Togo telo z 1 nepremično (fiksno) točko

Točka T naj bo nepremična (translacijo smo odtransformirali). V vsakem trenutku je gibanje telesa po Eulerjevem izreku rotacija okoli neke osi ($\vec{n}$). Za poljubno točko $\vec{r}$ v telesu velja

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right)_{\text{nein.}} + \vec{\omega}\times\vec{r}$$

hitrost, kot je v neinercialnem sistemu; pri nas $= 0$, ker je telo togo in miruje glede na sistem, ki je pripet na telo (trivialno).

torej

$$\vec{v}(t) = \vec{\omega}(t)\times\vec{r}(t)$$

; gledamo v inerc. sistemu (laboratorijskem)

- Vrtilna količina telesa (ponovitev)

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N}\vec{l}_i = \sum_i m_i(\vec{r}_i\times\vec{v}_i) = \sum_i m_i(\vec{r}_i\times(\vec{\omega}\times\vec{r}_i))$$

($\vec{\omega}$ v nekem trenutku)

$$\vec{L} = \sum_i m_i\left[(\vec{r}_i\cdot\vec{r}_i)\vec{\omega} - (\vec{r}_i\cdot\vec{\omega})\vec{r}_i\right] = \underline{J}\,\vec{\omega}$$

vztrajnostni moment

Pogosto je ugodno uvesti gostoto mase;

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} \sim \left.\frac{dm}{dV}\right|_{\vec{r}} ; \quad \Delta m = \sum_{\substack{i \\ \vec{r}_i \in \Delta V}} m_i .$$

$$M = \sum_i m_i \to \int \rho(\vec{r})\, dV .$$

Vztrajnostni moment:

$$\underline{J} = \int \rho(\vec{r})\, dV \begin{pmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -yx & x^2+z^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

realen

oz.: $\boxed{J_{\alpha\beta} = \int \rho(\vec{r})(r^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta)\, d^3 r = J_{\beta\alpha}}$ simetričen

simetričen tenzor

„tenzor" je matrika, ki se ustrezno transformira pri rotaciji sistema in je v novem sistemu zveza med količinami enaka. Npr.:

$$\vec{L}' = R\vec{L} \quad \text{in} \quad \vec{\omega}' = R\vec{\omega}$$

$$\vec{L} = \underline{J}\,\vec{\omega} \Rightarrow \vec{L}' = \underline{J}'\vec{\omega}' \;\&\; \boxed{\underline{J}' = R\,\underline{J}\,R^{-1}}$$

dokaz:

$$\vec{L}' = R\vec{L} = R\underline{J}\vec{\omega} = R\underline{J}R^{-1}R\vec{\omega} = \underbrace{R\underline{J}R^{-1}}_{\underline{J}'}\vec{\omega}' .$$

$\underline{J}$ ima 3 lastne vektorje in 3 l. vrednosti;

$$\underline{J}\,\vec{e}_\alpha = \lambda_\alpha \vec{e}_\alpha \qquad \lambda_\alpha = J_{1,2,3} ; \quad J_{\alpha\alpha} \geq 0 \text{ očitno}$$

če $J_\alpha \neq J_\beta \Rightarrow \vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = 0$, ker je $\underline{J}$ realen in simetričen.

.. Energija vrtečega se telesa, $(V=0)$

$$T = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\sum_i m_i (\vec{\omega}\times\vec{r}_i)\cdot\vec{v}_i =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_i m_i \vec{\omega}\cdot(\vec{r}_i\times\vec{v}_i) = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\vec{L} =$$

$$= \boxed{\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\underline{J}\vec{\omega}}$$

V lastnem sistemu $\underline{J}$ (lastnost telesa, ki smo „fiksirali" na telo) velja

$$\underline{J} = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & J_2 & \\ & & J_3 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \vec{\omega} = \sum_{\alpha=1}^{3}\omega_\alpha\vec{e}_\alpha$$

$$\underline{J}\vec{\omega} = \sum_{\alpha=1}^{3} J_{\alpha\alpha}\,\omega_\alpha\vec{e}_\alpha$$

$$\frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot\underline{J}\vec{\omega} = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3} J_{\alpha\alpha}\,\omega_\alpha^2 \geq 0 \quad \text{za } \forall\,\vec{\omega}$$

$$\Rightarrow \boxed{J_{\alpha\alpha} \geq 0.}$$

se vidi iz definicije ($x^2+z^2 \geq 0$ itd.)

lastne vrednosti ≥ 0.

$\underline{J}$ je pozitivno definitna matrika.

Enačbe gibanja

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{rel.}} + \vec{\omega}\times\vec{L} = \vec{M}$$

glede na telo

to $\neq$ nujno 0, kot sledi

Delajmo v lastnem sistemu $\underline{J}$,

$$\vec{L} = \underline{J}\,\vec{\omega} = \sum_{\alpha=1}^{3} J_{\alpha\alpha}\,\omega_\alpha\,\vec{e}_\alpha = \begin{pmatrix} J_1\omega_1 \\ J_2\omega_2 \\ J_3\omega_3 \end{pmatrix}; \quad J_2 \leftarrow J_{22}. \text{ itd.}$$

V vrtečem se sistemu je v gornjem izrazu od časa lahko odvisen le vektor $\vec{\omega}$; očitno, ker $J_{\alpha\alpha}$ so itak konstante in osi so definirane z $\vec{e}_\alpha$. Torej velja

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt}\right)_{\text{vrt.}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \underbrace{J_{\alpha\alpha}\,\dot{\omega}_\alpha}_{L_\alpha(t)}\,\vec{e}_\alpha$$

torej $\neq 0$ glede na lastni sistem (v splošnem)

Velja še

$$\vec{\omega}\times\vec{L} = \left((J_3-J_2)\omega_2\omega_3,\ (J_1-J_3)\omega_3\omega_1,\ (J_2-J_1)\omega_1\omega_2\right)$$

ciklično

$$\begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} J_1\omega_1 \\ J_2\omega_2 \\ J_3\omega_3 \end{pmatrix} = \dots$$

torej $1 \to 2 \to 3$

$$\boxed{\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1 - (J_2-J_3)\,\omega_2\omega_3 &= M_1, \\ J_2\dot{\omega}_2 - (J_3-J_1)\,\omega_3\omega_1 &= M_2, \\ J_3\dot{\omega}_3 - (J_1-J_2)\,\omega_1\omega_2 &= M_3. \end{aligned}}$$

To so Eulerjeve enačbe; v lastnem sistemu $\underline{J}$.

1. red, nelinearne.

Najenostavnejši primer je, ko ni zunanjih navorov, $\vec{M}=0$, potem

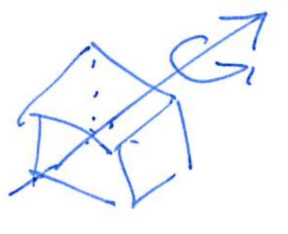
$$\frac{d\vec{\Gamma}}{dt}=0 \Rightarrow \vec{\Gamma}=\vec{\Gamma}_0=\text{konst.} \quad (\text{ponovno} \ldots)$$

To je zapisano v inercialnem sistemu. V splošnem ni rešljivo. Je pa enostavno za $J_1=J_2$. Če $J_1=J_2=J_3=J$ je trivialno,

$$J_\alpha \dot{\omega}_\alpha = J \dot{\omega}_\alpha = 0 \quad \text{za } \forall \alpha \Rightarrow \vec{\omega}(t)=\vec{\omega}_0=\text{konst.}$$

Povedali pričakujem, da ko vidimo tole, vendar v splošnem ni. Tole simetrijo ima seveda krogla, pa tudi kocka. Če torej v tisti vidimo kocko, ko $\vec{\Gamma}=\text{konst.}$ (seveda) in tudi $\vec{\omega}=\text{konst.}$,

$$\vec{\omega} \propto \vec{\Gamma} \quad ; \quad \vec{\Gamma}=(J_1)\vec{\omega}=J\vec{\omega}.$$



konst.

Bolj zanimiv je primer, ko

$$J_1=J_2\neq J_3$$

še vedno velja

$$J_3\dot{\omega}_3=0 \Rightarrow \omega_3=\text{konst.}=\omega_0$$

(ne pozabimo: $\vec{e}_3$ je glede na telo) in

$$J_1\dot{\omega}_1 - (J_1 - J_3)\,\omega_2\omega_0 = 0$$
$$J_1\dot{\omega}_2 - (J_3 - J_1)\,\omega_1\omega_0 = 0 \qquad / \, ÷$$

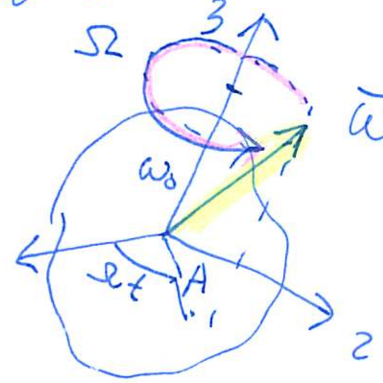
$$\frac{\dot{\omega}_1}{\dot{\omega}_2} = -\frac{\omega_2}{\omega_1} \Rightarrow \left.\begin{aligned}\dot{\omega}_1 &= -\Omega\,\omega_2\\ \dot{\omega}_2 &= \Omega\,\omega_1\end{aligned}\right\}\ \ddot{\omega}_1 + \Omega^2\omega_1 = 0$$

$$\Omega = \frac{J_3 - J_1}{J_1}\,\omega_0$$

očitna rešitev je

$$\omega_1 = A\cos(\Omega t + \delta) \qquad \omega_1^2 + \omega_2^2 = A^2$$
$$\omega_2 = A\sin(\Omega t + \delta) \qquad |\vec{\omega}|^2 = A^2 + \omega_0^2$$

V lastnem sistemu



V mirujočem sistemu je $\vec{L}$ = konst

Primer

a) Frisbee

$J_3 = \frac{1}{2}mR^2$, $J_1 = J_2 = \frac{1}{4}mR^2$

$\Omega = \dfrac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\,\omega_0$; glede na mirujočega $2\omega_0$.

b) vrtenje Zemlje

$\Omega = 0.00327\,\omega_0 \sim 300$ dni
res je 433 dni

Stabilnost vrtavke

Naj velja

$$J_1 \neq J_2 \neq J_3 \neq J_1 .$$

in telo se vrti okoli ene od lastnih osi ($\vec{M} = 0$); Eulerjeve enačbe so OK:

$$\omega_1 = \Omega \; ; \quad \omega_2 = \omega_3 = 0 .$$

Poglejmo majhna odstopanja od tega:

$$\omega_1 = \Omega + \eta_1 \; ; \; \omega_2 = \eta_2 \; ; \; \omega_3 = \eta_3$$

η_i majhno

Vstavimo v E.e.,

najnižji red:

$$J_1 \dot{\eta}_1 = 0$$

$$J_2 \dot{\eta}_2 = \Omega \eta_3 (J_3 - J_1)$$

$$J_3 \dot{\eta}_3 = \Omega \eta_2 (J_1 - J_2)$$

$$\boxed{\begin{aligned} J_1 \dot{\omega}_1 &= (J_2 - J_3)\, \underbrace{\omega_2 \omega_3}_{\eta_2 \eta_3 \to 0} \\ J_2 \dot{\omega}_2 &= (J_3 - J_1)\, \underbrace{\omega_3 \omega_1}_{\eta_3 (\Omega + \eta_1)} \\ J_3 \dot{\omega}_3 &= (J_1 - J_2)\, \underbrace{\omega_1 \omega_2}_{(\eta_1 + \Omega)\eta_2} \end{aligned}}$$

$$J_2 \ddot{\eta}_2 = \frac{\Omega^2}{J_3} (J_3 - J_1)(J_1 - J_2)\, \eta_2 = A \eta_2$$

$$\ddot{\eta}_2 - \frac{A}{J_2} \eta_2 = 0 \qquad \sim \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix} \sqrt{\frac{A}{J_2}}\, t$$

očitno: če $A < 0 \Rightarrow$ nihanje η_2

$$A > 0 \Rightarrow \eta_2 \sim e^{\pm \sqrt{\frac{A}{J_2}}\, t} .$$

$\Rightarrow$ stabilno/nestabilno (če se vrti okoli največje/najmanjše osi) • nestabilno: $J_2 < J_1 < J_3$ ali $J_3 < J_1 < J_2$.