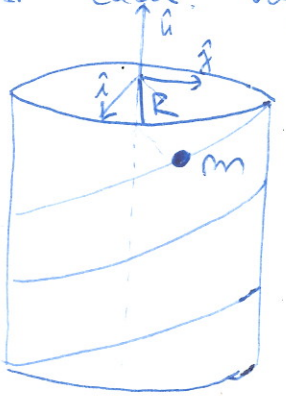
VALJ S SPIRALNIM VODILOM

Imamo valj, okrog katerega je ovito spiralno vodilo, po katerem se giblje masa m. Vztrajnostni moment valja je $J = \frac{1}{2}MR^2$, kjer je R radij valja in M njegova masa, spiralno vodilo pa karakterizira $p = \frac{dz}{d\varphi}$, ki pove za koliko se spusti masa v vertikalni smeri, če se zasuka za nek kot. p je konstanten po celem valju. Zanima nas, kakšno je gibanje sistema v odvisnosti od časa. Valj je prosto vrtljiv okrog svoje vertikalne osi.



- Koordinate:

  z - koordinata v smeri $\hat{k}$ mase

  φ - kot zasuka mase glede na valj
  polarni kot med projekcijo $\vec{r}$ na xy ravnino in osjo $\hat{x}$.

  ϕ - kot zasuka valja

  r - oddaljenost mase od izhodišča

- Vezi:

  $r = R$, masa se giblje po plašču valja

  $z = \cancel{z_0} + p(\varphi - \phi)$, spust mase je povezan s p in kotom zasuka.

Delamo v polarnih koordinatah:

$x = R\cos\varphi$

$y = R\sin\varphi$

$z = z_0 + p(\varphi_0 - \phi)$

S tako izbiro koordinat že upoštevam vse vezi. Le dve generalizirani koordinati imamo, φ in ϕ.

- ~~Lag~~ Kinetična energija:

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 = \frac{1}{2}m\left(R^2\sin^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + R^2\cos^2\varphi\,\dot{\varphi}^2 + p^2(\dot{\varphi} - \dot{\phi})^2\right) + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 =$$

$$= \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mp^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mp^2\dot{\phi}^2 - mp^2\dot{\varphi}\dot{\phi} + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2$$

- Potencialna energija:

$$V = \underbrace{mgz_0}_{V_0} + mgp(\varphi - \phi)$$

- Lagrangean:

$$L = T - V = \frac{1}{2}mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mp^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}mp^2\dot{\phi}^2 - mp^2\dot{\varphi}\dot{\phi} + \frac{1}{2}J\dot{\phi}^2 - mgp(\varphi - \phi) - V_0$$

Euler - Lagrangeove enačbe :

φ: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\varphi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$

$$mR^2\ddot\varphi + mp^2\ddot\varphi - mp^2\ddot\phi + mgp = 0$$

ϕ: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot\phi}\right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$

$$mp^2\ddot\phi - mp^2\ddot\varphi + \cancel{\tfrac{1}{2}}J\ddot\phi - mgp = 0$$

Rešujemo sistem gibalnih enačb:

$$\boxed{\begin{array}{ll} (1) & (R^2+p^2)\ddot\varphi - p^2\ddot\phi + gp = 0 \\ (2) & -p^2\ddot\varphi + (p^2 + \frac{1}{\cancel{2}m}J)\ddot\phi - gp = 0 \end{array}}$$

(1) $(p^2 + J/m)$ + (2) $\cdot\, p^2$:

$$\underbrace{(R^2+p^2)(p^2+\tfrac{J}{m})\ddot\varphi - p^4\ddot\varphi}_{\ddot\varphi\,(R^2p^2 + R^2\frac{J}{m} + p^2 J/m)} \underbrace{+ gp(p^2 + J/m) - gpp^2}_{gpJ/m} = 0$$

$$\ddot\varphi = -\frac{gpJ/m}{R^2p^2 + R^2J/m + p^2J/m} = -\alpha$$

<u>Rešitev</u>: $\varphi(t) = -\frac{\alpha}{2}t^2 + At + B$

~~(1)$(p^2+ J/m)$ + (2)$\cdot p^2$~~ se za ϕ:

(1) p^2 + (2) (R^2+p^2)

$$\cancel{-p^4\ddot\phi} + \cancel{gp^3} + (p^2 + J/m)(R^2+p^2)\ddot\phi - gp(R^2 + \cancel{p^2}) = 0$$

$$(p^2R^2 + JR^2/m + Jp^2/m)\ddot\phi - gpR^2 = 0$$

$$\ddot\phi = \frac{gpR^2}{p^2R^2 + R^2J/m + p^2J/m} = \gamma = \frac{R^2m}{J}\alpha \underset{\uparrow}{=} 2\alpha$$

za valj $J = \frac{1}{2}mR^2$

<u>Rešitev</u>: $\phi(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2 + Ct + D$

<u>Začetni pogoji</u>:

$\phi(t=0) = 0$; $\dot\phi(t=0) = 0$

$\varphi(t=0) = 0$; $\dot\varphi(t=0) = 0$

Recimo, da sta valj in masa na začetku mirovala.

$$\varphi(t) = -\frac{\alpha}{2}t^2 \quad ; \quad \phi(t) = \frac{1}{2}\gamma t^2$$

Valj se začne vrtet v nasprotno smer kot masa, skladno z ohrani- bilo vrtilne količine. (?)