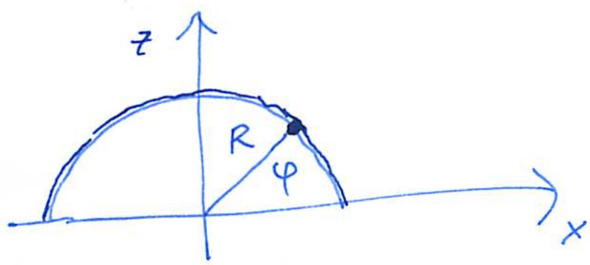
Lagrangeov formalizem

Newtonove enačbe povsem zadoščajo za računanje vseh sistemov delcev z znanimi silami. Lagrangeov formalizem pogosto zelo olajša formulacijo enačb gibanja. Posebno tam v primeru vezi in posplošenih koordinat, kot sledi.

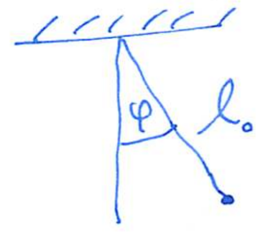
- gibanje delca omejeno (z vezmi).

npr.: a) delec se giblje ~~po~~ po površini krogle (stožca)



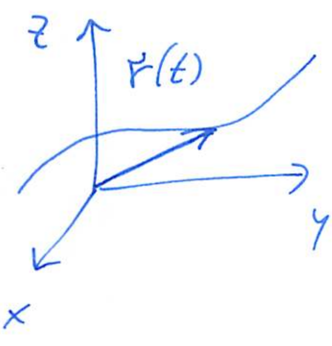
$x^2+y^2+z^2=R^2$ koordinate niso neodvisne

b) nihalo



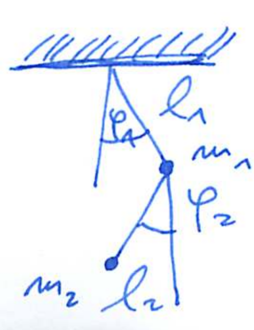
$x^2+y^2=l_0^2$

c)



gibanje po krivulji

d) dvojno nihalo



v splošnem so tvoji koordinati med seboj povezane z vezmi,

$$\boxed{f(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_N, t) = 0} \iff \text{holonomna vez}$$

Če vez ni odvisna od časa eksplicitno

$\iff$ skleronomna vez

Če odvisna od časa,

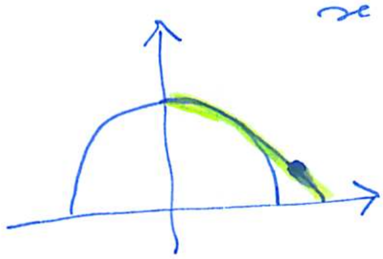
$$f(\{\vec{r}_i\}, t) = 0$$

$\iff$ reonomna vez

Neholonomna vez – se ne da zapisati kot

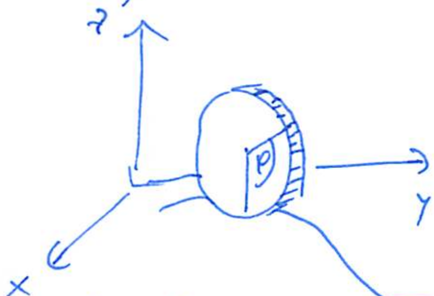
$$f = 0.$$

npr.: a) gibanje kroglice pod vplivom teže, po fiksni krogli; dokler a se kotali po površine: se loči od



$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 - R^2 \geq 0.}$$

b) kotaljenje diska po ravnini



gl. npr. Goldstein.

Sistem holonomnih vezi

$$f_k(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots \vec{r}_N, t) = 0; \quad k = 1, \ldots K$$

npr.: gibanje po krogli in ravnini,

$$f_1 = x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$$

$$f_2 = y - d = 0$$

$K = 2$

krivulja v 3D

Posplošene (generalizirane) koordinate

N delcev opišemo s $3N$ koordinatami

če imamo K vezi, potem

$$n = 3N - K$$ neodvisnih koordinat,

$$q_j, \quad j = 1, 2, \dots n$$

Originalne koordinate izrazimo

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i(q_1, q_2, \dots q_n, t) \qquad i = 1, 2, \dots N$$

Predpostavili bomo tudi, da se vedno da izraziti

$$q_j = q_j(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots) \text{ in } K \text{ vezi.}$$

Posplošenih koordinat običajno ne moremo združiti po 3 skupaj v vektorje (kot to delamo s kartezičnimi).

<u>Primer</u>: polarne koordinate,

$$\vec{r} = r(\cos\varphi, \sin\varphi); \quad x^2 + y^2 = r^2.$$

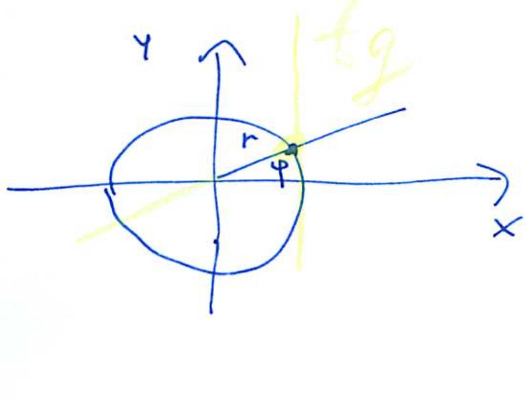
$$\frac{y}{x} = \tan\varphi$$

& upoštevanje, v katerem kvadrantu je $\vec{r}$

npr.: $\varphi = \mathrm{arctg}\frac{y}{x} + \pi$, če $x<0$, $y<0$

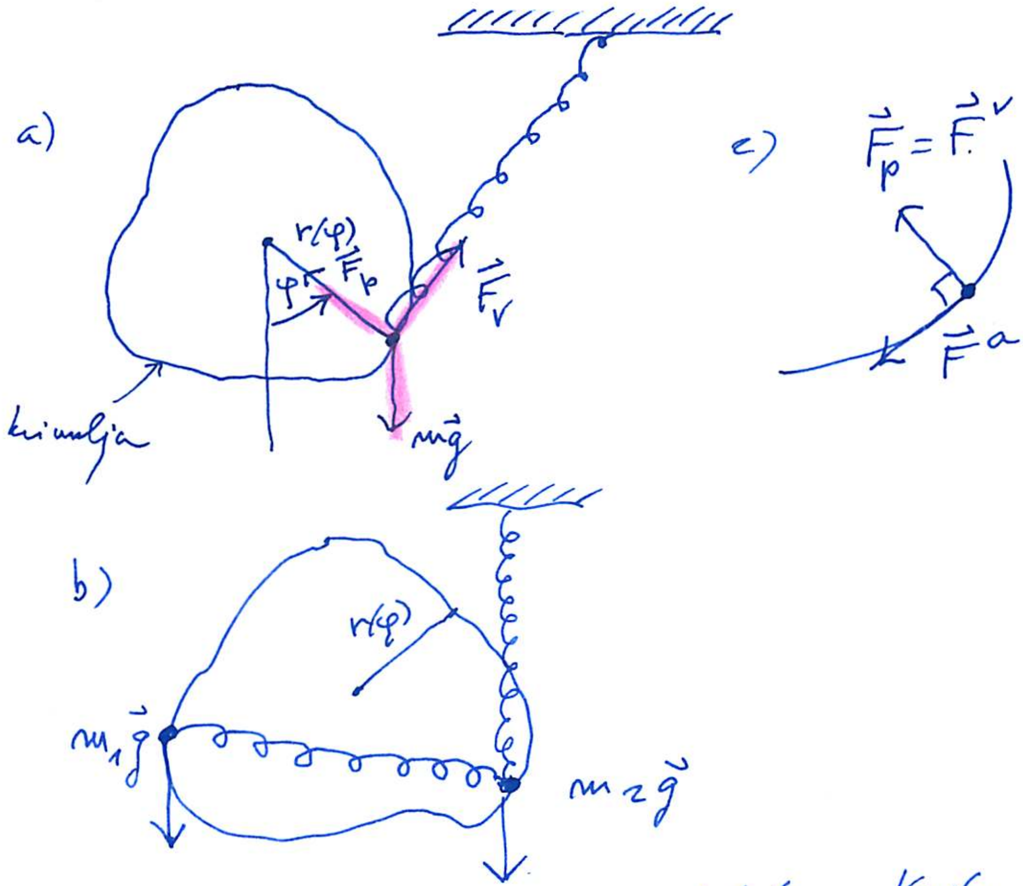
itd.

$$q_1 = r$$
$$q_2 = \varphi$$



∴ D'Alembertov princip

primer: gibanje uteži na zanki v navpični ravnini; brez trenja



Najprej poglejmo pogoj statike. Vsota vseh sil (in navorov) na vsako telo $= 0$,

$\vec F_i = 0$ $\quad$ $\vec F_i$ je že vsota vseh sil

Nato si zamislimo virtualni premik (v skladu z vezmi) $\delta \vec r_i$

npr. pri kroženju

$$\vec r = (x, y) = r(\varphi)(\cos\varphi, \sin\varphi)$$

če $r(\varphi) = r_0$: $\quad d\vec r = r_0(-\sin\varphi\, d\varphi, \cos\varphi\, d\varphi) =$
$= r_0(-\sin\varphi, \cos\varphi)\, d\varphi$

($\vec r \cdot d\vec r = 0$ v tem primeru) v tangentni smeri torej

torej velja

$$\vec F_i \cdot \delta \vec r_i = 0 \quad (\text{ker je } \vec F_i = 0)$$

to velja tudi za vsoto po telesih,

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Sedaj vsako silo razdelimo na dva dela, aktivno $\vec{F}_i^{\,a}$ in silo vezi $\vec{F}_i^{\,v}$,

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\,a} + \vec{F}_i^{\,v} ,$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{\,a} \cdot \delta \vec{r}_i + \underbrace{\sum_i \vec{F}_i^{\,v} \cdot \delta \vec{r}_i}_{\text{celotno delo sil vezi, } A^v} = 0$$

Predpostavljamo, da je $A^v = 0$. To je res, npr., če ni trenja pri drsenju. Je res pri togih telesih, kadar je sila vezi $\perp$ na premik (gl. 2). Če je tako, velja

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\,a} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 .$$

To je princip virtualnega dela (statika).
Bernoulli in D'Alembert sta to posplošila na splošno gibanje; izhajamo iz

$$\vec{F}_i = m_i \ddot{\vec{r}}_i$$

oz.

$$\vec{F}_i - m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0$$

Sedaj to štejemo kot novo silo, ki je $= 0$.
Formalno enako prejšnjem primeru.

$$\sum_i (\vec F_i - m_i \vec a_i)\cdot \delta \vec r_i = 0$$

Ponovno razstavimo sile,

$$\sum_i (\vec F_i^{\,a} - m_i\vec a_i)\cdot\delta\vec r_i + \underbrace{\sum_i \vec F_i^{\,v} \cdot \delta \vec r_i}_{=0} = 0$$

ponovno: $=0$

med seboj odvisni

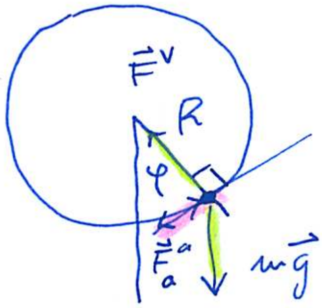
$$\Rightarrow \boxed{\sum_{i=1}^{N} (\vec F_i^{\,a} - m_i\vec a_i)\cdot\delta\vec r_i = 0 .}$$

To je D'Alembertov princip.

pomembno: vsota $=0$, posamični členi ne nujno. (zaradi vezi je tako)

primeri:

I.



$R\,\delta\varphi = \delta s$ lok

$q_1 = \varphi$ (ali s)

$q_2 = r$

vez: $r - R = 0$

$F^a = mg\sin\varphi$

$A^a = -mgR\sin\varphi\,\delta\varphi$

$$a_t = \frac{d^2s}{dt^2} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

$$(F^a - ma_t)\,\delta s = 0$$

$$\Big(-mg\sin\varphi - mR^2\frac{d^2\varphi}{dt^2}\Big)\delta\varphi = 0 \qquad \text{za } \forall\,\delta\varphi$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{g\sin\varphi}{R} = 0 .$$

enačba gibanja za q_i.

$r = R$