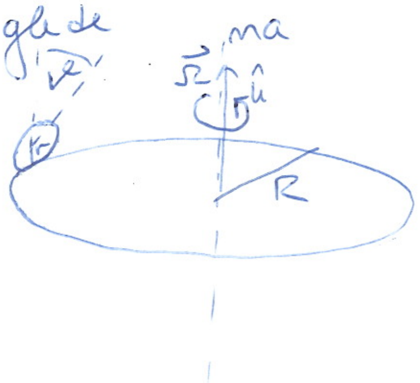
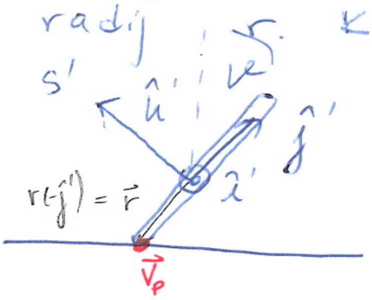
KROŽEČ KOVANEC

Kovanec kroži po krožnici z radijem R z enakomerno kot. hitrostjo Ω. Za kolikšen kot ϑ je nagnjen glede na navpičnico? Kovanec ima maso m in radij r. Kotali se.





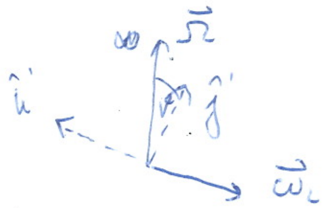
$$\underline{J} = \begin{pmatrix} J & & \\ & J & \\ & & J' \end{pmatrix}$$

$J = \frac{1}{4}mr^2$; $J' = \frac{1}{2}mr^2$

Delamo v koordinatnem sistemu S' - ta se vrti okrog središča krožnice z Ω, ne pa še okrog osi $\hat k'$ ~~kovan~~ kovanca.

- Newtonov zakon: $\dot{\vec L} = \vec M$; $\vec M \neq 0$

$\vec L = \underline{J}\vec\omega$, $\vec\omega = \vec\Omega + \vec\omega_L$



$\vec\Omega = \Omega(\cos\vartheta\,\hat j' + \sin\vartheta\,\hat k')$ → vrtenje težišča okrog centra

$\vec\omega_L = \omega_L \hat k'$ ($\omega_L < 0$ če $\Omega > 0$) → lastno vrtenje, da se kovanec kotali

Pogoj za kotaljenje je še: Hitrost na stiku s površino je 0:

$$\vec v_P = \vec v_T + \vec\omega\times\vec r = \Omega\hat k\times\vec e_r(R - \overset{\text{središče}}{r\sin\vartheta}) + (\omega_L\hat k' + \Omega\cos\vartheta\,\hat j' + \sin\vartheta\,\Omega\hat k')\times(-r)\hat j' = (*)$$

$$\dot{\vec L} = J\dot\omega_x'\hat i' + J\dot\omega_y'\hat j' + J'\dot\omega_z'\hat k' + J\omega_x'\underbrace{(\vec\Omega\times\hat i')}_{\dot{\hat i}'} + J\omega_y'\underbrace{(\vec\Omega\times\hat j')}_{\dot{\hat j}'} + J'\omega_z'\underbrace{(\vec\Omega\times\hat k')}_{\dot{\hat k}'}$$

$\dot{\hat i}' = \vec\Omega\times\hat i'$, saj so koordinate izbrane tako, da se le z $\vec\Omega$ vrtijo in niso fiksirane na kovanec

$$\vec\Omega\times\hat i' = \Omega(-\cos\vartheta\,\hat k' + \sin\vartheta\,\hat j')$$
$$\vec\Omega\times\hat j' = -\Omega\sin\vartheta\,\hat i'$$
$$\vec\Omega\times\hat k' = \Omega\cos\vartheta\,\hat i'$$

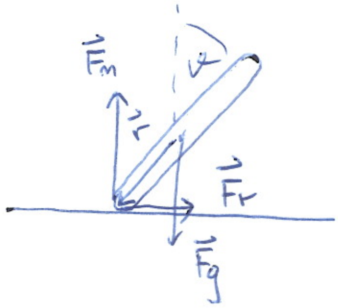
$$\dot{\vec L} = (J\dot\omega_x' - \Omega\sin\vartheta\, J\omega_y' + \Omega\cos\vartheta\, J'\omega_z')\hat i' + (J\dot\omega_y' + \Omega\sin\vartheta\, J\omega_x')\hat j' + (J'\dot\omega_z' - \Omega\cos\vartheta\, J\omega_x')\hat k'$$

(*) Pogoj za kotaljenje:

$$\Omega R - \cancel{\Omega r\sin\vartheta} + r\omega_L + \cancel{r\sin\vartheta\,\Omega} = 0$$

$$\omega_L = -\frac{R}{r}\Omega$$

Navori in sile:



Sile:

$F_g = mg$ sila teže

$\vec{F}_p = \vec{F}_n + \vec{F}_r$ sila podlage

$F_n = mg$ izenači silo teže

$\vec{F}_n = F_n \left(\cos\vartheta \hat{j}' + \sin\vartheta \hat{k}' \right)$

$F_r = m\Omega^2 \left(R - r\sin\vartheta \right)$ centripetalna sila za vrtenje

$\vec{F}_r = F_r \left(\sin\vartheta \hat{j}' - \cos\vartheta \hat{k}' \right)$

Navor glede na težišče, kjer koord. sistem:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \left(\vec{F}_n + \vec{F}_r \right) \quad ; \quad \vec{r} = -r\hat{j}'$$

$$= -r \left(mg\sin\vartheta - m\Omega^2 (R - r\sin\vartheta) \cos\vartheta \right) \hat{i}'$$

Upoštevamo še, da je kroženje enakomerno, torej:

$$\dot{\omega}_x' = \dot{\omega}_y' = \dot{\omega}_z' = 0$$

Komponente so:

$$\omega_x' = 0$$

$$\omega_y' = \Omega\cos\vartheta$$

$$\omega_z' = \omega_i + \sin\vartheta\,\Omega \underset{\text{pogoj za kotaljenje}}{=} -\frac{R}{r}\Omega + \sin\vartheta\,\Omega$$

Vstavimo vse v $\dot{\vec{L}}$:

$$\dot{\vec{L}} = \Big[-\Omega^2 \sin\vartheta\, J \underbrace{\Omega\cos\vartheta}_{\omega_y'} + \Omega\cos\vartheta\, J' \left(-\Omega\frac{R}{r} + \Omega\sin\vartheta \right) \Big] \hat{i}' + 0\hat{j}' + 0\hat{k}'$$

$$= \left(-\Omega^2 \sin\vartheta\cos\vartheta \tfrac{1}{4}mr^2 - \Omega^2\cos\vartheta\, rRm\tfrac{1}{2} + \Omega^2\cos\vartheta\sin\vartheta\tfrac{1}{2}mr^2 \right)$$

$J = \frac{1}{4}mr^2$; $J' = \frac{1}{2}mr^2$

Izenačimo z navori in dobimo:

$$+\Omega^2 \sin\vartheta\cos\vartheta \tfrac{1}{4}mr^2 - \Omega^2\cos\vartheta\, rRm\tfrac{1}{2} = -rmg\sin\vartheta + m\Omega^2 rR\cos\vartheta - m\Omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta\, r^2$$

$$\tfrac{5}{4}\Omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta\, mr^2 - \tfrac{3}{2}\Omega^2\cos\vartheta\, rRm = -rmg\sin\vartheta$$

V približku $r \ll R$ zanemarimo 1. člen in:

$$\tfrac{3}{2}\Omega^2\cos\vartheta\, rRm = rmg\sin\vartheta$$

$$\tan\vartheta = \frac{3}{2}\frac{\Omega^2 R}{g}$$