SIPANJE NA ŠKATLASTEM POTENCIALU

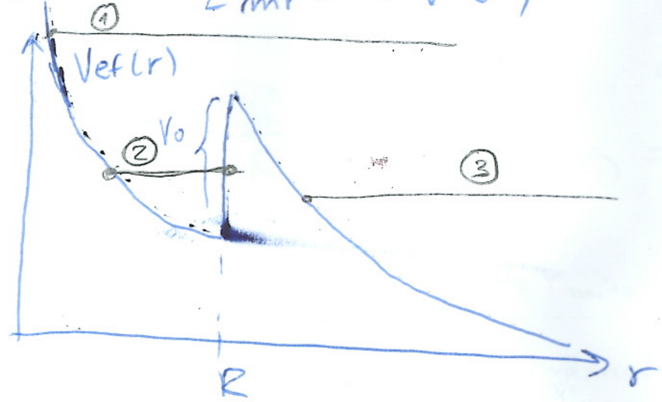
Imejmo centralni potencial, ki je stopničast:

$$V(r) = \begin{cases} V_0; & r > R; \quad V_0 > 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

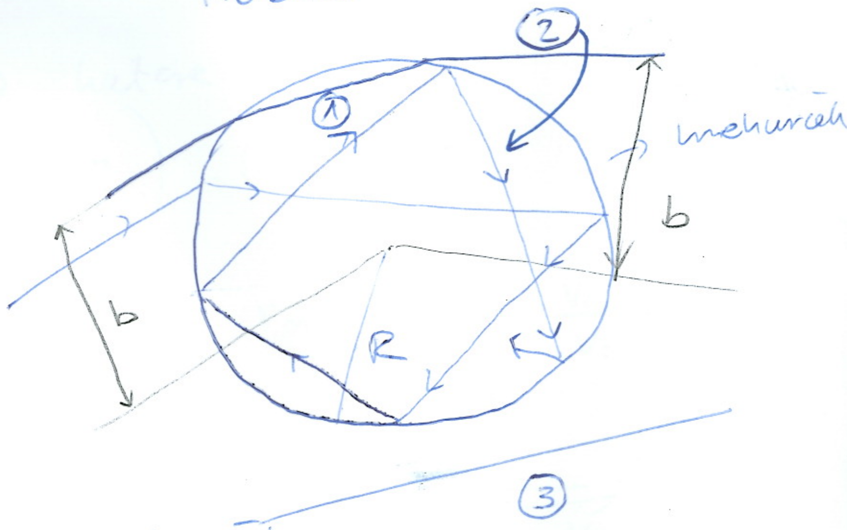
Poišči možne orbite in poišči pogoj za zaključene orbite znotraj tega potenciala / mehurčka. Poznamo začetno kinetično energijo T_0 in vhodni parameter b.

Efektivni potencial:

$$V_{ef}(r) = \frac{1}{2}\frac{p_\varphi^2}{mr^2} + V(r)$$



Možne



Možne orbite:

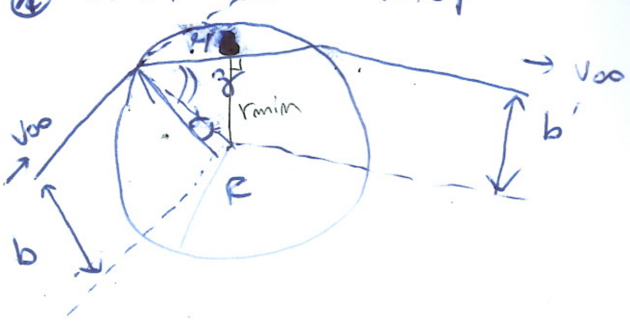
3 : Delec gre mimo tega mehurčka.

1 Delec vstopi v mehurček in nato izstopi

2 Delec je ~~ujam~~ ujet v mehurčku, odbija se v njem.

3 - premo gibanje

1 orbite, ko vstop



Recimo, da vstopi delec v mehurček pri vhodnem parametru (impact parameter) b.

Ker se velikost vrtilne količine ohranja: p_φ, je

$$p_\varphi = \underset{\text{preden gre v mehur}}{m v_\infty b} = \underset{\text{ko izstop.}}{m v_\infty b'} \Rightarrow b = b'$$

V_∞ - hitrost izven mehurčka, enaka hitrosti po izstopu mehurčka, saj se energija ohranja.

$$H = \underbrace{T_\infty + V_0}_{\text{energija izven mehurčka}} = \underbrace{\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{p_\varphi^2}{2mr^2} + 0}_{\text{znotraj mehurčka}} = T_0 \rightarrow \text{kin. en. znotraj mehurčka}$$

T_∞ = kinetična energija izven mehurčka $= \frac{1}{2}mV_\infty^2$.

$$T_0 = \frac{1}{2}mv_0^2 = T_\infty + V_0$$

$$\Rightarrow \quad v_0 = \sqrt{\frac{2}{m}\left(T_\infty + V_0\right)}$$

Minimalna razdalja, do katere pride:

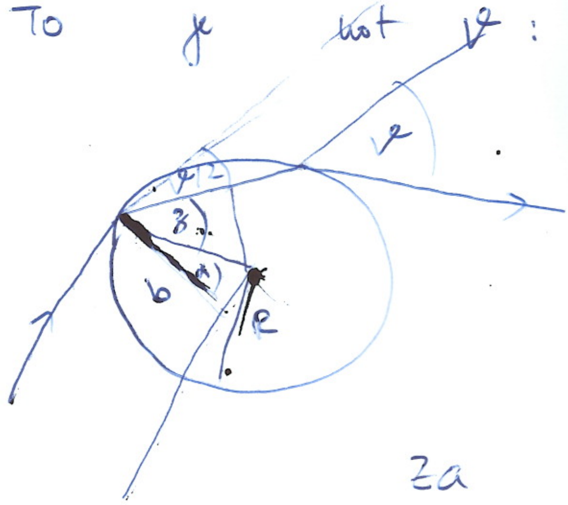
$$\left(\cos\alpha = \frac{b}{R} \quad ; \quad \sin\gamma = \frac{r_{min}}{R}\right) \quad (*)$$

$$p_\varphi = mV_\infty b = \underbrace{mV_0 r_{min}}_{\text{v minimalni razdalji}} \Rightarrow \quad r_{min} = b\,\frac{V_\infty}{V_0}$$

$$r_{min} = b\,\frac{\sqrt{\frac{2}{m}T_\infty}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(T_\infty + V_0\right)}} = b\sqrt{\frac{T_\infty}{T_\infty + V_0}} = \frac{b}{\sqrt{1+\frac{V_0}{T_\infty}}}$$

Za kakšen kot se odkloni?

To je kot ϑ:



$$\vartheta/2 = \frac{\pi}{2} - \alpha - \gamma$$

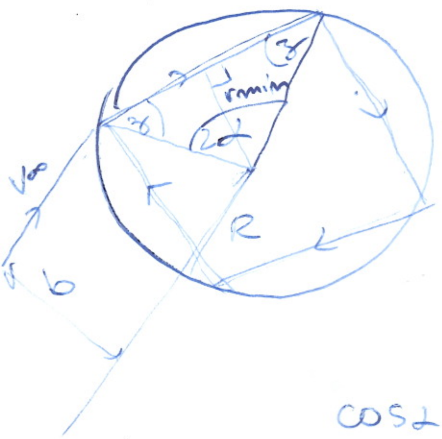
$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \sin(\alpha+\gamma) = \sin\alpha\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha$$

$$\cos\frac{\vartheta}{2} \overset{(*)}{=} \sqrt{\left(1-\left(\frac{b}{R}\right)^2\right)\left(1-\frac{r_{min}^2}{R^2}\right)} + \frac{r_{min}}{R}\,\frac{b}{R}$$

Za tak kot se odkloni.

$$\cos\frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\left(1-\left(\frac{b}{R}\right)^2\right)\left(1-\frac{1}{1+\frac{V_0}{T_\infty}}\left(\frac{b}{R}\right)^2\right)} + \frac{b}{R}\,\frac{b}{R}\,\frac{1}{\sqrt{1+\frac{V_0}{T_\infty}}}$$

ogo ② – Pogoj, da je že po enem obhodu v mehurčku orbita zaključena.



zaključena orbita je, če se giblje po n-kotniku.

To je: $\frac{2\pi}{(2\alpha)} = n$

$$\cos\alpha = \frac{r_{min}}{R} = \cos\frac{\pi}{n}$$

$$r_{min} = R\cos\frac{\pi}{n}$$

ko smo notri: $p_\varphi = m v_0 r_{min} = m v_0 R \cos\frac{\pi}{n}$

$$T_0 = H = \frac{1}{2} m v_0^2, \quad v_0 = \sqrt{\frac{2T_0}{m}} = \sqrt{\frac{2(T_\infty + V_0)}{m}}$$

$$\boxed{p_\varphi = \sqrt{2m(T_\infty + V_0)}\, R\cos\frac{\pi}{n}}$$

$p_\varphi = mvb = kg\frac{m}{s}m$

$\sqrt{kg}\ \frac{kg\,m^2}{s^2}\ m = \frac{kg\,m^2}{s}$

Tako vrtilno količino mora imet pri dati začetni energiji $T_\infty + V_0$.

SIPANJE NA ŠKATLASTEM POTENCIALU

Nadaljevanje naloge centralni potencial stopnica.
Kakšen je pogoj da delec prodre v mehurček in kakšen je totalni sipalni presek za to?

Pogoj: $H > V_{ef}(R)$

$$V_0 + T_\infty > \frac{p_\varphi^2}{2mR^2} + V_0$$

$$T_\infty > \frac{m^2 v_\infty^2 b^2}{2mR^2}$$

$$T_\infty > T_\infty \frac{b^2}{R^2}$$

$$\Rightarrow \quad b < R\sqrt{1 \cancel{+\frac{V_0}{T_\infty}}}$$

Mejni vpadni parameter b, da še prodre moter:

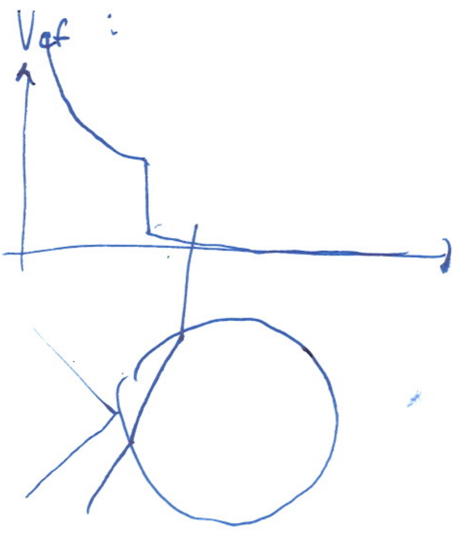
$$b_{max} = R\sqrt{1 \cancel{+\frac{V_0}{T_\infty}}}$$

$$\sigma_{prodor} = \pi b_{max}^2 = \pi R^2 \left(1 \cancel{+\frac{V_0}{T_\infty}}\right)$$

Enak je presek mehurčka, ker je pač mehurček ~~nižje~~ prostor z nižjim potencialom, tako da bo itak moter vdrl.

Poglej si primer, ko pa $V(r) = \begin{cases} V_0 > 0; & r < R \\ 0; & r \geq R \end{cases}$

Tedaj je $\sigma_{prodor} = \pi R^2 \sqrt{1 - \frac{V_0}{T_\infty}}$



$\underline{H > V_{ef}(R)}$: da prodre v mehurček

mejno: $H = V_{ef}(R)$

$$T_\infty = V_0 + \frac{p_\varphi^2}{2mR^2}$$

$$T_\infty - V_0 = \frac{m^2 b_0^2 v_\infty^2}{2mR^2} = \frac{b_0^2}{R^2} T_\infty$$

$$b_0 = R\sqrt{\left(1 - \frac{V_0}{T_\infty}\right)}$$