangeovo mehaniko, kjer je izhodišče za konzervativne sisteme (sisteme s konzervativnimi silami) Lagrangeova funkcija $L(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, t)$ kot funkcija generaliziranih koordinat \underline{q} , njihovih odvodov $\underline{\dot{q}}$ in (v splošnem) časa t . Osnovne gibalne enačbe so Lagrangeove enačbe (2.44), ki v končni obliki predstavljajo v splošnem sistem sklopljenih diferencialnih enačb 2. reda. V kolikor ne gre analitično, te lahko rešujemo numerično pri danih začetnih pogojih $\underline{q}(t_0) = \underline{q}^0, \underline{\dot{q}}(t_0) = \underline{w}^0$.

Irski fizik, astronom in matematik William Rowan Hamilton (1805 - 65) je uvedel alternativno formulacijo analitične mehanike, kjer hitrosti \dot{q}_i nadomestijo posplošeni impulzi,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad \frac{dp}{dt} = \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i}, \quad (6.1)$$

kjer je druga zveza sledi iz Lagrangeovih enačb (2.44). V Hamiltonovi mehaniki torej nastopajo nove kanonične (konjugirane) spremenljivke

$$(\underline{q}, \underline{\dot{q}}) \longrightarrow (\underline{q}, \underline{p}). \quad (6.2)$$

Nova formulacija večinoma nima prednosti pri reševanju konkretnih primerov gibanja sistemov več teles. Je pa Hamiltonova mehanika zelo pomembna osnova za posplošitve zlasti v dveh smereh:

- a) V **klasični statistični fiziki** je koncept faznega prostora vezan na kanonične spremenljivke $(\underline{q}, \underline{p})$.
- b) Prehod v **kvantno mehaniko** poteka z zamenjavo (determinističnih) vrednosti impulzov z operatorji $p_i \rightarrow \hat{p}_i$ (kanonična kvantizacija) oz. nedoločnostnimi (Heisenbergovimi) relacijami med konjugiranimi (q_i, p_i) .

6.1 Legendreova transformacija

Obravnavajmo primer funkcije dveh spremenljivk $f(x, y)$, kjer je diferencial funkcije podan z

$$df = udx + vdy, \quad u = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (6.3)$$

Želimo preiti na novi spremenljivki, ki naj bo par (x, v) . Splošni predpis nam nudi t.im Legendreova transformacija. Izberemo kot novo funkcijo g ,

$$g = f - vy, \quad (6.4)$$

Diferencial funkcije bo po transformaciji povezan le z diferenciali novih spremenljivk (x, v) , kar zlahka dokažemo,

$$dg = df - ydv - vdy = udx + vdy - ydv - vdy = udx - ydv. \quad (6.5)$$

Torej je nova funkcija odvisna od novega para, to je $g(x, v)$, kjer je

$$u = \frac{\partial g}{\partial x}, \quad y = -\frac{\partial g}{\partial v}. \quad (6.6)$$

Primeri uporabe Legendreovih transformacij so znani iz termodinamike pri definiciji možnih termodinamskih količin, ki so funkcije stanja. Notranja energija je npr. funkcija entropije in volumna $E(S, V)$, kjer je diferencial podan z

$$dE = TdS - pdV. \quad (6.7)$$

Vendar je možno in za določene primere ugodneje definirati in uporabiti entalpijo $H(S, p)$,

$$H = E + pV, \quad dH = TdS + Vdp \quad (6.8)$$

oz. Gibbsovo prosto energijo $F(T, p)$

$$F = H - TS, \quad dF = -SdT + Vdp. \quad (6.9)$$

Slednja je posebej koristna, ko imamo opraviti s sistemi, kjer so podani (zunanji) termodinamski parametri temperatura T in tlak p .

6.2 Hamiltonove gibalne enačbe

Hamiltonova funkcija je definirana enako kot posplošena energija (2.66), le da je izražena s kanoničnimi spremenljivkami,

$$H = H(\underline{q}, \underline{p}, t) = \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i - L = \sum_i p_i \dot{q}_i - L, \quad (6.10)$$

in predstavlja hkrati primer Legendrove transformacije iz starega nabora spremenljivk in funkcij $(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, L)$ v novo kombinacijo $(\underline{q}, \underline{p}, H)$. To je razvidno, če izpišemo diferencial funkcije H ,

$$\begin{aligned} dH &= \sum d(p_i \dot{q}_i) - dL = \\ &= \sum_i (\dot{q}_i dp_i + p_i d\dot{q}_i) - \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i \right) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Z upoštevanjem definicije za p_i in \dot{p}_i (6.1) dobimo

$$dH = \sum_i (\dot{q}_i dp_i - \dot{p}_i dq_i) - \frac{\partial L}{\partial t} dt. \quad (6.12)$$

Odtod sledijo kanonične enačbe Hamiltonove mehanike

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial H}{\partial t} = -\frac{\partial L}{\partial t}. \quad (6.13)$$

Iz dinamičnih enačb direktno sledi

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \dot{q}_i + \sum_i \frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i = \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (6.14)$$

da je Hamiltonova funkcija konstanta gibanja, v kolikor ni eksplicitno odvisna od t , in predstavlja mehansko energijo, kot smo ugotovili že prej.

Hamiltonove gibalne enačbe (6.13) predstavljajo sistem $2n$ sklopljenih diferencialnih enačb prvega reda, ki jih lahko rešujemo tudi numerično pri danih začetnih pogojih $\underline{q}(t_0) = \underline{q}^0$ in $\underline{p}(t_0) = \underline{p}^0$. Rešitev je časovna odvisnost $\underline{q}(t), \underline{p}(t)$, kar predstavlja trajektorijo v faznem prostoru $(\underline{q}, \underline{p})$. Rešitve se seveda ne razlikujejo od rešitev Lagrangeovih dinamičnih enačb.

Ima pa Hamiltonova formulacija nekaj prednosti pred Lagrangeovo. Hamiltonova funkcija H je konstanta gibanja, če ni eksplicitno odvisna od časa in predstavlja energijo sistema. V enačbah (6.13) spremenljivki \underline{q} in \underline{p} nastopata (anti)simetrično in sta si zato v polnem pomenu konjugirani. To je tudi razlog, da je Hamiltonov formalizem primernejši za nekatere posplošitve: v teoriji kanoničnih transformacij in teoriji Hamiltona in Jacobija, za uporabo v definiciji faznega prostora v statistični fiziki, ter za prehod v kvantno mehansko obravnavo.

6.3 Primeri Hamiltonskih sistemov

6.3.1 Masa na vzmeti

Masa m niha na vzmeti s koeficientom k . Če odmik od ravnovesja označimo z x , je Lagrangeova funkcija

$$L = T - V = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - \frac{k}{2}x^2. \quad (6.15)$$

Generaliziran impulz je

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \quad (6.16)$$

torej je v tem primeru (običajna) gibalna količina in je Hamiltonova funkcija izražena s koordinatama (x, p) ,

$$H = p\dot{x} - L = T + V = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}. \quad (6.17)$$

6.3.2 Gibanje delca v centralnem potencialu

Ker že vemo, da je gibanje delca v centralnem potencialu ravninsko, ga opišemo le z dvema koordinatama (r, ϕ) in Lagrangeovo funkcijo

$$L = \frac{m}{2}v^2 - V(r) = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2) - V(r). \quad (6.18)$$

Ustrezna impulza sta

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}, \quad p_\phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = mr^2\dot{\phi}, \quad (6.19)$$

kjer predstavlja p_ϕ vrtilno količino sistema. Hamiltonovo funkcijo v novih spremenljivkah izrazimo kot

$$H = p_r\dot{r} + p_\phi\dot{\phi} - L = T + V = \frac{p_r^2}{2m} + \frac{p_\phi^2}{2mr^2} + V(r). \quad (6.20)$$

6.3.3 Nabit delec v električnem in magnetnem polju

Netrivialen je primer izpeljave Lagrangeove in Hamiltonove funkcije za delec, ki se giblje v zunanem električnem in magnetnem polju. Je pa hkrati zelo pomemben, saj je osnova za obravnavo sklopitve med delci in elektromagnetnim poljem v kvantni mehaniki. Klasično izhodišče je Lorentzova sila na delec v električnem in magnetnem polju,

$$\mathbf{F} = e(\mathcal{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (6.21)$$

kjer so polja v splošnem lahko odvisna od kraja in časa, torej $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$. Njihovo odvisnost povezujejo Maxwellove enačbe,

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathcal{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, & \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0.\end{aligned}\quad (6.22)$$

Ker Lorentzova sila vsebuje hitrost \mathbf{v} , ni možna standardna vpeljava potencialne energije in posledično Lagrangeove funkcije. Korak naprej lahko naredimo z uvedbo dveh potencialov: vektorskega (magnetnega) $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ in skalarne (električnega) $\Phi(\mathbf{r}, t)$,

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}, \quad (6.23)$$

kar omogoča četrta Maxwellova enačba (6.22). In prve enačbe potem sledi

$$\nabla \times \mathcal{E} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla \times \left(\mathcal{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = 0. \quad (6.24)$$

Vektorsko polje, katerega rotor je nič, vedno lahko izrazimo kot gradient skalarne polja, torej

$$\mathcal{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \Phi. \quad (6.25)$$

Lorentzovo silo (6.21) sedaj izrazimo s potenciali (6.23), (6.25),

$$\mathbf{F} = e \left[-\nabla \Phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) \right]. \quad (6.26)$$

Izraz poenostavimo in predelamo z upoštevanjem izrazov, znanih iz diferencialnega vektorskega računa. Prvi velja za splošno vektorsko polje $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, vendar konstanten vektor \mathbf{v} , ki je trenutna hitrost delca,

$$\mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}, \quad (6.27)$$

pri čemer je drugi člen t.im. odvod v predpisani smeri (v smeri \mathbf{v}). Izraz lahko preverimo z direktnim izračunom v komponentah in primerjavo obeh strani, npr. za komponento x izraza (6.27),

$$\begin{aligned}& v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) - v_z \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) =? \\ ? &= \frac{\partial}{\partial x} (v_x A_x + v_y A_y + v_z A_z) - v_x \frac{\partial A_x}{\partial x} - v_y \frac{\partial A_x}{\partial y} - v_z \frac{\partial A_x}{\partial z},\end{aligned}\quad (6.28)$$

kar očitno drži. Drug poseg je vpeljava totalnega (substancialnega) odvoda,

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{A}, \quad (6.29)$$

ki predstavlja časovni odvod potenciala, kot ga čuti gibajoč delec. S pomočjo zvez (6.27) in (6.29) silo končno zapišemo

$$\mathbf{F} = e \left[-\nabla\Phi - \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}) \right]. \quad (6.30)$$

Izraz (6.30) ima sedaj obliko, ki je uporabna za vpeljavo potencialne energije, posplošene na primer, kjer ni odvisna samo od lege \mathbf{r} , ampak tudi od hitrosti \mathbf{v} . Če ima sila obliko,

$$\mathbf{F} = -\frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{\mathbf{r}}} \right), \quad (6.31)$$

kjer je potencialna energija $V(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$, potem lahko ponovno definiramo Lagrangeovo funkcijo $L = T - V$. Izraz (6.30) zadošča temu pogoju, če vpeljemo

$$V = e(\Phi - \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}), \quad (6.32)$$

saj lahko za drugi člen v(6.31) preverimo, npr. za komponento x ,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}} \right) = -e \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(\dot{x}A_x)}{\partial \dot{x}} \right) = -e \frac{d}{dt} A_x = -e \frac{d\mathbf{A}}{dt} \Big|_x. \quad (6.33)$$

Končni izraz za Lagrangeovo funkcijo delca v zunanjem elektromagnetnem polju je torej enostaven,

$$L = T - V = \frac{m}{2}v^2 - e\Phi + e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A}. \quad (6.34)$$

Ustrezni posplošeni impulz je

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{r}}} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = m\mathbf{v} + e\mathbf{A} \quad \implies \quad m\mathbf{v} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}, \quad (6.35)$$

in ni enak običajni gibalni količini delca.

Sedaj zlahka izrazimo tudi Hamiltonovo funkcijo delca, ko nadomestimo \mathbf{v} z impulzi \mathbf{p} ,

$$\begin{aligned} H &= \sum_i p_i \dot{x}_i - L = \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - L = \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{p} - \frac{m}{2}v^2 + e\Phi - e\mathbf{v} \cdot \mathbf{A} = \frac{m}{2}v^2 + e\Phi, \end{aligned} \quad (6.36)$$

in končno, če povsod nadomestimo \mathbf{v} z impulzi \mathbf{p} ,

$$H = \frac{|\mathbf{p} - e\mathbf{A}|^2}{2m} + e\Phi. \quad (6.37)$$

Izraz je pomemben kot izhodišče za posplošitev v kvantno mehaniko in statistično fiziko.

Če se omejimo na primere s časovno neodvisnimi polji in torej tudi potenciali $\mathbf{A}(\mathbf{r})$, $\Phi(\mathbf{r})$, potem je razvidno iz oblike (6.36), da se v primeru konstantnega električnega potenciala $\Phi = \Phi_0$ poleg energije $E = H$ ohranja tudi hitrost v . Kar je očitna posledica dejstva, da se delec v magnetnem polju ne pospešuje.

6.4 Konstante gibanja v Hamiltonovi mehaniki

Kot v Newtonovi in Lagrangeovi mehaniki so posebej zanimive in koristne konstante gibanja (oz. integrali gibanja), torej funkcije kanoničnih spremenljivk, ki so neodvisne od časa, $g_l(q, p, t) = c_l$.

Enostaven in pogost primer konstant dobimo, če v Hamiltonovi funkciji $H(q, p, t)$ eksplicitno ne nastopajo določene koordinate, ki jih imenujemo **ciklične koordinate**, torej $H \neq H(q_j)$. Tedaj so konstantne gibanja kar konjugirane gibalne količine,

$$\frac{\partial H}{\partial q_j} = -\dot{p}_j = 0 \quad \implies \quad p_j(t) = p_j^0. \quad (6.38)$$

6.5 Poissonov oklepaj

Obravnavajmo razvoj splošne količine f , ki je funkcija koordinat, impulzov in časa

$$f(q, p, t) \equiv f(q(t), p(t), t). \quad (6.39)$$

Njen časovni odvod lahko zapišemo z upoštevanjem Hamiltonovih enačb (6.13),

$$\begin{aligned} \frac{df}{dt} &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = \\ &= \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) + \frac{\partial f}{\partial t} = [f, H]_{(q,p)} + \frac{\partial f}{\partial t}, \end{aligned} \quad (6.40)$$

kjer smo definirali Poissonov oklepaj med dvema količinama,

$$[f, g]_{(q,p)} = \sum_i \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} \right). \quad (6.41)$$

Izkaže se, da je tako definiran Poissonov oklepaj neodvisen od izbire kanoničnih koordinat $(\underline{q}, \underline{p})$, če le ustrezajo Hamiltonovim enačbam (6.13). Torej, da je izraz invarianten na kanonične transformacije, ki so predmet naslednjega poglavja. Poissonov oklepaj

$$[f, g]_{(q,p)} = [f, g], \quad (6.42)$$

med dvema količinama je torej njuna fundamentalna lastnost, neodvisna od izbire koordinat. Gibalna enačba za količino f je

$$\frac{df}{dt} = [f, H] + \frac{\partial f}{\partial t}. \quad (6.43)$$

Oglejmo si konstante gibanja s perspektive Poissonovih oklepajev. Vzemimo samo funkcijo posplošenih koordinat $f = f(\underline{q}, \underline{p})$. Pogoji za konstanto gibanja sledi iz (6.43),

$$\frac{df}{dt} = [f, H] = 0, \quad (6.44)$$

torej je pogoj izničenje Poissonovega oklepaja z H . Očitno je taka ohranjena količina tudi H sam, saj je $[H, H] \equiv 0$.

Lastnosti Poissonovih oklepajev

Navedli bomo nekaj lastnosti Poissonovih oklepajev, ki jih je mogoče dokazati neposredno z uporabo definicije (6.41):

1. linearnost: $[f, \lambda g + \mu h] = \lambda [f, g] + \mu [f, h]$,
2. antisimetričnost $[f, g] = -[g, f]$,
3. cikličnost (Jacobijeva zveza): $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$,
4. produkt: $[f, gh] = [f, g]h + g[f, h]$.

Tako gibalne enačbe kot tudi lastnosti Poissonovih oklepajev navajajo na korespondenco s kvantno mehaniko, kjer vlogo funkcij prevzamejo operatorji opazljivk in vlogo Poissonovih oklepajev komutatorji. Osnovna gibalna kvantna enačba za operatorje (v Heisenbergovi sliki) je

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{O}, \hat{H}] = -\frac{i}{\hbar}(\hat{O}\hat{H} - \hat{H}\hat{O}), \quad (6.45)$$

kjer je \hat{O} poljuben operator, \hat{H} Hamiltonov operator (energije) - Hamiltonian in $\hbar = h/(2\pi)$ Planckova konstanta.

Primeri Poissonovih oklepajev

Oglejmo si nekaj primerov Poissonovih oklepajev med osnovnimi količinami. Uporabljaljoč definicijo (6.41) ugotovimo

$$[q_i, q_j] = [p_i, p_j] = 0, \quad [q_i, p_j] = \frac{\partial q_i}{\partial q_i} \frac{\partial p_j}{\partial p_i} = \delta_{ij}. \quad (6.46)$$

Nekoliko bolj zapleten je izračun Poissonovega oklepaja med dvema komponentama vrtilne količine,

$$l_x = yp_z - zp_y, \quad l_y = zp_x - xp_z. \quad (6.47)$$

Izpišemo njun Poissonov oklepaj

$$[l_x, l_y] = \frac{\partial l_x}{\partial x} \frac{\partial l_y}{\partial p_x} + \frac{\partial l_x}{\partial y} \frac{\partial l_y}{\partial p_y} + \frac{\partial l_x}{\partial z} \frac{\partial l_y}{\partial p_z} - \frac{\partial l_x}{\partial p_x} \frac{\partial l_y}{\partial x} - \frac{\partial l_x}{\partial p_y} \frac{\partial l_y}{\partial y} - \frac{\partial l_x}{\partial p_z} \frac{\partial l_y}{\partial z}. \quad (6.48)$$

Če ohranimo le neničelne člene, dobimo

$$[l_x, l_y] = \frac{\partial l_x}{\partial z} \frac{\partial l_y}{\partial p_z} - \frac{\partial l_x}{\partial p_z} \frac{\partial l_y}{\partial z} = xp_y - yp_x, \quad (6.49)$$

in prepoznamo

$$[l_x, l_y] = l_z. \quad (6.50)$$

Očitni nauk je, da nekatere lastnosti, bolj poznane iz kvantne mehanike (nekomutativnost komponent vrtilne količine) izvira iz klasične analitične mehanike.

6.6 Kanonične transformacije

Izbira kanoničnih spremenljivk $(\underline{q}, \underline{p})$ ni enolična. Preidemo lahko na nov sistem spremenljivk,

$$(\underline{q}, \underline{p}) \quad , \quad H(\underline{q}, \underline{p}, t) \quad \longleftrightarrow \quad (\underline{Q}, \underline{P}) \quad , \quad K(\underline{Q}, \underline{P}, t) \quad , \quad (6.51)$$

ki pa morajo zopet zadoščati Hamiltonovim enačbam

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}. \quad (6.52)$$

Tem pogojem ustrezne transformacije spremenljivk imenujemo kanonične transformacije.

Pri Lagrangeovi mehaniki lahko funkcije in enačbe direktno transformiramo iz starih v nove spremenljivke

$$Q_i = Q_i(\underline{q}, t), \quad (6.53)$$

kar nam da novo Lagrangeovo funkcijo

$$\tilde{L}(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, t) = L(\underline{q}(\underline{Q}, t), \dot{\underline{q}}(\underline{Q}, \dot{\underline{Q}}, t), t). \quad (6.54)$$

V Hamiltonovem formalizmu pa so poleg koordinat Q_i neodvisne spremenljivke še posplošene gibalne količine P_i , zato predpis (6.53) ni dovolj. Uporabne zveze dobimo preko Lagrangeovih funkcij. Z variacijskim principom smo pokazali, da so Lagrangeove dinamične enačbe invariantne (neobčutljive) na katerikoli totalni odvod (2.83) kot tudi na poljubni splošni faktor λ ,

$$\tilde{L} = \lambda L + \frac{dF}{dt}. \quad (6.55)$$

Zveza med Lagrangeovo in Hamiltonovo funkcijo (6.10) nam da

$$\sum_i \dot{Q}_i P_i - K = \lambda \left[\sum_i \dot{q}_i p_i - H \right] + \frac{dF}{dt}. \quad (6.56)$$

Poleg skalnega faktorja λ nam sedaj nudi povezavo tudi poljubna **generatrisa transformacij** F , ki je v splošnem funkcija starih in novih koordinat.

Tu bomo obravnavali le možnost, kjer je $\lambda = 1$ in generatrisa oblike $F = F_1(\underline{q}, \underline{Q}, t)$ (analogna je obravnava za vse druge kombinacije starih in novih koordinat, npr. $(\underline{q}, \underline{P})$ itd.). Izvrednotimo odvod

$$\frac{dF_1}{dt} = \sum_i \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \dot{Q}_i \right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (6.57)$$

Ker so stare in nove spremenljivke $\underline{q}, \underline{Q}$ neodvisne, lahko s primerjavo obeh strani enačbe (6.56) napišemo povezave

$$P_i = \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}, \quad p_i = -\frac{\partial F_1}{\partial q_i}, \quad K = H - \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (6.58)$$

Posebej enostaven je primer, kjer $F_1 \neq F_1(t)$. Takrat je tudi $K = H$. Sistem enačb (6.58) podaja implicitno povezavo med starimi in novimi kanoničnimi spremenljivkami, kjer prevedba v eksplicitno obliko v splošnem ni enostavna.

Primer kanonične transformacije

Obravnavajmo ponovno harmonski oscilator v eni dimenziji (maso na vzmeti), kjer je odmik x in konjugirana gibalna količina p ter Hamiltonova funkcija

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 x^2}{2}. \quad (6.59)$$

Ustrezne gibalne enačbe so

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -m\omega^2 x, \quad (6.60)$$

kar pripelje do rešitev v obliki harmoničnega nihanja s frekvenco ω .

Lahko pa najdemo tudi kanonično transformacijo v nove kanonične spremenljivke (Q, P) , od katerih bo ena ciklična. To nam ponudi generatrisa

$$F_1 = -\frac{m\omega x^2}{2} \operatorname{ctg} Q. \quad (6.61)$$

Transformacijske enačbe (6.58) dajo povezave

$$P = \frac{\partial F_1}{\partial Q} = \frac{m\omega x^2}{2 \sin^2 Q} \implies x = \sqrt{\frac{2P}{m\omega}} \sin Q, \quad (6.62)$$

in

$$p = -\frac{\partial F_1}{\partial x} = m\omega x \operatorname{ctg} Q \implies p = \sqrt{2Pm\omega} \cos Q. \quad (6.63)$$

Če vstavimo transformiranke v Hamiltonovo osnovno funkcijo (6.59), dobimo enostaven izraz, kjer je nova koordinata Q ciklična,

$$K = \omega P \neq F(Q), \quad (6.64)$$

torej je P konstanta gibanja, ki predstavlja kar energijo $P = E/\omega = \text{konst.}$ Hkrati pa nam Hamiltonova gibalna enačba za Q da

$$\dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} = \omega \implies Q = \omega t + Q_0. \quad (6.65)$$

Tak izbor spremenljivk je posebej enostaven in (P, Q) imenujemo iz očitnih fizikalnih razlogov par akcija-kot (action-angle). Taki pari imajo poseben pomen v splošnejši obravnavi Hamiltonske dinamike sklopljenih sistemov in v t.im. formalizmu Hamiltona in Jacobija.

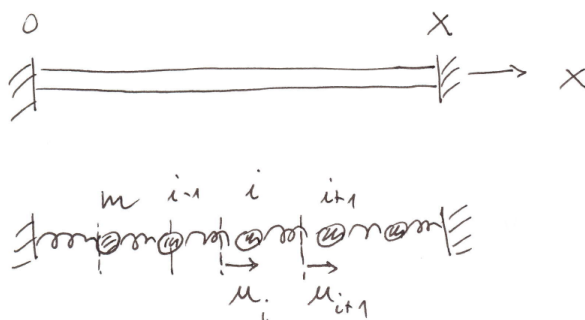
Poglavje 7

Dinamika zveznih sredstev

Posplošitev analitične mehanike N diskretnih teles na opis dinamike zveznega sredstva (kontinuuma) je obsežno poglavje, ki ga obravnava poseben predmet teoretične fizike. Tu bomo opisali le enodimenzionalni primer elastične palice, ki pa nakaže analogije in razlike analitične mehanike diskretnih in zveznih sredstev.

7.1 Longitudinalna nihanja elastične palice

Obravnavajmo longitudinalno gibanje na obeh straneh vpete ravne elastične palice gostote ρ , stalnega preseka S in ravnovesne dolžine X . Problema se lotimo z diskretizacijo na odseke dolžine $a = X/N$, kjer so enake mase m v legah $q_i = ia + u_i, i = 0, N$, v splošnem izmaknjene iz ravnovesnih leg $q_i^0 = ia$.



Elastično sredstvo popišemo z vzmetmi med masami in za diskretizirano sredstvo zapišemo Lagrangeovo funkcijo, kjer odštejemo ravnovesno

vrednost,

$$L = T - V = \sum_{i=0}^N \frac{m}{2} \dot{u}_i^2 - \frac{\kappa}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (u_{i+1} - u_i)^2. \quad (7.1)$$

Lagrangeove enačbe dajo

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}_i} \right) = m \ddot{u}_i = \frac{\partial L}{\partial u_i} = - \frac{\partial V}{\partial u_i}, \quad (7.2)$$

kar vodi do gibalnih enačb

$$m \ddot{u}_i = \kappa [(u_{i+1} - u_i) - (u_i - u_{i-1})] = \kappa (u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i), \quad (7.3)$$

kar velja za $1 \leq i \leq N - 1$, medtem ko je treba za robne točke upoštevati robne pogoje, to je vpetost $u_0 = u_N = 0$.

7.1.1 Kontinuumski popis

Prehod v kontinuum pomeni nadomestitev diskretnih deformacij z zvezno funkcijo lege

$$u_i(t) = u(ia, t) \longrightarrow u(x, t). \quad (7.4)$$

Temu primerno aproksimiramo končne diference z odvodi,

$$u_{i+1} - u_i = a \frac{\partial u}{\partial x} = au_x, \quad u_{i+1} + u_{i-1} - 2u_i = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = a^2 u_{xx}, \quad (7.5)$$

kjer smo uvedli skrajšano oznako parcialnih odvodov. Analogno zapišemo

$$\ddot{u}_i = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}. \quad (7.6)$$

Najdemo še zvezo med diskretnimi masami m , vzmetni κ in makroskopskimi parametri palice, kot so ρ, S, X ,

$$m = \rho Sa, \quad (7.7)$$

in Youngov elastični modul E . Slednjega nam da povezava med silo in deformacijo na prvem odseku

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{F}{SE} \longrightarrow \frac{u_1}{a} = \frac{\kappa u_1}{SE} \implies \kappa = \frac{SE}{a}. \quad (7.8)$$

Z upoštevanjem prehoda v kontinuum in gornjih zvez se gibalna enačba (7.3) zapiše kot

$$m u_{tt} = \kappa a^2 u_{xx} \implies u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad (7.9)$$

kar je znana valovna enačba za zvezno sredstvo s karakteristično (longitudinalno) zvočno hitrostjo c ,

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (7.10)$$

7.1.2 Lagrangeova gostota

Za zvezno sredstvo je smiselno nadomestiti Lagrangeovo funkcijo diskretnih mas z Lagrangeovo gostoto, \mathcal{L} , definirano za naš primer kot

$$L = S \int_0^X \mathcal{L} dx, \quad \mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_x, u_t, x, t), \quad (7.11)$$

v splošnem odvisne od koordinat u, x, t in odvodov u_x, u_t . Za primer palice lahko Lagrangeovo gostoto zapišemo,

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{V} = \frac{1}{2} \rho u_t^2 - \frac{1}{2} E u_x^2. \quad (7.12)$$

Ni težko uganiti, kakšna bi bila posplošitev za tridimenzionalno sredstvo. Odmiki iz ravnovesnih leg (deformacije) bi postali vektorji, odvisni od lege,

$$u(x, t) \longrightarrow \mathbf{u}(\mathbf{r}, t), \quad (7.13)$$

in Lagrangeova gostota \mathcal{L} definirana z volumskim integralom,

$$L = \int \mathcal{L} dV, \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{r}}, \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}, \mathbf{r}, t), \quad (7.14)$$

kjer je sedaj izraz $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{r}$ 3×3 tenzor.

7.2 Variacijska formulacija mehanike kontinuuma

Variacijski račun, uporabljen za sistem diskretnih teles, je možno posplošiti na kontinuum z uporabo Lagrangeove gostote (7.12). Akcijo \mathcal{S} (2.71) za primer palice konstantnega preseka zapišemo kot

$$\mathcal{S} = \int_{t_1}^{t_2} L dt = S \int_{t_1}^{t_2} \int_0^X \mathcal{L} dx dt = \min, \quad (7.15)$$

Privzemimo $\mathcal{L} = \mathcal{L}(u, u_x, u_t, t)$, torej naj \mathcal{L} ne vsebuje direktne odvisnosti od x . Reševanja variacijskega problema (7.15) se lotimo analogno kot za diskretni variacijski račun, le da sedaj variiramo zvezno funkcijo $u(x, t, \alpha)$ in sicer okrog iskane prave rešitve,

$$u(x, t, \alpha) = u(x, t) + \alpha \eta(x, t). \quad (7.16)$$

Variacija mora zadoščati robnim pogojem problema, tako v času t , kot tudi na koncih definirane območja (velja za vpeto palico na obeh koncih),

$$\eta(x, t_1) = \eta(x, t_2) = 0, \quad \eta(0, t) = \eta(X, t) = 0. \quad (7.17)$$

Pogoj ekstermalnosti (7.15) razvijemo do linearnega člana v α in dobimo

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{S} &= \alpha S \int_{t_1}^{t_2} \int_0^X dx dt \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t} \frac{\partial u_t}{\partial\alpha} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} \frac{\partial u_x}{\partial\alpha} \right] = \\ &= \alpha S \int_{t_1}^{t_2} \int_0^X dx dt \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} \eta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t} \frac{\partial\eta}{\partial t} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} \frac{\partial\eta}{\partial x} \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.18)$$

Uporabimo integracijo per partes (2.80) in upoštevamo robne pogoje (7.17),

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t} \frac{\partial\eta}{\partial t} &= - \int_{t_1}^{t_2} dt \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t} \right) \eta, \\ \int_0^X dx \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} \frac{\partial\eta}{\partial x} &= - \int_0^X dx \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} \right) \eta \end{aligned} \quad (7.19)$$

tako da se variacija (7.18) preoblikuje v

$$\delta\mathcal{S} = \alpha S \int_{t_1}^{t_2} \int_0^X dx dt \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t} \right) - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} \right) \right] \eta = 0. \quad (7.20)$$

Ker mora biti pogoj ekstremalnosti izpolnjen za vse $\eta(x, t)$, sledi iz (7.20) **Euler - Lagrangeova diferencialna enačba za zvezno sredstvo**,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u} = 0. \quad (7.21)$$

Očitna je simetrija vloge časa t in kraja x v enačbi, kar omogoča posplošitev na več dimenzij ali celo na relativistično fiziko.

Če kot primer uporabimo longitudinalno nihanje palice z Lagrangeovo gostoto (7.12), potem sledi iz (7.21) diferencialna enačba

$$\frac{d}{dt}(\rho u_t) - \frac{d}{dx}(E u_x) = \rho u_{tt} - E u_{xx} = 0, \quad (7.22)$$

kar je zopet valovna enačba.

7.3 Hamiltonova formulacija za zvezno sredstvo

Po analogiji z diskretnimi sistemi definiramo gostoto posplošene gibalne količine (impulza). Za primer longitudinalnih nihanj palice dobimo

$$\Pi(x, t) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial u_t}, \quad (7.23)$$

in gostoto Hamiltonove funkcije \mathcal{H} ,

$$H = S \int_0^X dx (\Pi u_t - \mathcal{L}) = S \int_0^X dx \mathcal{H}. \quad (7.24)$$

Za palico sledi iz (7.12),

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \rho u_t^2 + \frac{1}{2} E u_x^2 = \mathcal{E}, \quad (7.25)$$

kar je gostota mehanske energije.

Poglejmo za konec še, pod kakšnimi pogoji je tako definirana Hamiltonova funkcija (7.24) ohranjena količina,

$$\frac{dH}{dt} = S \int_0^X \frac{d\mathcal{H}}{dt} dx = S \int_0^X [\rho u_t u_{tt} + E u_x u_{xt}] dx. \quad (7.26)$$

Če upoštevamo valovno enačbo (7.22) in $u_{xt} = u_{tx}$, lahko prepisemo izraz kot

$$\frac{dH}{dt} = SE \int_0^X [u_t u_{xx} + u_x u_{tx}] dx = SE \int_0^X \frac{d}{dx} (u_t u_x) dx = SE u_t u_x \Big|_0^X. \quad (7.27)$$

Če je palica na obeh koncih vpeta, potem velja

$$u_t(x=0, t) = u_t(x=X, t) = 0 \implies H = E_0 = \text{konst.} \quad (7.28)$$

Celotna energija se res ohranja, kar pa ni nujno pri poljubnih robnih pogojih.