# IZBIRA OBLIKE VODILA ZA HARMONSKO NIHANJE

Pri matematičnem nihalu je rešitev harmonsko nihanje s frekvenco neodvisno od amplitude nihanja upravičena le za majhne odmike iz ravnovesne lege. Pri tej nalogi bomo poiskali, kakšno vodilo moramo imeti, da bo masa $m$ v gravitacijskem polju po njem pri vseh amplitudah nihala z enako frekvenco!

- Matematično nihalo:


$$L = \frac{1}{2} m l^2 \dot{\vartheta}^2 + mgl\cos\vartheta$$

enačba gibanja:

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l}\sin\vartheta = 0$$

če $\vartheta \sim 0$, se poenostavi v enačbo harmonskega nih.

$$\ddot{\vartheta} + \frac{g}{l}\vartheta = 0$$

Tu potuje masa po krožnici z radijem $l$ in s periodo $T = 2\pi\sqrt{l/g}$.

- Iščemo pot, ki ji sledi delec, da bo nihal harmonsko:


Splošno krivuljo zapišemo v parametrični obliki:

$$\cancel{x(s)} \quad x = x(s)$$
$$y = y(s),$$

kjer je $s$ odmik vzdolž krivulje:

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \quad (*)$$
$$s = \int\sqrt{dx^2 + dy^2}$$

- Harmonsko nihanje opiše $L = \frac{1}{2} m\dot{s}^2 - \frac{1}{2} k s^2$,
- delec v gravitacijskem polju pa $L = \frac{1}{2} m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy$

Sistem mora imeti take vezi – tako obliko vodila $(x(s), y(s))$, da se delec v grav. p. prevede na harmonsko gibanje. Da dobimo pravo vez, primerjamo člene v Lagrangeovih funkcijah.

- Kinetični: $\dot{x}^2+\dot{y}^2 = \left(\frac{dx}{ds}\right)^2\dot{s}^2+\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\dot{s}^2 = \dot{s}^2\left(x'^2+y'^2\right)$

Za harmonsko mihanje mora veljati:

$$x'^2+y'^2=1 \rightarrow$$ To je že izpolnjeno z (*), torej da je gibanje vzdolž krivulje parametrizirane z s. odmikom

- Potencialni:

$$mgy = \frac{1}{2}ks^2$$

$$mgy = \frac{1}{2}k\left[\int\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy\right]^2 \quad /\sqrt{\phantom{x}}$$

$$\sqrt{mgy} = \sqrt{\frac{k}{2}}\int\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}\,dy \quad /\frac{d}{dy}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\sqrt{mg}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{k}{2}}\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} \quad /^2$$

$$\frac{mg}{4y} = \frac{k}{2}\left(1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right)$$

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 = \frac{mg}{2yk}-1 \Rightarrow \underline{\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2ky}{mg-2ky}}}$$

Taka zveza mora veljati med x in y, da je harmonsko mihanje, ~~in dams~~ sedaj to krivuljo, po kateri se ~~masa~~ giblje, parametriziramo z $\varphi$ kot $\frac{dy}{dx}=\tan\varphi$
- polarni kot.

$$\tan\varphi = \sqrt{\frac{2ky}{mg-2ky}}$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{1}{1+\cot^2\varphi}} = \sqrt{\frac{1}{1+\frac{mg-2ky}{2ky}}} = \sqrt{\frac{2ky}{mg}}$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{mg}{2k}\sin^2\varphi = \frac{mg}{4k}(1-\cos 2\varphi) = r(1-\cos 2\varphi)$$

$$\frac{d\varphi}{dx} = \left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^{-1}\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{=\tan\varphi} = \left(r\,2\sin 2\varphi\right)^{-1}\tan\varphi = \frac{1}{2r}\frac{\sin\varphi/\cos\varphi}{2\cos\varphi\sin\varphi} = \frac{1}{4r}\frac{1}{\cos^2\varphi}$$

$$x = 4r\int d\varphi\cos^2\varphi = 4r\left(\frac{\sin 2\varphi}{4}+\frac{\varphi}{2}+c\right)$$

$\sin 2\varphi = \cancel{\frac{1+\cos 2\varphi}{2}}\ 2\sin\varphi\cos\varphi$

~~i c=0 → da je~~ $x=0$ ko $\varphi=0$

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r(2\varphi+\sin 2\varphi+4c)\\ y &= r(1-\cos 2\varphi)\end{aligned}}$$

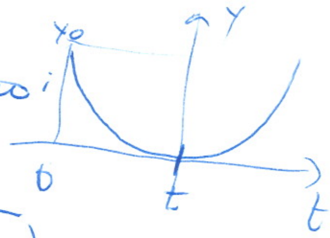
Cikloida, take oblike mora biti vodilo

$$r = \frac{gm}{4k} = \frac{g}{4\omega_0^2}$$

Perioda nihanja:

$$t = \int \frac{ds}{v} = \int \sqrt{\frac{(dx)^2 + (dy)^2}{2g(y_0 - y)}}$$

čas med najvišjo in najnižjo točko;




v dobimo iz ohranitve energije:

$$mgy_0 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}mgy \Rightarrow v = \sqrt{2g(y_0 - y)}$$

~~$(dx)^2 + (dy)^2 = r$~~

$$x = r(\vartheta + \sin\vartheta + 4c)$$
$$y = r(1 - \cos\vartheta) \qquad \vartheta = 2\varphi$$

$$(dx)^2 + (dy)^2 = (r(1+\cos\vartheta)d\vartheta)^2 + (r\sin\vartheta)^2 d\vartheta^2$$
$$= (2r^2 + 2r^2\cos\vartheta)(d\vartheta)^2 = 2r^2(1+\cos\vartheta)(d\vartheta)^2$$

$$y_0 - y = [-\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta]r$$

$$t = \sqrt{\frac{2r^2}{2gr}} \int_{\vartheta_0}^{0} \sqrt{\frac{1+\cos\vartheta}{-\cos\vartheta_0 + \cos\vartheta}}\, d\vartheta = \sqrt{\frac{r}{g}}\,\pi$$

$\vartheta_0 - y_0$

$0 - 0$

$$\Rightarrow T = 4\pi\sqrt{r/g}$$

celotna perioda nihanja

Torej je r kot „efektivna dolžina" nihala.