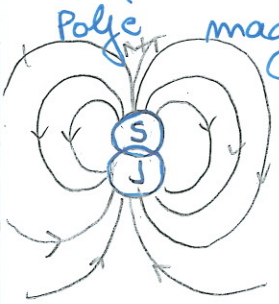
GIBANJE ELEKTRONA V POLJU MAGNETNEGA MONOPOLA

Zanima nas gibanje elektrona v polju magnetnega monopola. Naloga malce nepovezana s snovjo, vendar dobro enkrat rešit ta primer. S tem se namreč pojasni severni sij – ta je namreč povzročen zaradi elektronov in protonov iz sončnega vetra, ki se ujamejo v magnetno polje Zemlje. Magnetno polje Zemlje je dipolno, ampak v bližini polov ga lahko opišemo z magnetnim monopolom.

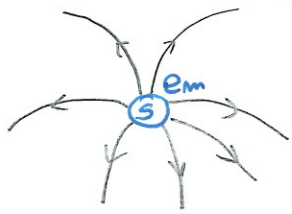
Polje mag. dipola:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{3\vec{r}(\vec{m}\cdot\vec{r})}{r^5} - \frac{\vec{m}}{r^3}\right)$$

$\longrightarrow$ V bližini enega od polov, recimo S.

Polje magnetnega monopola:



$$\vec{B} = \frac{\mu_0 e_m}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}$$

mag. polje, kot el. polje el. naboja

Magnetnih monopolov še niso opazili; z njimi računamo le v približku!

Izračun gibanja e^-:

- $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$ Lorentzova sila – sila, ki jo čuti nabit delec v EM polju.

$\vec{B} = \frac{\mu_0 e_m}{4\pi}\frac{\vec{r}}{r^3}$ $\rightarrow$ Delec čuti polje mag. monopola

$\vec{E} = 0$ $\rightarrow$ Ni el. polja

Izhodišče koordinatnega sistema smo postavili v magnetni monopol.

2. Newtonov zakon:

$$m\ddot{\vec{r}} = e\dot{\vec{r}}\times g\frac{\vec{r}}{r^3}$$; m – masa e^-, $g = \frac{\mu_0 e_m}{4\pi}$

$$\ddot{\vec{r}} = \frac{eg}{m}\dot{\vec{r}}\times\frac{\vec{r}}{r^3}$$ enačba gibanja

- Rešimo jo preko iskanja ohranjenih količin – kot ko smo reševali gibanje prostega delca v polarnih koordinatah.

① $\ddot{\vec{r}}\cdot\vec{r} = \frac{eg}{m}\left(\dot{\vec{r}}\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\cdot\vec{r} = 0$, saj $\dot{\vec{r}}\times\vec{r} \perp$ na $\vec{r}$

② $\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{eg}{m}\left(\dot{\vec{r}}\times\frac{\vec{r}}{r^3}\right)\cdot\dot{\vec{r}} = 0$, saj $\dot{\vec{r}}\times\vec{r} \perp$ na $\dot{\vec{r}}$

$\ddot{\vec{r}}\cdot\dot{\vec{r}} = \frac{d}{dt}(\dot{\vec{r}}^2) = 0 \Rightarrow \dot{\vec{r}}^2 = \text{konst} = v_0^2$

② $\dot{\vec{r}}^2 = \text{konst} = v_0^2$ = začetna hitrost

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{r} = \frac{eg}{m}\left(\dot{\vec{r}} \times \frac{\vec{r}}{r^3}\right) \times \vec{r},$$

Oziroma: $\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = \frac{eg}{m} \frac{1}{r^3} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r}$

Upoštevamo:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \underbrace{\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}}}_{0} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}$$

In zapišemo:

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \frac{eg}{m} \frac{1}{r^3} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} \quad / \cdot m$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) = \frac{eg}{m} \frac{1}{r^3} (\vec{r} \times m\dot{\vec{r}}) \times \vec{r}$$

To lahko zapišemo z vrtilno količino $\vec{\Gamma} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$

(3) $\dot{\vec{\Gamma}} = \frac{eg}{m} \frac{1}{r^3} \vec{\Gamma} \times \vec{r}$

Pomnožimo z $\vec{\Gamma}$, ~~in dobi~~ da dobimo še (4) enačbo:

$\dot{\vec{\Gamma}} \cdot \vec{\Gamma} = 0$ saj $\vec{\Gamma} \times \vec{r} \perp \vec{\Gamma}$

$\dot{\vec{\Gamma}} \cdot \vec{\Gamma} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} \vec{\Gamma}^2\right) = 0$

$\Rightarrow |\vec{\Gamma}| = \Gamma = \text{konst} = \Gamma_0$ začetna vrtilna količina

Imamo enačbe:

(1) $\ddot{\vec{r}} \cdot \vec{r} = 0$

(2) $\dot{\vec{r}}^2 = \text{konst} = v_0^2$

(3) $\frac{\dot{\vec{\Gamma}}}{eg} = \frac{\vec{\Gamma} \times \vec{r}}{m r^3}$

(4) $|\vec{\Gamma}| = \text{konst} = \Gamma_0$

Zanima nas $\vec{r}(t)$!

• Najprej poiščemo smerni vektor do delca $\frac{\vec{r}}{r}$:

Poglejmo si: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^2}\dot{r}$

$$\dot{r} = \frac{d}{dt}\sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}} = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}} \cdot 2\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} - \frac{\vec{r}}{r^2} \frac{(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})}{r} = \frac{1}{r^3}\left(\dot{\vec{r}} \cdot \underbrace{(\vec{r} \cdot \vec{r})} - \vec{r}(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}})\right) =$$

$$= \frac{1}{r^3}(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \times \vec{r} = \frac{1}{m r^3} \vec{\Gamma} \times \vec{r} \underset{(3)}{=} \frac{\dot{\vec{\Gamma}}}{eg}$$

Namesto r^2

saj je $(a \times b) \times c = b(c \cdot a) - a(c \cdot b)$

Imamo torej: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{\dot{\vec{\Gamma}}}{eg}$

Integriramo in dobimo: $\boxed{\frac{\vec{r}}{r} = \frac{\vec{\Gamma}}{eg} + \frac{\vec{\Gamma}_{konst}}{eg}}$

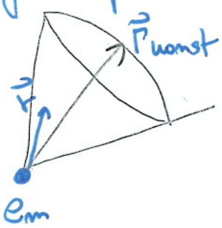
$\vec{\Gamma}_{konst}$ je nek konstantni vektor, določili ga bomo iz začetnih pogojev.

Zapišemo: $\frac{\vec r}{r} - \frac{\vec\Gamma_{konst}}{eg} = \frac{\vec\Gamma}{eg} \quad /^2$

$$\underbrace{1}_{konst} + \underbrace{\frac{\Gamma^2_{konst}}{e^2g^2}}_{konst} - \frac{2}{eg}\frac{\vec r}{r}\cdot\vec\Gamma_{konst} = \frac{\vec\Gamma^2}{eg} = \underbrace{\frac{\Gamma_0^2}{eg}}_{=konst}$$

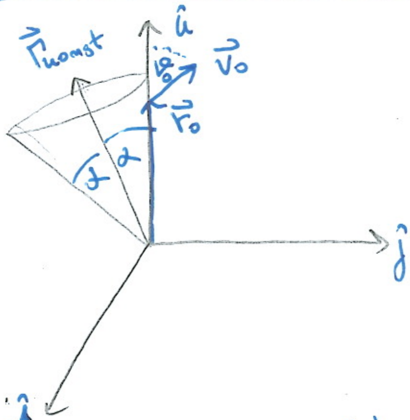
⇒ Torej je tudi $\frac{\vec r}{r}\cdot\vec\Gamma_{konst} = konst.$

To pomeni, da $\vec r$ oklepa konstanten kot z $\vec\Gamma_{konst}$. Ta vektor je pa konstanten, torej se $\vec r$ ~~giblje~~ maha ~~po~~ na stožcu!



Delec se torej giblje krožno, gor dol po stožcu.

• $\vec\Gamma_{konst}$ določimo iz začetnih pogojev



ϑ – kot med hitrostjo in lego delca

$\vec\Gamma_{konst}$ določata: a) os stožca
b) 2α - kot v vrhu.

Začetni pogoji:

$\vec r_0 = z_0\hat k$ začetna pozicija e^-, z njo v bistvu določimo os $\hat k$.

$\vec v_0 = \dot{\vec r}_0 = v_0\sin\vartheta_0\hat j + v\cos\vartheta_0\hat k$!

Recimo, da Hitrost začetna je v $\hat j\hat k$ ravnini, ~~saj mora bit vedno tangentna na stožec, saj se e- vedno giblje po njem~~.

$\vec\Gamma_0 = m\vec r_0\times\vec v_0 = -mz_0v_0\sin\vartheta_0\,\hat i = -\Gamma_0\hat i$

$\boxed{\Gamma_0 = mz_0v_0\sin\vartheta_0}$

Iz relacije $\frac{\vec r}{r} = \frac{\vec\Gamma}{eg} + \frac{\vec\Gamma_{konst}}{eg}$ dobimo $\vec\Gamma_{konst}$:

$$\boxed{\vec\Gamma_{konst} = eg\hat k + \Gamma_0\hat i}$$

→ ~~od~~ tu se vidi lahko, da $\vec v_0$ ~~delca~~ res tangentna na stožec, kar vedno velja, saj se delec giblje po njem

$$\boxed{|\vec\Gamma_{konst}| = \sqrt{(eg)^2 + \Gamma_0^2}}$$

velikost konstante

Kot ~~med~~ α stožca: $\vec\Gamma_{konst} = -\vec\Gamma_0 + \frac{\vec r_0}{r_0}eg$

$$\vec\Gamma_{konst}\cdot\frac{\vec r_0}{r_0} = eg = \left(\text{saj je } (eg\hat k + \Gamma_0\hat i)\cancel{eg}\hat k\right) = \cos\alpha\cdot|\vec\Gamma_{konst}|$$

⇒ $$\boxed{\cos\alpha = \frac{eg}{\sqrt{eg^2 + \Gamma_0^2}} \; ; \quad \tan\alpha = \frac{\Gamma_0}{eg}}$$

Iščemo še ~~velikost~~ oddaljenost e^- od izhodišča $r(t)$

$r(t)$ nam da vijačnico na stožcu 

Uporabili bomo: ② $\dot{\vec r}^{\,2} = \text{konst} = v_0^2$

① $\ddot{\vec r}\cdot\vec r = 0$

Zapišemo: $\frac{d}{dt}(\dot{\vec r}\cdot\vec r) = \underbrace{\ddot{\vec r}\cdot\vec r}_{①} + \dot{\vec r}^{\,2} = v_0^2$ / integriramo

$\dot{\vec r}\cdot\vec r = v_0^2 t + C = r v_0 \cos\vartheta$ → kot med $\vec v$ in $\vec r$.

Konstanto C dobim iz začetnega pogoja:

$\dot{\vec r}(0)\cdot\vec r(0) = z_0 v_0 \cos\vartheta_0 = C$

Dobimo: I) $r v_0 \cos\vartheta = v_0^2 t + z_0 v_0 \cos\vartheta_0$

II) $|\vec r \times m\dot{\vec r}| = r v_0 m \sin\vartheta = |\vec\Gamma| = \Gamma_0$ → začetna vrtilna količina

saj konst

$\Gamma_0 = m z_0 v_0 \sin\vartheta_0$

Iz I)^2 + II)^2 dobimo:

$\underbrace{r^2 v_0^2 \cos^2\vartheta + r^2 v_0^2 \sin^2\vartheta}_{r^2 v_0^2} = \Gamma_0^2 + (v_0^2 t + z_0 v_0 \cos\vartheta_0)^2$

$$\Rightarrow \boxed{r(t) = \frac{1}{v_0}\sqrt{\frac{\Gamma_0^2}{m^2} + (v_0^2 t + z_0 v_0 \cos^2\vartheta_0)^2}}$$

$$\boxed{\tan\vartheta(t) = \frac{1}{m}\frac{\text{II)}}{\text{I)}} = \Gamma_0 / m(v_0^2 t + z_0 v_0 \cos\vartheta_0)}$$

~~Rešitev problema je torej:~~ ~~Recimo, da je bil na začetku ob $t = 0$ $\vartheta_0 = \pi/2$~~

~~Recimo, da je bil ob $t = 0$ delec na najmanjši možni razdalji od kvazimagnetnega monopola:~~

Recimo, da je bil delec ob $t = 0$ na $\vartheta_0 = \pi/2$.

Potem je $\Gamma_0 = m z_0 v_0$ in $C = z_0 v_0 \cos\vartheta_0 = 0$ in rešitev je:

$$r(t) = \frac{1}{v_0}\sqrt{(z_0 v_0)^2 + (v_0^2 t)^2} = \sqrt{z_0^2 + v_0^2 t^2}$$

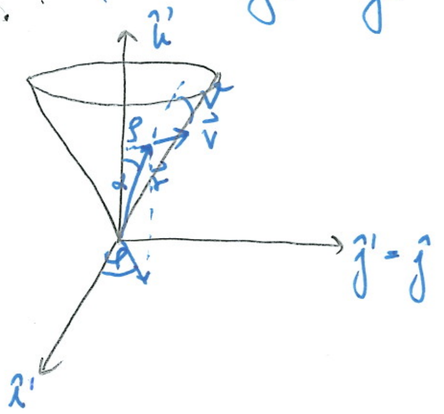
$$\tan\vartheta(t) = \frac{z_0 v_0}{v_0^2 t} = \frac{z_0}{v_0 t}$$

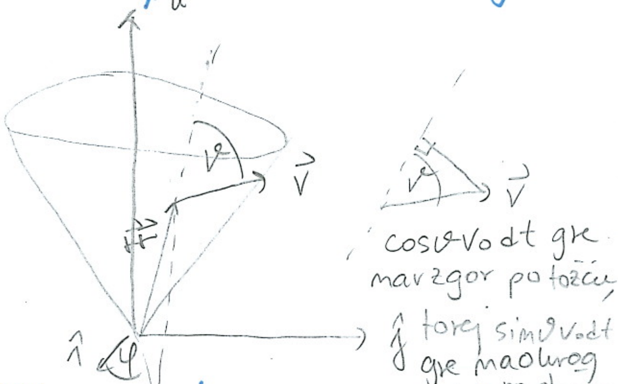
Dobimo iz I) in II)

Na stožcu s kotom $\tan\alpha = \frac{m z_0 v_0}{eg}$

To je že rešitev problema, imamo tri parametre, iz katerih dobimo $\vec r(t)$.

Za lažjo predstavo dogajanja pa gremo v koordinatni sistem, kjer je $\hat{u}' \parallel \vec{p}_{konst}$ in gibanje izrazimo v koordinatah $r(t)$ in $\varphi(t)$, kjer φ kot med projekcijo $\vec{r}$ na $\hat{x}$-$\hat{y}$ ravnino in osjo $\hat{x}$.





Kot $\varphi(t)$ izračunamo tako:

$dl = v_0 \sin\vartheta \, dt$ → To je lok v xy ravnini, ki ga delec naredi v času dt.

$$d\varphi = \frac{dl}{\rho} = \frac{v_0 \sin\vartheta \, dt}{r \sin\alpha} = \frac{r v_0 \sin\vartheta}{r^2 \sin\alpha} dt = \frac{z_0 v_0}{\sin\alpha} \frac{dt}{z_0^2 + v_0^2 t^2}$$

Po definiciji kota

saj $\rho = r\sin\alpha$, projekcija r na xy.

$r v_0 \sin\vartheta = \frac{p_0}{m} = z_0 v_0$

$$\int_0^{\varphi} d\varphi = \frac{z_0 v_0}{\sin\alpha} \int_0^t \frac{dt'}{z_0^2 + v_0^2 t'^2} = \frac{1}{\sin\alpha} \arctan\left(\frac{v_0 t}{z_0}\right)$$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\frac{x}{a}$$

Rešitev je:

$$\boxed{\begin{aligned} r(t) &= \sqrt{z_0^2 + v_0^2 t^2} \\ \varphi(t) &= \frac{1}{\sin\alpha} \arctan\left(\frac{v_0 t}{z_0}\right) \\ &\text{Gibanje pod kotom } \alpha: \ \tan\alpha = \frac{m z_0 v_0}{eg} \end{aligned}}$$

$\vec{r}(t) = r(t)\sin\alpha\cos\varphi(t)\,\hat{\imath}' + r(t)\sin\alpha\sin\varphi(t)\,\hat{j}' + r(t)\cos\alpha\,\hat{u}'$

Ob $t=0$ ~~sem~~ je e^- najbližje e_m, ~~za~~ $t>0$ pa se od njega oddaljuje. e^- se po spirali giblje do e_m, doseže $r_{min} = z_0$ ob času $t=0$ in se nato po spirali odpelje stran.

Kolikokrat se zavrti okrog $\hat{u}$?

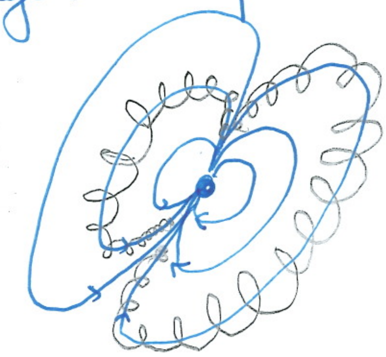
$$\left.\begin{aligned} \varphi(t\to\infty) &= \frac{1}{\sin\alpha}\pi/2 \\ \varphi(t\to-\infty) &= -\frac{1}{\sin\alpha}\pi/2 \end{aligned}\right\} \Delta\varphi = \frac{1}{\sin\alpha}\pi \ ; \quad N = \frac{\Delta\varphi}{2\pi} = \frac{1}{2\sin\alpha}$$

To gibanje v bližini monopola lahko posplošimo na gibanje e^- v Zemljinem magnetnem polju.

e^- in protoni - nabiti delci iz sončnega vetra se ujamejo v Zemljino magnetno polje (ko se ji približajo). Začnejo se gibat po spirali proti enemu od polov.

Ko so blizu pola, so že v atmosferi, kjer lahko trčijo v molekule zraka. Če trčijo, se molekule zbudijo v višja energijska stanja. Čez čas je vrnejo nazaj v osnovno stanje, spremembo energije oddajo v obliki svetlobe = severni sij.

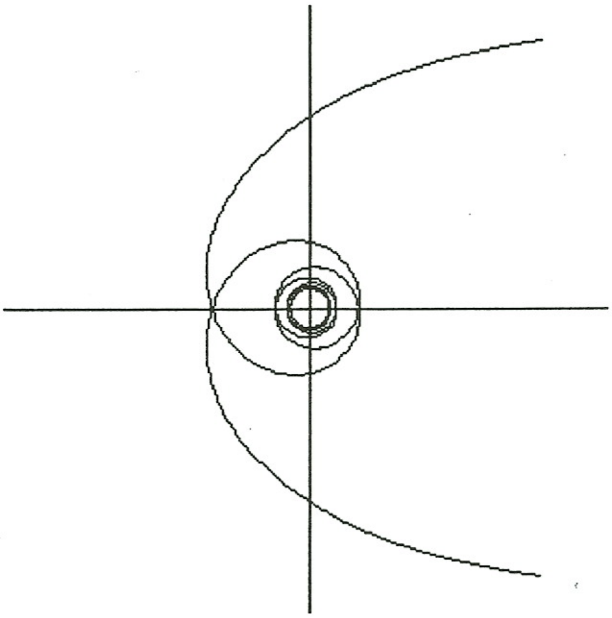
Če nabit delec ne trči v molekule, se po spirali odpelje stran od pola. Giblje se po spirali proti drugemu polu.



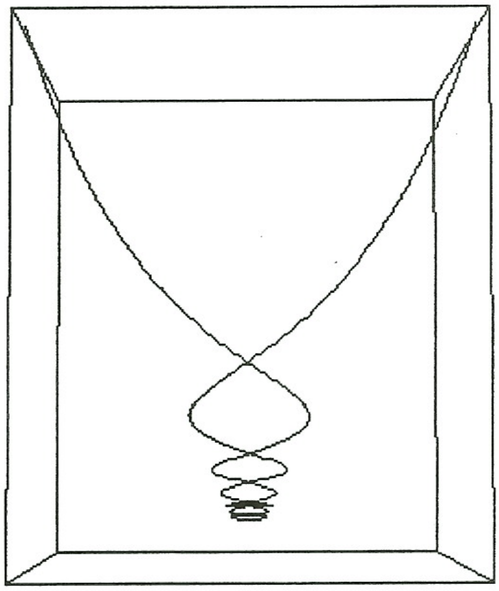
Tir elektrona v polju tezkega magnetnega monopola :

1) z0 = 0.01 , s = 0.1 , N = 8 ; $s = \frac{eg}{m}$; V_0 določen preko H.

vzdolz osi z



od strani



2) z0 = 0.01 , s = 0.05 , N = 8