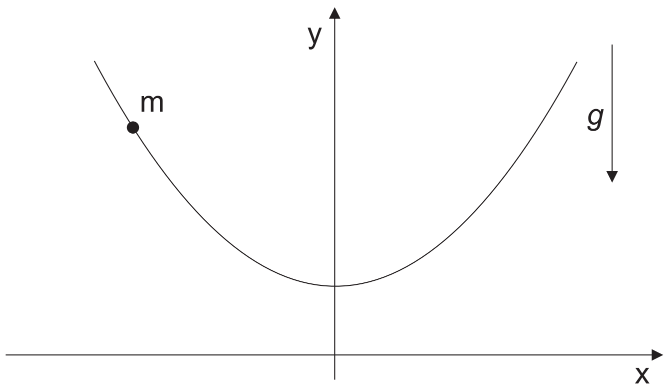
Problem brahistokrona

Alen Horvat in Bor Kavčič

30. marec 2012

Pri tej nalogi nas zanima, kakšna mora biti oblika vodila, po katerem bi masna točka (v gravitacijskem potencialu), ki se po vodilu giblje brez trenja, nihala s frekvenco neodivisno od amplitude nihanja. Ekvivalenten problem je poiskati obliko krivulje, po kateri masna točka v gravitacijskem potencialu brez trenja pride v najkrajšem času iz začetne v končno točko.

Postavimo koordinatni sistem in skicirajmo krivuljo, ki bi se nam zdela kot smiselna rešitev (Slika 1). Masna točka naj ima maso m in gravitacijski pospešek g, naj kaže v smeri $-\mathbf{e}_y$.



Slika 1: Skica naloge

Obliko krivulje bomo poiskali v parametrični obliki

$$x = x(s) \qquad y = y(s), \tag{1}$$

kjer je s naravni parameter. Naravni parameter $s = s(t)$ je definiran kot

$$s(t) = \int_{\alpha}^{t} \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2} \mathrm{d}\tau, \tag{2}$$

torej s predstavlja dolžino loka med točkama α in t. Ker obstaja inverz $t = t(s)$, iz parametrizacije po času $x = x(t)$ sledi naravna parametrizacija $x = x(t(s)) = x(s)$[1].

V nalogi moramo poiskati krivuljo $(x(s), y(s))$, po kateri niha masna točka s frekvenco, ki je neodvisna od amplitude nihanja. Nihanje, ki zadošča naši zahtevi je nihanje harmonskega oscilatorja. Kot je znano, je eden izmed možnih zapisov rešitev harmonskega oscilatorja

$$q(t) = Ae^{i\omega t} + Be^{-i\omega t}, \tag{3}$$

kjer sta konstanti A in B neodvisni od frekvence nihanja ω. Zapišimo sedaj Lagrangovo funkcijo za harmonski oscilator

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 - \frac{1}{2}m\omega^2 s^2. \tag{4}$$

Zapišimo kinetično energijo masne točke, ki se giblje po vodilu $(x(s), y(s))$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = \frac{1}{2}m(x'^2 + y'^2)\dot{s}^2, \tag{5}$$

kjer $\dot{x}$ pomeni časovni odvod, x' pa odvod po naravnem parametru s (ne smemo pozabiti, da velja $s = s(t)$). Če sedaj primerjamo kinetično energijo (5) s kinetično energijo iz enačbe (4), hitro pridemo do prve zveze

$$x'^2 + y'^2 = 1. \tag{6}$$

Nadalje zapišimo potencialno energijo V, ki ni nič drugega kot

$$V = mgy(s), \tag{7}$$

od koder izluščimo s pomočjo enačbe (4)

$$y(s) = \omega^2 s^2/2g. \tag{8}$$

Iz enačb (6) in (8) izračunamo odvisnost $x(s)$, ki je

$$x'(s) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} = \sqrt{1 - \frac{\omega^4}{g^2}s^2}. \tag{9}$$

Da dobimo iskano odvisnost $x(s)$, integrirajmo enačbo (9)

$$x(s) = \int \sqrt{1 - \frac{\omega^4}{g^2}s^2}\ \mathrm{d}s, \tag{10}$$

[1] Enako velja za koordinato y.

uvedimo substitucijo $\cos^2 t = \omega^4 s^2/g^2$ in ustrezen integral, ki ga dobimo po substituciji je

$$x(t) = -\frac{g}{\omega^2}\int \sqrt{1-\cos^2 t}\ \sin t\ \mathrm{d}t = -\frac{g}{\omega^2}\int \sin^2 t\ \mathrm{d}t, \tag{11}$$

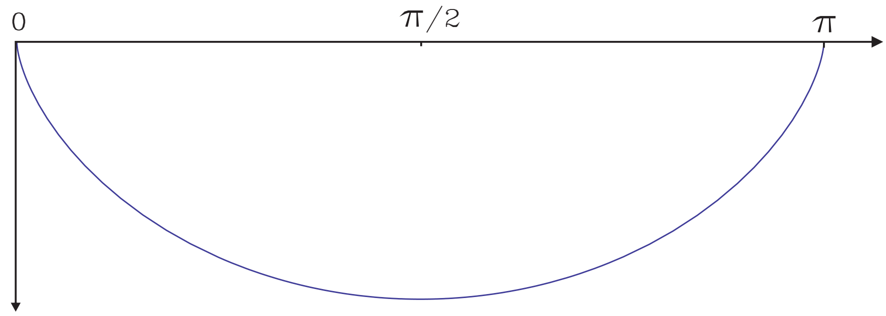
upoštevamo še trigonometrijsko identiteto dvojnih kotov $2\sin^2 t = 1 - \cos 2t$ in integriramo, dobimo

$$x(t) = -\frac{g}{4\omega^2}\int (1-\cos 2t)\ \mathrm{d}(2t) = -\frac{g}{4\omega^2}(2t - \sin 2t). \tag{12}$$

Naposled izračunajmo še $y(t)$ iz enačb (6) in (12)

$$y(t) = \frac{g}{4\omega^2}(1-\cos 2t). \tag{13}$$

Dobljena parametrična oblika krivulje se imenuje cikloida oziroma brahistohrona in je prikazana na sliki 2.



Slika 2: Cikloida

$$x(t) = \frac{g}{4\omega^2}(-2t + \sin 2t) \tag{14}$$

$$y(t) = \frac{g}{4\omega^2}(1-\cos 2t) \tag{15}$$