Opis lege togega telesa: Eulerjevi koti

Togo telo ima razdalje med vsemi dvema točkama konstantne,

$$|\vec{r}_i - \vec{r}_j| = c_{ij} = \text{konst.}$$

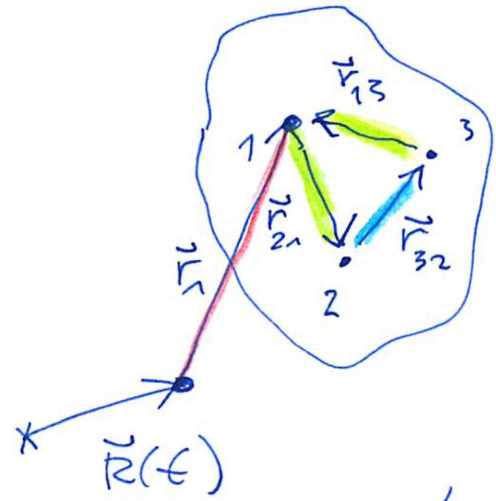
Lega je podana s 6 neodvisnimi koordinatami,

$\vec{r}_1$ (3x)

$\vec{r}_{21}$ (2x)

$\vec{r}_{32}$ oz. $\vec{r}_{13}$ (1x)

6x

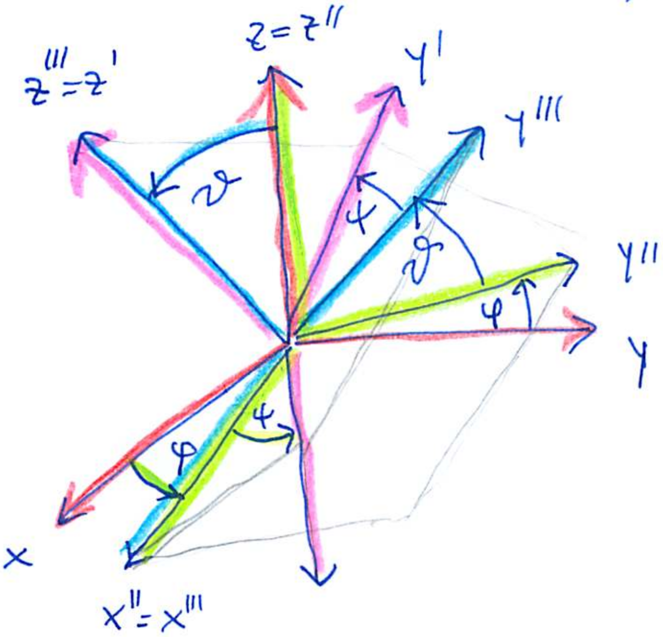


Običajno vpeljemo gibajoči se koordinatni sistem,

$$\vec{r}_i = \vec{R} + \vec{r}_i'$$

Med $\vec{r}_i$ in $\vec{r}_i'$ se transformira z linearno preslikavo (matrika).

Eulerjevi koti (obstajajo še drugi načini opisa lege)



- originalni (x, y, z)
- rotacija okoli z za kot precesije φ $\rightarrow (x'', y'', z'')$

$$T(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_3(\varphi) = T(-\varphi)^{-1}$$

okoli $z'' = 3$

- okoli nove x'' za kot nutacije ϑ

$$U(\vartheta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ 0 & -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = R_1(\vartheta)$$

okoli $x'' = 1$

- okoli nove z''' za kot rotacije ψ

$$V(\psi) = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi & 0 \\ -\sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R_3(\psi) = V(-\psi)^{-1}$$

$$(\vec{e}\,')_\alpha = \sum_\beta R_{\alpha\beta} (\vec{e})_\beta \; ; \quad R = VUT; \; R^{-1} = (VUT)^{-1} = T^{-1}U^{-1}V^{-1} = T^T U^T V^T = R^T$$

Vse so ortogonalne matrike; $T^{-1} = T^T$, $V^{-1} = V^T$, $U^{-1} = U^T$.
Tudi produkt TVU

Eulerjev izrek o rotacijah
(1775)

Naj bo R rotacijska matrika, ki transformira $\vec{r} \to \vec{r}'$,

$$R\vec{r} = \vec{r}'.$$

Eulerjev izrek:
za $\forall R$ $\exists \vec{n} \neq 0$: $R\vec{n} = \vec{n}$, torej
$\exists$ lastni vektor z lastno vrednostjo 1.

Dokaz:

Rotacijske matrike so ortogonalne,
velja
transponirana

$$R^{-1} = R^{T} \quad \text{oz.} \quad RR^{T} = R^{T}R = I.$$

Determinanta je ± 1:

$$1 = \underbrace{\det RR^{T}}_{\det I} = \det R^{T} \det R = (\det R)^{2} \Rightarrow \det R = \pm 1.$$

Če $= -1$, je to neprava rotacija, sestavljena iz refleksije in rotacije; refleksija: $\vec{r} \to -\vec{r}$.

Dokazati torej želimo, da $\exists \vec{n}$,

$$R\vec{n} = \vec{n} = I\vec{n}$$

$$(R - I)\vec{n} = 0 \Rightarrow \det(R - I) = 0.$$

uporabimo dve zvezi;

$$\det(-A) = \det\left[\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix} A\right] = \det\begin{pmatrix}-1 & & \\ & -1 & \\ & & -1\end{pmatrix} \det A = (-1)^{3} \det A = -\det A$$

$$\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$$

$\det AB = \det A \det B$
$\det A^{T} = \det A$

torej

$$\det R^{-1} = 1$$

in

$$\det(R-I) = \det(R-I)^T = \det(R^T - I) =$$
$$= \det(R^{-1} - R^{-1}R) =$$
$$= \det(R^{-1}(I-R)) =$$
$$= \det R^{-1} \det(-(R-I)) =$$
$$= -\det(R-I)$$

$$\Rightarrow \det(R-I) = 0,$$

torej $\det(R - \lambda I) = 0 \Rightarrow \lambda = 1$ lastna vrednost R

$$\Rightarrow (R-I)\vec{n} = 0 \Leftrightarrow \boxed{R\vec{n} = \vec{n}}.$$

Dokazali smo, da je vsaka „rotacijska" matrika, t.j., če $R^{-1} = R^T$ & $\det R = 1$, taka, da ima enolično os $\vec{n}$, ki je invariantna na R, $R\vec{n} = \vec{n}$; $\vec{n}$ = os vrtenja.

Dodatno:

$$\det R = 1 = \underset{\substack{\uparrow \\ =1}}{\lambda_1}\lambda_2\lambda_3 \Rightarrow \lambda_2\lambda_3 = 1$$

$$\Rightarrow \lambda_{2,3} = e^{\pm i\varphi}$$

$$\varphi \in \mathbb{R}.$$