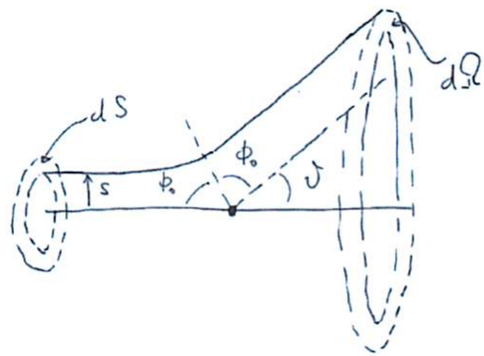
3.5 Sipanje delcev v centralnem potencialu

(NEOBVEZNO)

Obravnavajmo sedaj nevezano gibanje v centralnem potencialu $V = \tilde{\alpha}/r$. Privzeli bomo odbojni potencial $\tilde{\alpha} > 0$, čeprav so rešitve za privlačni potencial podobne. Primer takega gibanja je sipanje nabitih delcev (prvotno delcev α) na potencialu jedra (oz. atoma, saj imajo elektroni dosti manjšo maso), kar je zgodovinsko znano kot Rutherfordovo sipanje, ki je vodilo do razumevanja zgradbe atoma. V računu upoštevamo, da je masa jedra $M \gg m$ dosti večja od mase sipanega delca, kar pa je pri dejanskem Rutherfordovem sipanju le približek.



Želimo izračunati diferencialni sipalni presek, definirano kot razmerje med tokom delcev sipanih v prostorski kot $d\Omega$ in vpadlo enakomerno gostoto toka vpadlih delcev

$$\sigma(\Omega) d\Omega = \frac{dI}{j}. \tag{3.52}$$

Ker ima problem sferično simetrijo, je sipalni presek odvisen le od odklonskega kot θ, torej $\sigma(\Omega) \to \sigma(\theta)$. Če povežemo sedaj diferenciale prostorskega kota Ω s kotom θ in toka I z oddaljenostjo od osi s,

$$d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta, \qquad dI = jdS = 2\pi j s ds, \tag{3.53}$$

dobimo zvezo

$$\sigma(\theta) = \frac{sds}{\sin\theta d\theta}. \tag{3.54}$$

Pri sipanju v $1/r$ potencialu so orbite hiperbole, izražene v isti obliki kot v enačbi (3.28),

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\big(1 - \epsilon\cos(\phi-\phi_0)\big) = \frac{1}{\tilde{p}}\big(\epsilon\cos(\phi-\phi_0) - 1\big), \tag{3.55}$$

vendar so sedaj $p < 0$, $E > 0$ in $\epsilon > 1$,

$$p = \frac{l^2}{m\alpha} = -\frac{l^2}{m\tilde{\alpha}} = -\tilde{p}, \qquad \epsilon = \sqrt{1 + \frac{2El^2}{m\tilde{\alpha}^2}} > 1. \tag{3.56}$$

Če za kot ϕ_0 izberemo simetralo hiperbole, sledi iz enačbe (3.55) pogoj za asimptoto hiperbole pri vpadnem curku z $\phi = 0$,

$$r \to \infty: \quad \epsilon\cos\phi_0 = 1 \quad \Longrightarrow \quad \cos\phi_0 = \frac{1}{\epsilon} < 1, \tag{3.57}$$

torej bo $\phi_0 < \pi/2$ in sipalni kot

$$\theta = \pi - 2\phi_0 \quad \Longrightarrow \quad \cos\phi_0 = \cos(\frac{\pi-\theta}{2}) = \sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{\epsilon}. \tag{3.58}$$

Sedaj povežemo kot θ preko ϵ z s. Upoštevamo relacije

$$l = mvs \quad \Longrightarrow \quad l^2 = m^2v^2s^2 = 2mEs^2, \tag{3.59}$$

$$\epsilon^2 - 1 = \sin^{-2}\frac{\theta}{2} - 1 = \mathrm{ctg}^2\frac{\theta}{2} = \frac{2El^2}{m\tilde{\alpha}^2}, \tag{3.60}$$

od koder sledi

$$\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{4E^2s^2}{\tilde{\alpha}^2}} = \frac{2Es}{\tilde{\alpha}}. \tag{3.61}$$

Relacijo (3.61) uporabimo v enačbi (3.54),

$$ds = -\frac{\tilde{\alpha}}{4E}\frac{d\theta}{\sin^2(\frac{\theta}{2})}, \tag{3.62}$$

in končno

$$\sigma(\theta) = \frac{\tilde{\alpha}^2}{8E^2\mathrm{tg}(\frac{\theta}{2})\sin^2(\frac{\theta}{2})\sin\theta} = \frac{\tilde{\alpha}^2}{16E^2}\frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})}, \tag{3.63}$$

kar je znana **Rutherfordova formula** za sipanje, prvotno za delce α na jedru. Izkaže se, da velja enak izraz tudi znotraj kvantne mehanike, če se zanemari relativistične efekte. Slednje je še ena posebnost potenciala $V \propto 1/r$.

Pri sipanju definiramo tudi totalni sipalni presek,

$$\sigma_{tot} = \int \sigma(\Omega) d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \sigma(\theta) \sin\theta d\theta. \tag{3.64}$$

Lahko ga tudi izrazimo kot $\sigma_{tot} = I/j$ kot celotni tok sipanih delcev deljeno z vpadlo gostota toka, torej predstavlja efektivno ploščino sipalnega centra. Hitro ugotovimo, da je v primeru Rutherfordovega sipanja (3.63) $\sigma_{tot} = \infty$, saj integral divergira na spodnji meji. To je posledica počasnega padanja Coulomskega potenciala, kjer se tudi zelo oddaljeni delci odklonijo za majhen θ, kar vodi do efektivno neskončnega sipalnega preseka.

Opis lege togega telesa: Eulerjevi koti

Togo telo ima razdaljo med vsakima dvema točkama konstantno,

$$|\vec r_i - \vec r_j| = c_{ij} = \text{konst.}$$

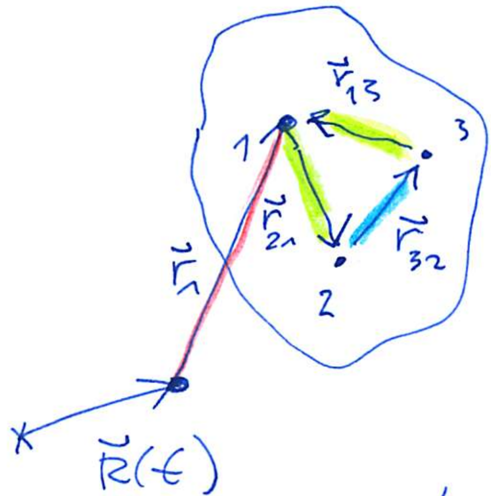
Lega je podana s 6 neodvisnimi koordinatami,

$\vec r_1$ (3x)

$\vec r_{21}$ (2x)

$\vec r_{32}$ oz. $\vec r_{13}$ (1x)

$\underbrace{\qquad\qquad}_{6\times}$

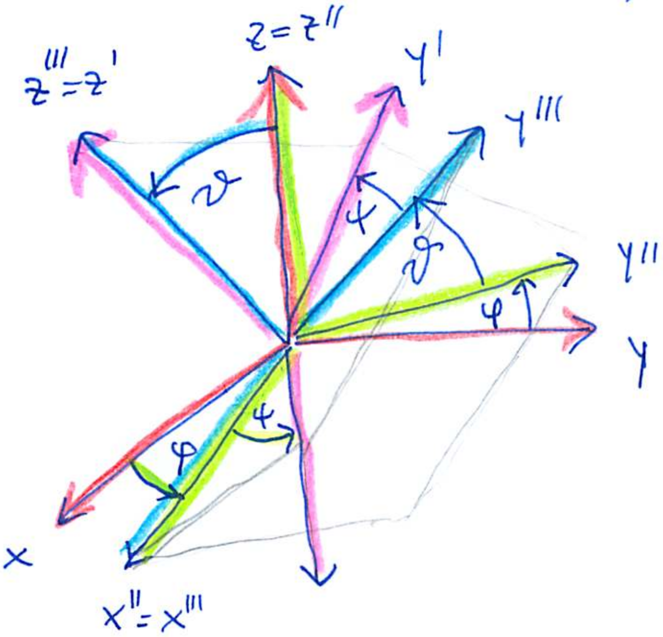


Običajno vpeljemo gibajoči se koordinatni sistem,

$$\vec r_i = \vec R + \vec r_i'$$

Med $\vec r_i$ in $\vec r_i'$ se transformira z linearno preslikavo (matriko).

Eulerjevi koti (obstajajo še drugi možni opisi lege)



- originalni (x, y, z)
- rotacija okoli z za kot precesije φ $\rightarrow (x'', y'', z'')$

$$T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_3(\varphi) = T(-\varphi)^{-1}$$

okoli „z''" = 3

- okoli nove x'' za kot nutacije ϑ

$$U(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = R_1(\vartheta)$$

okoli „x''" = 1

- okoli nove z''' za kot rotacije ψ

$$V(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_3(\psi) = V(-\psi)^{-1}$$

$$(\vec{e}\,')_\alpha = \sum_\beta R_{\alpha\beta} (\vec{e})_\beta \; ; \quad R = VUT; \; R^{-1} = (VUT)^{-1} = T^{-1}U^{-1}V^{-1} = T^T U^T V^T = R^T$$

Vse so ortogonalne matrike; $T^{-1} = T^T$, $V^{-1} = V^T$, $U^{-1} = U^T$.
Tudi produkt TVU

Eulerjev izrek o rotacijah
(1775)

Naj bo R rotacijska matrika, ki transformira $\vec{r} \to \vec{r}\,'$,

$$R\vec{r} = \vec{r}\,'.$$

Eulerjev izrek:
za $\forall R$ $\exists \vec{n} \neq 0$: $R\vec{n} = \vec{n}$, torej
$\exists$ lastni vektor z lastno vrednostjo 1.

Dokaz:

Rotacijske matrike so ortogonalne,
velja

transponirana

$$R^{-1} = R^{T} \quad \text{oz.} \quad RR^{T} = R^{T}R = I.$$

Determinanta je ± 1:

$$1 = \underbrace{\det RR^{T}}_{\det I} = \det R^{T} \det R = (\det R)^{2} \Rightarrow \det R = \pm 1.$$

Če $= -1$, je to neprava rotacija, sestavljena iz refleksije in rotacije; refleksija: $\vec{r} \to -\vec{r}$.

Dokazati torej želimo, da $\exists \vec{n}$,

$$R\vec{n} = \vec{n} = I\vec{n}$$

$$(R - I)\vec{n} = 0 \Rightarrow \det(R - I) = 0.$$

uporabimo dve zvezi;

$$\det(-A) = \det\left[\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix} A\right] = \det\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix} \det A = (-1)^{3} \det A = -\det A$$

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

$\det AB = \det A \det B$
$\det A^{T} = \det A$

torej

$$\det R^{-1} = 1$$

in

$$\det(R-I) = \det(R-I)^T = \det(R^T - I) =$$
$$= \det(R^{-1} - R^{-1}R) =$$
$$= \det(R^{-1}(I-R)) =$$
$$= \det R^{-1} \det(-(R-I)) =$$
$$= -\det(R-I)$$

$$\Rightarrow \det(R-I) = 0,$$

torej $\det(R-\lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ lastna vrednost R

$$\Rightarrow (R-I)\vec{u} = 0 \iff \boxed{R\vec{u} = \vec{u}}.$$

Dokazali smo, da je vsaka „rotacijska" matrika, t.j., če $R^{-1} = R^T$ & $\det R = 1$, taka, da ima enolično os $\vec{u}$, ki je invariantna na R, $R\vec{u} = \vec{u}$; $\vec{u}$ = os vrtenja.

Dodatno:

$$\det R = 1 = \underset{\substack{\uparrow\\=1}}{\lambda_1}\lambda_2\lambda_3 \Rightarrow \lambda_2\lambda_3 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_{2,3} = e^{\pm i\varphi}$$
$$\varphi \in \mathbb{R}.$$