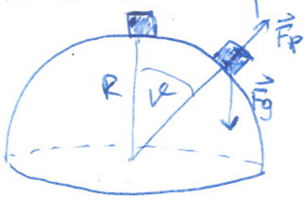
# GIBANJE PO POLKROGLI BREZ TRENJA




Imamo polkroglo, po kateri drsi masa. Kakšna je gibanje, preden se masa odlepi od krogle? Pri katerem kotu se to zgodi? Na začetku je bila masa na vrhu: $\vartheta = 0$.

① DOKLER SE NE ODLEPI:

- Koordinate:

Sferične $r, \vartheta, \varphi$

- Vezi:

$\varphi = \text{konst}$ ; to vez uganemo, ker vemo, da bo masa zdrsela pri istem kotu dol.

$r = R$ ; Ta vez velja, dokler se masa ne odlepi

$\Rightarrow 3 - 2 = 1$ generalizirana koordinata, $\vartheta$, dokler masa na krogli.

- Kako je s silami?

$\vec{F}_g$ damo v potencial $V = + mgr\cos\vartheta$

$\vec{F}_p$ pa damo v vez $r = R$, ko rešujemo primer, ko masa na polkrogli.

- Lagrangean:

$L = T - V$

$T = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\vartheta}^2$ ; $V = + mgR\cos\vartheta$

$L = \frac{1}{2} mR^2 \dot{\vartheta}^2 - mgR\cos\vartheta$

- Euler - Lagrangeove enačbe:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\vartheta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = 0$$

$$mR^2\ddot{\vartheta} - mgR\sin\vartheta = 0$$

$$\boxed{\ddot{\vartheta} - \frac{g}{R}\sin\vartheta = 0}$$ enačba gibanja

## ② MASA SE ODLEPI:

Masa drsi po polkrogli in se pri nekem $\vartheta$ odlepi → od tedaj naprej ($F_p = 0$) in vez $r = R$ ne velja več. To je primer neholonomne vezi, saj je ne moremo zapisati kot $f(r, \vartheta, \varphi, t) = 0$. Zato damo silo podlage v generalizirano silo, vezi za $r$ pa ne upoštevamo:

- Generalizirani koordinati:

$r, \vartheta$

- Lagrangean:

$$L = \frac{1}{2} m (\dot r^2 + r^2 \dot\vartheta^2) - mgr\cos\vartheta$$

sila teže se vedno v potencialu, upoštevamo še kinetični del od $r$.

- Sila podlage:

Damo jo v generalizirano silo. Upoštevamo, da kaže v radialni smeri $\vec F_p = F_p \vec e_r$

$$Q_r = \vec F_p \underbrace{\frac{\partial \vec r}{\partial r}}_{\vec e_r} = F_p \vec e_r \cdot \vec e_r = F_p$$

$$Q_\vartheta = \vec F_p \underbrace{\frac{\partial \vec r}{\partial \vartheta}}_{\vec e_\vartheta} = F_p \underbrace{\vec e_r \cdot \vec e_\vartheta}_{0} = 0$$


$$Q_j = \sum_i \vec F_i \frac{\partial \vec r_i}{\partial q_j}$$

- Euler-Lagrangeove enačbe:

$r$: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot r}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = Q_r$$

① $$\boxed{m\ddot r - mr\dot\vartheta^2 + mg\cos\vartheta = Q_r = F_p}$$

$\vartheta$: $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\vartheta}\right) - \frac{\partial L}{\partial \vartheta} = Q_\vartheta$$

② $$\boxed{mr^2\ddot\vartheta - mgr\sin\vartheta + 2mr\dot r\dot\vartheta = 0}$$

Imamo dve enačbi in tri neznanke: $r(t)$, $\vartheta(t)$ in $F_p(\vartheta, r) = F_p(t)$. Za $F_p$ vemo, da je neničelna do trenutka, ko se masa odlepi, od tam naprej je $F_p = 0$. Pri katerem kotu je to?

To se zgodi, ko $r = R \Rightarrow \dot r = \ddot r = 0$ in ① $F_p = 0$
vstavimo v enačbe:

① $$-mR\dot\vartheta^2 + mg\cos\vartheta = F_p = F_p(\vartheta)$$

② $$mR^2\ddot\vartheta - mgR\sin\vartheta = 0$$

Iz teh dveh enačb naj bi izračunali tak $\vartheta$, da je $F_p = 0$.
Težko, ker grde enačbe.

Pomagamo si z energijsko funkcijo sistema, za katero vemo, da se ohranja:

$$H = T + V$$

$$H = \frac{1}{2} m R^2 \dot{\vartheta}^2 + mgR\cos\vartheta = mgR$$ → začetna energija

Taka je, dokler je masa na polkrogli.

Izrazimo: $R\dot{\vartheta}^2$ iz $H$, delimo z $m$ in $R$.

$$R^2\dot{\vartheta}^2 = 2g - 2g\cos\vartheta$$

Vstavimo v enačbo ①:

$$m(-2g + 2g\cos\vartheta + g\cos\vartheta) = F_p$$

$$gm(-2 + 3\cos\vartheta) = F_p$$

$F_p = 0$ (trenutek ko se odlepi), ko $\cos\vartheta = \frac{2}{3}$. ✓

Poznamo $F_p(\vartheta)$, tako da bi lahko iz ① in ② izračunali gibanje $\vartheta(t)$, $r(t)$.