1. Izpit iz klasične mehanike, 24.6.2016

1. Po cevi, ki se vrti v vodoravni ravnini s kotno hitrostjo ω, brez trenja drsi nabit delec z maso m in nabojem e. Vzporedno z ravnino vrtenja vklopimo še homogeno električno polje E. Zapiši Lagrangeovo funkcijo in ustrezne enačbe gibanja, ter jih reši za primer začetnih pogojev, ko delec ob $t = 0$ miruje v osi vrtenja.

2. Negativno nabit točkast projektil $(-e,\, m)$ se siplje na mirujoči pozitivno nabiti togi tarči $(+e, M$, velja $M \gg m)$. Potencial tarče zapišemo kot: $V = \begin{cases} -\alpha/r, r > R \\ -\infty, r \leq R \end{cases}$. Skiciraj graf efektivnega potenciala in klasificiraj možne orbite. Za primer sipalne orbite, ko projektil trči v tarčo, izračunaj kot trka, t.j. kot med vektorjem hitrosti in normalo na površino tarče. Rezultat izrazi z začetnimi podatki (b, T_∞).

3. Na vodoravno podlago postavimo stožec z višino h in polmerom osnovne ploskve r. Zapiši kinetično energijo stožca, ki se po podlagi kotali brez zdrsavanja! Za zapis kinetične energije uporabi Eulerjeve kote, podobno kot za vrtavko s fiksno točko. Potreboval boš tudi vztrajnostni moment, ki ga je ugodno izračunati v cilindričnih koordinatah.

4. Obravnavaj gibanje dveh točkastih uteži, ki sta povezani z lahko togo prečko dolžine l, po notranjosti dolge cevi s premerom $2R$. Uteži po cevi drsita brez trenja. Njun položaj lahko opišemo v cilindričnih koordinatah z $(z_1, \phi_1, z_2, \phi_2)$, pri čimer vse koordinate zaradi vezi niso neodvisne. Zapiši Lagrangeovo funkcijo in pri tem upoštevaj vez! Enačbe gibanja reši ob predpostavki malih odmikov od ravnovesne lege. Zapiši lastne nihajne načine in lastne frekvence.

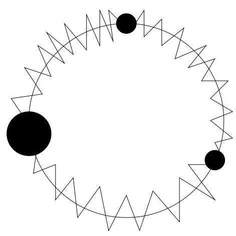
2. Izpit iz klasične fizike, 24.8.2015, 13h

1. Na vrtiljak, ki se vrti s kotno hitrostjo Ω okrog navpične osi, pritrdimo ravno gladko ploščo, tako da je nagnjena za majhen kot α glede na vodoravno lego. Obravnavaj gibanje koščka ledu, ki brez trenja drsi po plošči in ga ob času $t = 0$ postavimo na ploščo na majhni razdalji r_0 od osi vrtenja. Zapiši enačbi gibanja za koordinati x' in y' v vrtečem koordinatnem sistemu. Nagib je majhen, zato lahko vzameš $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$ in $z' = 0$. Enačbi reši in rezultat interpretiraj.

2. Na mizi leži votel valj z radijem r in maso m_v. V njegovi notranjosti brez trenja drsi utež z maso m. Zapiši Lagrangeovo funkcijo in izpelji ohranjene količine. Pri tem predpostavi, da se valj po mizi kotali brez zdrsavanja, utež pa je z valjem stalno v stiku. Izračunaj frekvenco nihanja za majhne odmike iz ravnovesne lege.

3. Obravnavaj gibanje delca z maso m v centralnem potencialu $V(r) = -\alpha/r - \beta/r^2$. Zapiši Lagrangeovo funkcijo in enačbe gibanja za koordinati r in ϕ. Iz enačb gibanja izpelji enačbo orbite $r(\phi)$. Pri izpeljavi si pomagaj tako, da odvode po času nadomestiš z odvodom po kotu ϕ in z vpeljavo nove spremenljivke $u = 1/r$. Diferencialno enačbo reši z uporabo nastavka podobnega nastavku $u(\phi) = A + B\cos(\phi)$, ki bi enačbo rešil za $\beta = 0$. Skiciraj orbito za majhni $\beta > 0$!

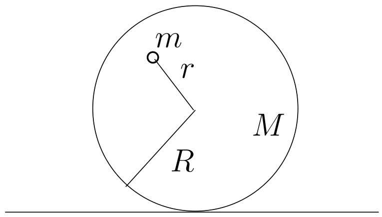
4. Na vodoravno nameščen obroč nadenemo dve kroglici z maso m in eno kroglico z maso m'. Kroglice spnemo z enakimi vzmetmi, kot kaže slika. Zapiši Lagrangeovo funkcijo in izpelji enačbe gibanja. S pomočjo simetrije poišči lastne nihajne načine in izračunaj lastne frekvence. Zapiši Lagrangeovo funkcijo tudi z normalnimi koordinatami. Kolikšen delež celotne energije je shranjen v vsakem od nihajnih načinov za začetni pogoj, da je ob času $t = 0$ kroglica z maso m' odmaknjena za majhen kot iz ravnovesne lege, ostali dve kroglici pa sta v ravnovesni legi?



2. Izpit iz klasične fizike, 12.9.2016, 10h

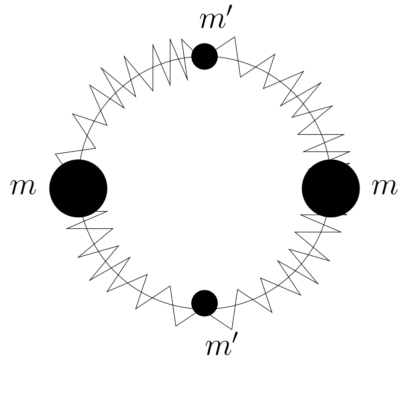
1. Obravnavaj gibanje točkastega telesa po površini vrtečega se zaledenelega planeta v obliki krogle s polmerom R. Za utež zapiši Lagrangeovo funkcijo v vrtečem koordinatnem sistemu (ϕ, θ), ki miruje glede na planet. Trenje zanemari. Izpelji enačbe gibanja! Katere količine se ohranjajo? Denimo, da ob času 0 postavimo na površino planeta utež na geografski širini 45 stopinj, tako da miruje glede na površino planeta. Kakšen bo položaj uteži v kasnejših časih? Račun si olajšaj s primerno izbiro koordinatnega sistema!

2. V lesen valj s polmerom R in maso M je, na razdalji r od osi, vgrajena tanka železna palica z maso $m << M$ (glej sliko). Zapiši enačbe gibanja za prost valj, če ga položimo na ravno podlago. Poišči ravnovesne lege in razišči majhna nihanja valja.



3. V primeru keplerjevskega potenciala pokaži, da za vezane orbite velja zveza $2\bar{T} = -\bar{V}$, kjer sta $\bar{T}$ in $\bar{V}$ dolgi (v primerjavi z obhodnim časom) časovni povprečji kinetične in potencialne energije. Pomagaj si z zvezama $H = -\frac{GM\mu}{2a}$, kjer so: M vsota mas, μ reducirana masa, a glavna polos elipse (orbite) in $\int_0^{2\pi} \frac{1}{1+\epsilon\cos\phi} d\phi = \frac{2\pi}{1-\epsilon^2}$.

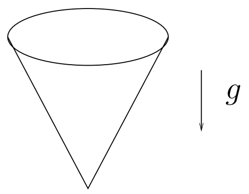
4. Na vodoravno nameščen obroč nadenemo dve kroglici z maso m in dve kroglici z maso m' in jih spnemo z enakimi vzmetmi, kot kaže slika. Kroglice po obroču gladko drsijo. Zapiši enačbe gibanja. S pomočjo simetrije poišči lastne nihajne načine in izračunaj lastne frekvence. Denimo, da mirujoč sistem v ravnovesni legi zmotimo tako, da ob času nič eno kroglico izmaknemo za kot ϕ_1 glede na prejšnjo lego. Zapiši položaje kroglic ob kasnejših časih. Kolikšen delež celotne energije je v vsakem od lastnih nihajnih načinov?



3. Izpit iz klasične fizike, 5.11.2015, 14h

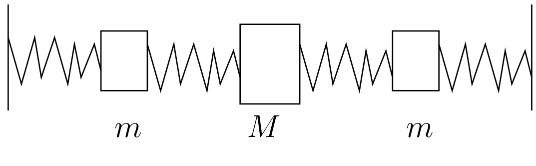
1. Obravnavaj gibanje točkastega telesa po površini vrtečega se zaledenelega planeta v obliki krogle s polmerom 10000km. Za utež zapiši Lagrangeovo funkcijo v vrtečem koordinatnem sistemu (ϕ, θ), ki miruje glede na planet. Trenje zanemari. Izpelji enačbe gibanja in jih reši! Denimo, da ob času 0 postavimo na površino planeta utež na geografski širini 45 stopinj, tako da miruje glede na površino planeta. Kakšen bo položaj uteži v kasnejših časih? Dan naj traja 1dan.

2. Po notranji površini stožca, ki je postavljen tako, da je njegova simetrijska os postavljena navpično se brez trenja giblje utež z maso m. Zapiši Lagrangeovo funkcijo. Katere so ohranjene količine? Zapiši celotno energijo sistema in izraz poenostavi z uporabo ohranjene količine, s čimer problem prevedeš na eno-dimenzionalni problem gibanja v efektivnem potencialu. Skiciraj efektivni potencial. Pri kateri energiji je kroženje pri konstantni razdalji r_0 od simetrijske osi stabilna rešitev problema? Denimo, da utež, ki tako kroži po stožcu, malenkost sunemo v smeri prečno na gibanje. S kakšno frekvenco bo utež zanihala okoli lege, ki bi jo imela, če je ne bi sunili?



3. Okoli Zemlje se po eliptični trajektoriji giblje satelit, tako da je najmanjša razdalja med satelitom in in središčem Zemlje 35000km, največja pa r_0=40000km. Satelit želi popraviti obliko orbite v krožno z radijem r_0, zato v trenutku, ko je satelit najbolj oddaljen od središča Zemlje za kratek trenutek prižge rakete, tako da ga potisnejo v smeri gibanja. Zapiši in skiciraj (tako pred, kot po delovanju potisnih raket) efektivni potencial $V_{\text{eff}}(r)$ in ga primerjaj s celotno energijo! Izračunaj za koliko se je zaradi delovanja raket satelitu povečala gibalna količina! Po kakšni orbiti pa bi se gibal satelit, če bi enak potisk raket deloval v radialni smeri navzven? Kolikšni sta najmanjša in največja razdalja od središča Zemlje v tej orbiti?

4. Obravnavaj nihanja sistema prikazanega na sliki! Zapiši Lagrangeovo funkcijo, in izpelji lastne nihajne načine in frekvence. Pri iskanju lastnih nihajnih načinov si pomagaj s simetrijo. Uteži se lahko gibljejo le v vzdolžni smeri. Denimo, da ob času 0 srednjo utež odmaknemo iz ravnovesne lege, ostali dve pa pridržimo v njuni ravnovesni legi. Zapiši odmike vseh treh uteži kot funkcijo časa! Kolikšen delež energije je shranjen v vsakem od nihajnih načinov?

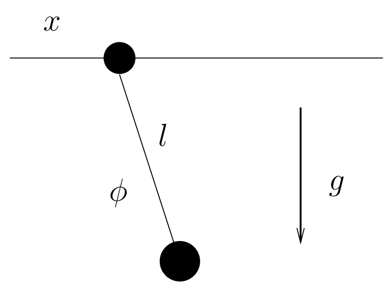


1. Kolokvij iz klasične fizike, 24.4.2015

1. Po drsališču parabolične oblike, ki ga v cilindričnih koordinatah opišemo s funkcijo $z = \alpha r^2$, brez trenja drsi drobna utež. Izračunaj frekvenco nihanja uteži za majhne odmike od ravnovesne lege. V naslednjem koraku naj se isto drsališče vrti okoli navpične (simetrijske) osi s kotno hitrostjo ω_l. Zapiši Lagrangeovo funkcijo in ustrezne enačbe gibanja **v vrtečem koordinatnem sistemu**. Enačbe reši in ugotovi, kako se giblje utež v primeru, ko velja $\omega_l \ll \omega_0$ in jo ob času $t = 0$s mirujočo spustimo iz lege $r = r_0$.

2. Potencialno energijo delca v cilindričnih koordinatah zapišemo kot: $V = \alpha(3z^2 - r^2)$. Zapiši Lagrangeovo funkcijo ter enačbe gibanja. Enačbe reši pri začetnih pogojih $\vec{r}(0) = 0$ in $\dot{\vec{r}}(0) = v_{x_0}\widehat{i} + v_{z_0}\widehat{k}$. V ravnini xz skiciraj tir delca.

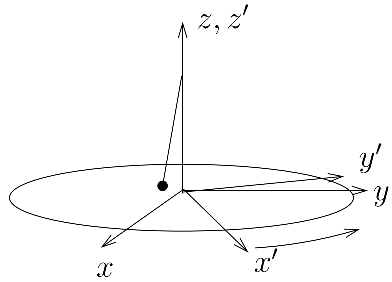
3. Po ravnem vodilu brez trenja drsi telo z maso m_1. Na to telo z lahko palico pritrdimo utež z maso m_2, kot kaže slika. Zapiši Lagrangeovo funkcijo in enačbe gibanja. Izračunaj frekvenco nihanja za majhne odmike od ravnovesne lege!



4. Okoli Zemlje po krožnici z radijem 42000 km kroži satelit. V nekem trenutku vanj trči lahki meteorit, tako da satelit izgubi 2 odstotka kinetične energije, smer njegovega gibanja pa se ob trku ne spremeni. Zapiši in skiciraj (tako pred kot po trku) efektivni potencial $V_{\text{eff}}(r)$ in ga primerjaj s celotno energijo! Po kakšni orbiti se bo satelit gibal po trku? Kolikšna je najmanjša razdalja med središčem Zemlje in satelitom v tej orbiti?

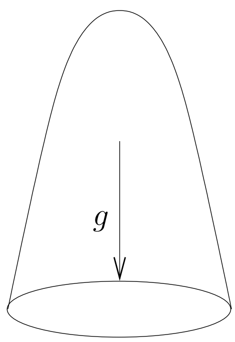
1. Kolokvij iz klasične fizike, 8.4.2016

1. Na vrtiljaku, ki se vrti s kotno hitrostjo ω opazujemo gibanje uteži na dolgi niti, ki je pritrjena v osi vrtenja. Za utež zapiši Newtonov zakon v vrtečem koordinatnem sistemu (x', y') v katerem vrtiljak miruje. Odmiki nihala iz ravnovesne lege so mali, zato gibanja v smeri z' ni potrebno eksplicitno upoštevati. Enačbe reši! Hitrost vrtenja ni nujno majhna, zato upoštevaj tako Coriolisov kot centripetalni del. Splošno rešitev poenostavi za začetni pogoj $x'(0) = y'(0) = 0$, $v'_x = v_0$, $v'_y = 0$ in rezultat interpretiraj.



2. Potencialno energijo delca v cilindričnih koordinatah zapišemo kot: $V = \alpha(3z^2 - r^2)$. Zapiši Lagrangeovo funkcijo ter enačbe gibanja. Enačbe reši pri začetnih pogojih $\vec{r}(0) = 0$ in $\dot{\vec{r}}(0) = v_{x_0}\hat{\imath} + v_{z_0}\hat{k}$. V ravnini xz skiciraj tir delca.

3. Točkasto telo se giblje po navzdol obrnjenemu rotacijskemu paraboloidu, ki ga v cilindričnih koordinatah opišemo z enačbo $z = -\beta r^2$ $(\beta > 0)$. Zapiši Lagrangeovo funkcijo, izpelji enačbe gibanja in ohranjene količine! Enačbe gibanja reši za r za primer, ko ob času nič telo blago izmaknemo z vrha paraboloida. Kako r narašča kot funkcija časa? Kako pa r narašča ob velikih časih, ko približek malih odmikov ni več upravičen?



4. Za primer keplerjevskega centralnega potenciala smo pokazali, da se poleg polne energije in vektorja vrtilne količine, ohranja tudi t.i. Runge-Lenzov vektor (podaja orientacijo orbite). Pokaži, da se tudi za primer centralnega harmoničnega potenciala ohranja "podobna" količina le da ta ni vektor ampak tenzor, ki ga zapišemo kot $\underline{\underline{W}} = \frac{1}{2m}\vec{p} \otimes \vec{p} + \frac{k}{2}\vec{r} \otimes \vec{r}$.

1. Kolokvij iz klasične mehanike, 7.4.2017

1. Utež z maso m gladko drsi po podlagi, ki jo opišemo z funkcijo $y(x) = y_0 \cos(x/x_0)$. Zanima nas pri katerih začetnih pogojih se utež odlepi od podlage.
a) Naj enotski vektor $\mathbf{e}_1$ kaže v tangentni smeri, $\mathbf{e}_2$ pa v normalni smeri na krivuljo $y(x)$. Zapiši $\mathbf{e}_1$ in $\mathbf{e}_2$ v kartezičnem koordinatnem sistemu $\mathbf{i}, \mathbf{j}$! Težnostni pospešek g naj kaže v smeri $-\mathbf{j}$. Zapiši hitrost in pospešek!
b) Normalno komponento pospeška izenači s silami, ki delujejo na utež in izpelji zvezo

$$v^2 y'' + g(1 + y'^2) = 0, \tag{1}$$

ki določa mejno velikost hitrosti, pri kateri se utež odlepi od podlage. ($'$ označuje odvod po x)
c) Utež sunemo v vodoravni smeri z vrha vzpetine (pri $x = 0$) z majhno začetno hitrostjo $v_0 \to 0$. Ali (in če da, pri katerem y) se bo utež odlepila od podlage? Odgovor utemelji.

2. Na vrtiljak z obliko $z = z_0/\cosh(r/r_0)$ (r je razdalja od simetrijske osi) postavimo koščec ledu z maso m, ki po vrtiljaku gladko drsi. Vrtiljak se vrti okrog navpične (simetrijske) osi s kotno hitrostjo Ω.
a) Zapiši hitrost, kinetično energijo in Lagrangeovo funkcijo v vrtečem sistemu, v katerem vrtiljak miruje! Predpostavi, da je koščec ledu vseskozi v stiku z vrtiljakom. Predpostavi tudi, da so odmiki iz ravnovesne lege majhni in je zato komponenta hitrosti v navpični smeri zanemarljiva.
b) Koščec ledu ob času $t = 0$ sunemo z majhno hitrostjo v_0 z vrha vrtiljaka. Zapiši enačbe gibanja v vrtečem sistemu in jih reši za majhne odmike od $r = 0$.
c) Kako se bo koščec ledu ob predpostavki, da je vseskozi v stiku s podlago, gibal po dolgih časih? Gibanje opiši v vrtečem sistemu.

3. Dve točkasti telesi z maso m povežemo z lahko prečko dolžine l. Eno od uteži nabijemo z nabojem e. Sistem postavimo v homogeno električno polje $\mathbf{E} = E_0\mathbf{k}$, kjer je E_0 konstanta.
a) Zapiši Lagrangeovo funkcijo! Težnostni pospešek zanemari. Iz simetrije problema sklepaj, katere količine se ohranjajo in uporabi za zapis Lagrangeove funkcije koordinate, ki so konjugirane ohranjenim količinam!
b) Izpelji ohranjene količine!
c) Naj ob času $t = 0$ sistem miruje, prečka pa naj kaže v smeri, ki je za majhen θ nagnjen glede na $\mathbf{k}$. Reši enačbe gibanja in določi vrednosti koordinat ob kasnejših časih.

2. Kolokvij iz klasične fizike, 23.6.2015

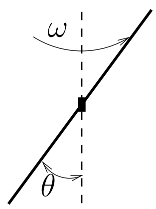
1. Dva enaka vztrajnika oblike diska (vztrajnostni moment J), povežemo s torzijsko vzmetjo (npr. jekleno palico) vzdolž simetrijske osi. Navor vzmeti je sorazmeren medsebojnemu zasuku vztrajnikov (koeficient vzmeti D). Obravnavaj nihanja opisanega sistema: izračunaj lastne frekvence in pripadajoče lastne nihajne načine. Nato privzemi, da s kratkim sunkom navora enemu od vztrajnikov podelimo začetno kotno hitrost (ω_0). Zapiši rešitev za dane začetne pogoje in izračunaj, kako je polna energija porazdeljena po nihajnih načinih.

2. Negativno električno nabit točkast projektil (-e, m) se siplje na mirujoči pozitivno nabiti tarči s trdo sredico ($+e$, M; velja: $M \gg m$). Potencial tarče zapišemo kot:

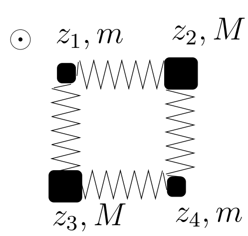
$$V(r) = \begin{cases} -\alpha/r & , r > R \\ \infty & , r \leq R \end{cases}$$

Skiciraj graf efektivnega potenciala in klasificiraj možne orbite. Za primer sipalne orbite, ko projektil trči v tarčo, izračunaj kot trka t.j. kot med vektorjem hitrosti in normalo na površino tarče. Rezultat izrazi z začetnimi podatki (udarni parameter b, začetna kinetična energija T_∞).

3. Tanko palico z maso m in dolžino l v težišču pritrdimo na os nagnjeno za kot θ glede na palico, kot kaže slika. Palico zavrtimo okrog te osi s kotno frekvenco ω. S kolikšnim navorom deluje palica na stik (prikazan z odebeljenim pravokotnikom)? V nekem trenutku stik popusti, tako da palica prosto pade. Kako se giblje palica sedaj? Zapiši časovno odvisnost položaja enega od krajišč padajoče palice v mirujočem koordinatnem sistemu.



4. Obravnavaj majhna nihanja sistema sestavljenega iz štirih enakih vzmeti ter dveh uteži z maso m in dveh z maso M. Zanimali se bomo samo za odmike v z smeri (ta kaže pravokotno na ravnino slike). Za silo vzmeti predpostavi Hookov zakon $F_{ij} \propto (z_i - z_j)$. Z upoštevanjem simetrij sistema poišči lastne nihajne načine in izračunaj lastne frekvence.



2. Kolokvij iz klasične mehanike, 2.6.2016

1. Na minigolfu z velike razdalje l ciljamo okroglo odprtino velikosti $2R$, ki se nahaja na vrhu blage vzpetine oblike $z = k/r^4$. Pri dani začetni hitrosti v_0, največ za kolikšen kot glede na idealno linijo proti sredini tarče lahko zgrešimo, da bomo tarčo vseeno zadeli? Izstrelek lahko obravnavaš kot točkast. Prispevke h kinetični energiji v navpični smeri lahko zanemariš.

2. Izračunaj elemente tenzorja vztrajnostnega momenta za homogen elipsoid z gostoto ρ. Namig: pri integraciji uporabi substitucijo $x = au$, $y = bv$ in $z = cw$, kjer so a, b, c polosi elipsoida vzdolž osi x, y in z (s tem prevedeš integral po elipsoidu na integral po enotski krogli). Rotacijski elipsoid (polosi a, a, c) vpnemo na fiksno os (skozi težišče), ki je glede na simetrijsko os elipsoida nagnjena za kot θ. S kolikšnim navorom moramo delovati, če želimo doseči kotni pospešek α?

3. Za, med dve steni vpeto, linearno verigo N enakih uteži (masa m), ki so povezane z enakimi vzmetmi (konstanta k), zapiši Lagrangeovo funkcijo oz. matrike za kinetično in potencialno energijo. Za primer $N = 5$ izračunaj lastne nihajne načine in pripadajoče lastne frekvence. Namig: nastavke za lastne vektorje zapiši z upoštevanjem simetrije verige glede na zrcaljenje prek ravnovesnega položja središčne uteži.

4. Drobno utež postavimo na vrh ledenega bloka v vdolbino s krožnim presekom kot kaže slika. Zapiši Hamiltonovo funkcijo in iz nje izpelji enačbe gibanja. Gibanja v smeri prečno na ravnino slike ni potrebno upoštevati. Katere količine se ohranjajo? Enačbe gibanja reši za majhne odmike iz ravnovesne lege. Denimo, da utež postavimo na ledeni blok malenkost stran od dna vdolbine. Izpelji kako se bo sistem vedel potem, ko utež spustimo! Trenje med utežjo in ledom, kot tudi med ledom in tlemi zanemari.