-2 kolokvija + ustni izpit

Prevodnost je kvantizirana, $G_0 = \frac{e^2}{h} = (26\,k\Omega)^{-1}$

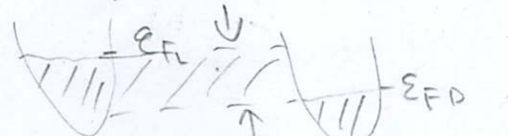
Oglejmo si tok elektronov vzdolž neke ravne črte

$I = -e_0 n v$

Vzemimo disperzijo elektronov

in naj bodo valovne funkcije elektronov ravni valovi $\psi_k = e^{ikx}$, $\varepsilon = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.

Žica je priklopljena na dve elektrodi in v teh dveh elektrodah imamo neko gostoto stanj. Če sta Fermijevi energiji elektrod enaki, tok ne bi tekel. Ko med elektrodi priključimo napetost U, se bosta Fermijevi energiji razlikovali.



$e_0 U$, ki e^- ~~bod~~ se prevodni

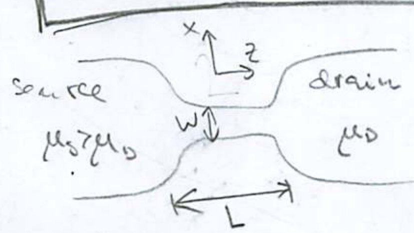
V 1d je $n \propto \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ in $v = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial \varepsilon}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m}$ (to velja velja - kvaziklasični približek).

$k = \sqrt{\frac{2m\varepsilon}{\hbar^2}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}}$

$\Rightarrow v \cdot n \propto \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} = C$ (neodvisno od ε)

$\Rightarrow$ izkaže se $\Rightarrow$ $I = C \cdot U$; $C = \frac{2e_0^2}{h}$ ← 2 je tukaj zaradi spina

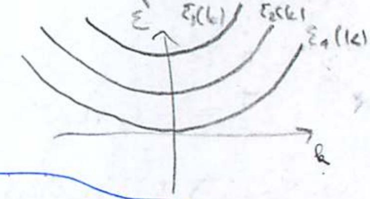
KVANTIZIRANA PREVODNOST



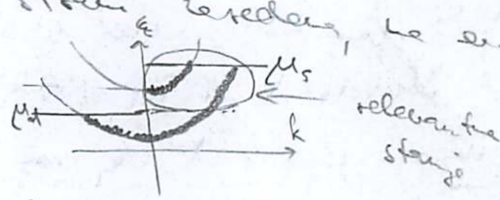
Obravnavajmo 2D primer (y-koordinata tukaj ni pomembna). Na območju, kjer se e^- gibljejo, imamo potencial $V(x,z)$. Mislimo si, da so e^- omejeni na gibanje po tem območju, ker je zunaj potencial ∞. Širina se na srednjem delu ne spreminja, zato je $\boxed{V(x,z) = V(x)}$. Velja Schrödingerjeva enačba $-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\psi(x,z) + V(x)\psi(x,z) = \varepsilon\psi(x,z)$.

Ker smo privzeli, da velja $V(x,z) \equiv V(x)$, lahko vzamemo nastavek

$\boxed{\psi(x,z) = \chi_n(x)\frac{e^{ikz}}{\sqrt{L}}}$. V smeri z je to ravni val (normiran na dolžino odseka L), v smeri x pa gre za lastno stanje neskončne potencialne jame;



Za energijo velja disperzijska relacija $\boxed{\varepsilon_n(k) = \varepsilon_n + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}}$, sistem je torej enodimenzionalen. Ko na sistem priključimo napetost, pričnejo elektroni s $k>0$ potiskati na desno, elektroni s $k<0$ pa na levo. K prevodnosti prispevajo le tista stanja, ki so na eni strani zasedena, na eni pa ne (sicer se $+k$ in $-k$ tok izniči).



Tok lahko poganjamo na več načinov (z napetostjo ali s T - termoelektrični pojav)

Za gostoto toka vemo iz kvantne mehanike

$$\boxed{\vec{j}_{nk}(x,z) = \frac{e\hbar}{2mi}\left(\psi^*_{n,k}\nabla\psi_{n,k} - \psi_{n,k}\nabla\psi^*_{n,k}\right)}$$ in zato $\boxed{I_{n,k}(z) = \int j_{n,k}(x,z)\,dx}$.

V stacionarnem stanju zaradi kontinuitetne enačbe tok ne sme biti odvisen od z. Relevantna je samo z-smer toka, saj se v smeri x ne porazdeli (sicer bi elektroni ušli iz sistema).

$$j^z_{nk} = \frac{e\hbar}{2mi}\left(\chi_n^* e^{-ikz}\frac{1}{\sqrt{L}}\chi_n\frac{ik}{\sqrt{L}}e^{ikz} - c.c.\right) = \frac{e\hbar}{2miL}|\chi_n|^2\underbrace{(ik-(-ik))}_{2ik} = \frac{e\hbar|\chi_n|^2}{mL}k,$$

od tod $\boxed{I_{n,k}(z) = \frac{e\hbar k}{mL}\int|\chi_n|^2dx = \frac{e\hbar k}{mL}}$.

To je prispevek enega elektrona k toku. Da bi dobili celoten tok, moramo sešteti po vseh zasedenih stanjih (preprosto po vseh stanjih, ki prispevajo k toku).

$\boxed{I = \sum_n\sum_k \frac{e\hbar k}{mL}P_{nk}}$, kjer je P_{nk} verjetnost, da je stanje nk zasedeno.

Vsoto razbijemo na dva dela (source in drain), verjetnosti so kar enake vrednosti Fermijeve funkcije,

$$I = \sum_n\sum_{k<0}\frac{e\hbar k}{mL}f_D(\varepsilon_{nk}) + \sum_n\sum_{k>0}\frac{e\hbar k}{mL}f_S(\varepsilon_{nk}).$$ Tukaj je $f_{S,D} = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu_{S,D}}{k_BT}}+1}$

Vsoto spremenimo v integral,

$$I = \sum_n \left(\int_0^\infty \frac{e\hbar k}{mL} f_S(\varepsilon_{nk})\, dk + \int_{-\infty}^0 \frac{e\hbar k}{mL} f_D(\varepsilon_{nk})\, dk \right) \frac{L}{2\pi} = \qquad \varepsilon_{nk} = \varepsilon_{n-k}$$

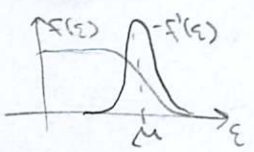
$$= \sum_n \int_0^\infty dk\, \frac{e\hbar k}{2\pi m} \left(f_S(\varepsilon_{nk}) - f_D(\varepsilon_{nk}) \right).$$ $\varepsilon_n(k) = \varepsilon_n + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$, zato je $\frac{1}{\hbar} \frac{d\varepsilon_n(k)}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$ in

$$I = \sum_n \int_0^\infty \frac{dk}{\underbrace{2\pi \hbar}_{=h}} e \frac{d\varepsilon_n(k)}{dk} \left(f_S(\varepsilon_{nk}) - f_D(\varepsilon_{nk}) \right) = \boxed{\sum_n \frac{e}{h} \int_{\varepsilon_n}^\infty d\varepsilon \left(f_S(\varepsilon) - f_D(\varepsilon) \right)}$$

Ohmov zakon $I = \sigma U$ velja za majhne U, zato privzamemo majhne U.

Pri prehodu od source proti drainu elektron izgubi energijo eU, zato $\mu_S = \mu_D + eU$. Predpostavimo, da sta temperaturi enaki, $T_D = T_S \equiv T$. Potem lahko zapišemo

$$f_D(\varepsilon) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon - \mu_S + eU}{k_B T}} + 1} = f_S(\varepsilon + eU) \approx f_S(\varepsilon) + eU f_S'(\varepsilon)$$ (razvili smo do 1. reda). Tok lahko potem zapišemo kot

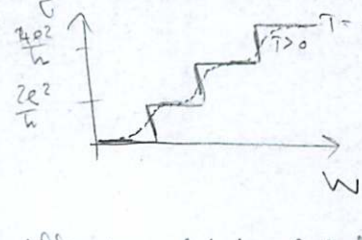


$$I = \sum_n \frac{e}{h} \int_{\varepsilon_n}^\infty d\varepsilon \left(-eU f_S'(\varepsilon) \right) = \sum_n \frac{e^2}{h} \int_{\varepsilon_n}^\infty \left(-f'(\varepsilon) \right) d\varepsilon \; U = \sigma U$$

V limiti $T \to 0$ je $-f'$ δ-funkcija. Če se kanal začne pod μ, bo integral 1, sicer pa 0 (za $T=0$). Potem lahko zapišemo $\boxed{\sigma \overset{T\to 0}{=} \frac{e^2}{h} M}$, kjer je M št. „odprtih" kanalov (takih kanalov z energijo pod μ, $\varepsilon_n < \mu$). Spina še nismo upoštevali, zato moramo vsak kanal šteti dvakrat.

Ko se L daljša, energije naraščajo, zato je vedno manj kanalov odprtih in prevodnost se diskretno zmanjšuje (za ∞ potencialno jamo velja $\varepsilon_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mW^2}$).

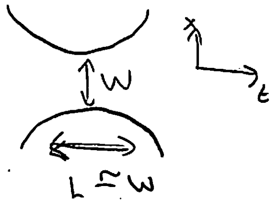
Pri $T \gg \Delta\varepsilon$ je širina $-f'$ tako velika, da skokov ne opazimo več, odvisnost σ je skoraj linearna.



Skoki so enakomerno porazdeljeni, če je potencial harmoničen (za ∞-potencialno jamo to ne velja)

Če vključimo magnetno polje, hamiltonian dobi dodaten Zeemanov člen $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. Stanjem s $\uparrow$ se ε poveča, $\downarrow$ pa zmanjša, zato se odpirajo dodatni kanali. Pojavijo se novi skoki, ki jih je zdaj dvakrat več.

Zdaj si oglejmo primer, ko imamo odvisnost od z v potencialu.

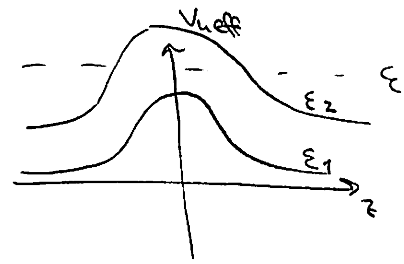


$$-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi(x,z)+V(x,z)\Psi(x,z)=\varepsilon\Psi(x,z).$$

Funkcije χ_n definiramo kot $-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}\chi_n(x,z)+V(x,z)\chi_n(x,z)=\varepsilon(z)\chi_n(x,z)$ in za $\Psi(x,z)$ vzamemo nastavek $\Psi(x,z)=\sum_n \chi_n(x,z)\varphi_n(z)$. Dobili smo sistem diferencialnih enačb, ki ga moramo reševati numerično, zato je bolje vzeti

ADIABATNI PRIBLIŽEK:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dz^2}\varphi_n(z)+V_n^{ef}(z)\varphi_n(z)=\varepsilon\varphi_n(z).$$



Spet bodo nastavek ravni valovi, le da se zdaj energija s krajem spreminja.

Kot vidimo na sliki, ni nujno da „pride val skozi". Vpeljemo odbojnost in prepustnost, tako da vzamemo nastavek:

- na levi: $e^{ikz}+re^{-ikz}$
- na desni: te^{ikz}

Če pošljemo val z druge strani: levo: $t'e^{-ikz}$; desno: $e^{-ikz}+r'e^{ikz}$

Celoten nastavek je potem: $A_Le^{ikz}+B_Le^{-ikz}$; $A_De^{-ikz}+B_De^{ikz}$, kar lahko za r, t, r', t' zapišemo kot

$$\begin{bmatrix}B_L\\B_D\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r&t'\\t&r'\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_L\\A_D\end{bmatrix},$$

oz. krajše $\underline{B}=\underline{\underline{S}}\,\underline{A}$, kjer je

$S=\begin{bmatrix}r&t'\\t&r'\end{bmatrix}$ sipalna matrika.

Št. elektronov se mora ohranjati, zato $I_{vp}=|A_L|^2\frac{\hbar k}{m}+|A_D|^2\frac{\hbar k}{m}$, $I_{iz.}=|B_L|^2\frac{\hbar k}{m}+|B_A|^2\frac{\hbar k}{m}$; $I_{iz}=I_{vp}$, zato $|A_L|^2+|A_D|^2=|B_L|^2+|B_A|^2$, oz. $A_L^*A_L+A_D^*A_D=B_L^*B_L+B_A^*B_A$; $A^\dagger A=B^\dagger B$ in zato $\boxed{S^\dagger S=I}$, matrika S mora biti unitarna.

Še eno lastnost bomo videli, če konjugiramo Schrödingerjevo enačbo,

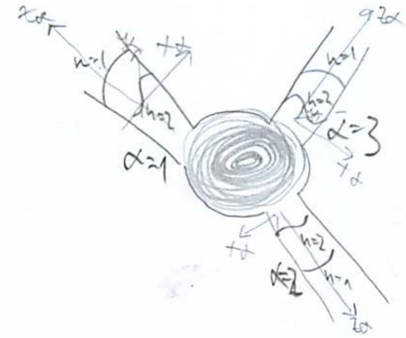
$H\psi = \varepsilon\psi \,/^*$ $\Rightarrow$ $H^*\psi^* = \varepsilon\psi^*$. Predpostavimo, da nimamo magnetnega polja. V tem primeru je $H = H^*$ (sicer bi bilo $(\vec{p} - e\vec{A})^{2*} \neq (\vec{p} - e\vec{A})^2$) $\Rightarrow$ $H\psi^* = \varepsilon\psi^*$. Torej je ψ^* tudi rešitev Schrödingerjeve enačbe in $A^* = SB^*$ in $S^+ A^* = B^* \,/^*$ $\Rightarrow$ $S^T A = B$. Prej smo si pa matriko opredelili kot $SA = B$, zato $\boxed{S = S^T}$ (v primeru $B = 0$).

Prej so bili prispevki pri k, k' konstantni, zdaj pa lahko formulo ustrezno posplošimo, tako da velja bolj splošno. Upeljemo verjetnost, da gre elektron z valovnim vektorjem k skozi. To je transmisivnost, $T_n(\varepsilon) = |t_n(\varepsilon)|^2$. Prevodnost lahko zdaj drugače zapišemo,

$$\boxed{G = \sum_n \frac{e^2}{h} \int_{\varepsilon_n}^{\infty} \left(-f'(\varepsilon)\right) T_n(\varepsilon)\, d\varepsilon \overset{T=0}{=} \sum_n \frac{e^2}{h} T_n(\mu)}$$

. Temu pravimo Landauer-Büttikerjeva formula.

Če imamo v hamiltonianu tudi člene, ki sklapljajo kanale med sabo, moramo $T_n(\varepsilon)$ nadomestiti z vsoto $\sum_m T_{nm}(\varepsilon)$.



Imamo priključenih več elektrod.

V vsaki žički imamo kanale, ki jih označimo z n. Indeks n vsebuje tudi spin kot kvantizacij v običajnem prostoru.

Vsakemu kanalu ustreza $\varepsilon_{\alpha n}$, pri kateri se „kanal odpre"
$\varepsilon_{\alpha n} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ... Tokove označujemo kot I_α. Tok je pozitiven, če teče po žičkah ven. Pobarvana struktura je območje, ki nas zanima; nanostruktura. Vpeljemo še kemijski potencial μ_α in temperaturo T_α.

$$\Psi(x_\alpha, z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_n \chi_n(x_\alpha) \left(A_{\alpha n} \frac{e^{i k_{\alpha n} z_\alpha}}{\sqrt{k_{\alpha n}}} + B_{\alpha n} \frac{e^{-i k_{\alpha n} z_\alpha}}{\sqrt{k_{\alpha n}}} \right)$$

prečna valovna funkcija

$Ae^{ikx} + B\ldots$ | $Ce^{ik'x}$

$$T = \left|\frac{C}{A}\right|^2 \frac{k'}{k}$$

Če ta sfaktorje uvedimo, imamo lepšo povezavo med $B_{\alpha n}$ in $A_{\alpha n}$,

$$\boxed{B_{\alpha n} = \sum_{\beta m} S_{\alpha n, \beta m} A_{\beta m}}$$

sipalna matrika

Da se tok ohranja, mora biti sipalna matrika unitarna in simetrična, $S^\dagger S = I$, $S^T = S$ (to velja, če ni magnetnega polja).

Izkaže se (podobna izpeljava kot zadnjič)

definicija smeri toka

$$\boxed{I_\alpha = -\frac{e}{h} \int d\varepsilon \sum_n \left(f_\alpha(\varepsilon) - \sum_{\beta, m} f_\beta(\varepsilon) |S_{\alpha n, \beta m}|^2 \right)}$$

dvojke nimamo več, ker je spin zajet v n

Velja $\sum_\alpha I_\alpha = 0$ (Kirchoffov zakon). Preverimo, če je to res.

(4) NANOFIZIKA → PREDAVANJA

Privzamemo, da je T povsod enaka

$$\sum_\alpha I_\alpha = -\frac{e}{h}\int d\varepsilon \sum_{\alpha n}\left(f_\alpha(\varepsilon) - \sum_{\beta m} f_\beta(\varepsilon)|S_{\alpha n,\beta m}|^2\right)$$

Velja $\sum_{\alpha n}|S_{\alpha n,\beta m}|^2 = 1$, ker je S unitarna. Zato

$$\underline{\underline{\sum_\alpha I_\alpha}} = -\frac{e}{h}\int d\varepsilon \left(\underbrace{\sum_{\alpha n} f_\alpha(\varepsilon) - \sum_{\beta m} f_\beta(\varepsilon)}_{=0}\right) = \underline{\underline{0}}.$$

Kirchoffov zakon velja in naboj se ohranja (bi rekli delčkofiziki)

Če je $U_\alpha = 0\ \forall\alpha$, potem je $f_\alpha(\varepsilon) = f(\varepsilon)$ in

$$I_\alpha = -\frac{e}{h}\int d\varepsilon \sum_n\left(1 - \underbrace{\sum_{\beta m}|S_{\alpha n,\beta m}|^2}_{=1\text{, tako kot prej}}\right) f(\varepsilon) = 0.$$

To je smiseln rezultat.

Oglejmo si primer $U_\gamma \neq 0$ in $U_{\alpha\neq\gamma} = 0\ \forall\alpha$.

$$I_\alpha = -\frac{e}{h}\int d\varepsilon\left(\sum_n f_\alpha(\varepsilon) - \sum_{\beta m}|S_{\alpha n\beta m}|^2 f_\beta(\varepsilon)\right) \stackrel{\uparrow}{=}$$

prej smo pokazali, da je za $f_\alpha(\varepsilon) = \varepsilon\ \forall\alpha$ + nič, torej lahko odštejemo tole

$$= -\frac{e}{h}\int d\varepsilon \sum_n\left(\underbrace{(f_\alpha(\varepsilon)-f(\varepsilon))}_{\delta_{\alpha,\gamma}(f_\gamma(\varepsilon)-f(\varepsilon))} - \sum_{\beta m}|S_{\alpha n\beta m}|^2\underbrace{(f_\beta(\varepsilon)-f(\varepsilon))}_{\delta_{\beta,\gamma}(f_\gamma(\varepsilon)-f(\varepsilon))}\right) =$$

$$= -\frac{e}{h}\int d\varepsilon\, (f_\gamma(\varepsilon)-f(\varepsilon))\left(\sum_n \delta_{\alpha,\gamma} - \sum_{\beta m}\delta_{\beta,\gamma}|S_{\alpha n,\beta m}|^2\right) =$$

$$= -\frac{e}{h}\int d\varepsilon\, (f_\gamma(\varepsilon)-f(\varepsilon))\left(\sum_n\delta_{\alpha,\gamma} - \sum_m |S_{\alpha n,\gamma m}|^2\right)$$

Naredimo razvoj za majhne $f_\gamma(\varepsilon)-f(\varepsilon)$, $f_\gamma(\varepsilon)-f(\varepsilon) \approx -f'(\varepsilon)\,eU_\gamma$

$$I_\alpha = -\frac{e^2}{h}\int d\varepsilon\,[-f'(\varepsilon)]\overbrace{\sum_{n,m}\left(\delta_{\alpha,\gamma}\delta_{m,n} - |S_{\alpha n\gamma m}|^2\right)}^{G_{\alpha\gamma}}\,U_\gamma$$

Namesto ene same skalarne prevodnosti smo dobili matriko prevodnosti $G_{\alpha\gamma}$ in zapišemo $\boxed{I_\alpha = \sum_\gamma G_{\alpha\gamma} U_\gamma}$.

Vsota vseh tokov je enaka 0, $\sum_{\alpha,\gamma} G_{\alpha\gamma} U_\gamma = 0$. To velja pri vsakem voltažu U_γ, zato je to enako 0, tudi če damo napetost le na eno žico, zato je $\boxed{\sum_\alpha G_{\alpha\gamma} = 0}\ \forall \gamma$.

Podobno je $\boxed{\sum_\gamma G_{\alpha\gamma} = 0}\ \forall \alpha$. Velja še $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$. To vidimo v izrazu, ki povezuje G s sipalno matriko (to torej velja v odsotnosti zunanjega magnetnega polja).

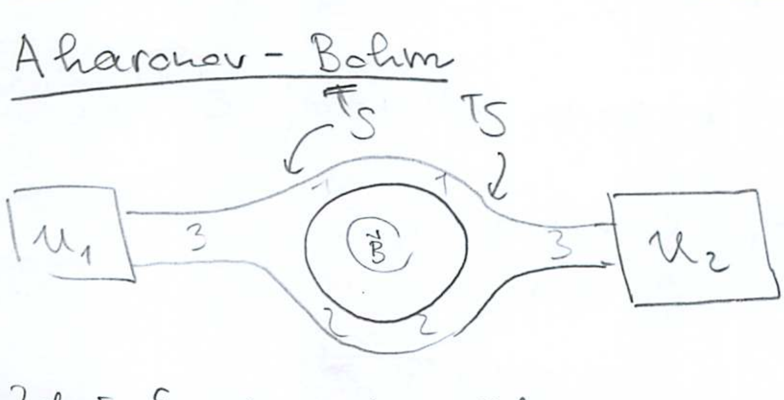
Zdaj smo pokazali, da je S simetrična tako, da smo ~~pokazali~~ upoštevali $H\psi = E\psi$ in $H^*\psi^* = E\psi^*$. Za $\vec{B} = 0$ je $H = H^*$.

Če pa je $\vec{B} \neq 0$ je $H = \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} + \ldots$ in $H = \frac{(-i\hbar\nabla - e\vec{A})^2}{2m} + \ldots$

Težava je s tem, da se $\vec{A}$ pri konjugiranju ne spremeni predznak. Velja pa ($\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$) $H^*(-\vec{B}) = H(\vec{B})$. Zato je potem $S^T(-\vec{B}) = S(\vec{B})$. Posledično bo veljalo $\boxed{G_{\alpha\beta}(\vec{B}) = G_{\beta\alpha}(-\vec{B})}$.

To je zdaj posplošitev simetričnosti.

Aharonov - Bohm



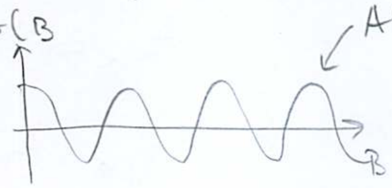
$$\boxed{{}^T S = \begin{pmatrix} a & b & \sqrt{\varepsilon} \\ b & a & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & \sqrt{\varepsilon} & c \end{pmatrix}}$$

Zdaj ε ni majhen, želimo da gre elektron po zgornji poti s približno enako verjetnostjo, kot po spodnji poti, $\varepsilon = \frac{1}{2}$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \Rightarrow {}^T S = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \sqrt{\frac{1}{2}} \\ \sqrt{\frac{1}{2}} & \sqrt{\frac{1}{2}} & -1 \end{pmatrix}$$

Kvantnomehansko bo faza pomembna.

V „luknjo" med potjo 1 in 2 damo magnetni pretok $\Phi_m = BS$.
V praksi magnetno polje ni tako dobro omejeno, ampak teoretično lahko dobro obravnavamo kot omejeno polje (popravki so majhni). Lokalizirano magnetno polje deluje na fazo elektronov preko vektorskega potenciala.



Naj bo $e^{i\vec{\varphi}_u}$ faza elektrona, ki gre po zgornji poti.

$$e^{i\vec{\varphi}_u} = e^{i\chi_u + i\phi_u}$$ ← Magnetna faza, $\boxed{\phi_u = \frac{e}{\hbar}\int_{\text{zgornje veje}} \vec{A}\cdot d\vec{r}}$ ← Ta izraz smo lani pri Ramšaku izpeljali.

↑ faza, ki jo pridobi v odsotnosti $\vec{B}$, t.j., če je dolžina zgornje poti (v praksi to ni čist res, ampak ta faza je irelevantna)

Spodnje poti:

$$e^{i\vec{\varphi}_d} = e^{i\chi_d - i\phi_d}\ ;\quad \boxed{\phi_d = +\frac{e}{\hbar}\int_{\text{spodnje veje}} \vec{A}\cdot d\vec{r}}$$ ← Predznak je ok zaradi smeri integrala

Faza, ki jo elektron pridobi če gre po zgornji poti nazaj (↶),

$e^{i\overleftarrow{\varphi}_u} = e^{i\chi_u - i\phi_u}$, in po spodnji poti nazaj $e^{i\overleftarrow{\varphi}_d} = e^{i\chi_d + i\phi_d}$.

χ_i = dinamična faza, φ_i = magnetna faza

↑ če gremo po isti poti naprej ali nazaj ~~enako~~ enaka

↑ če greš po poti naprej namesto nazaj (ali obratno) spremeni predznak

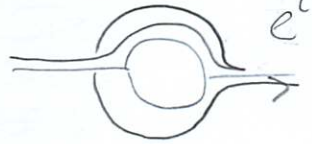
$$e^{i\varphi_{\circlearrowleft}} = e^{i(\chi_u+\chi_d+\underbrace{\phi_u+\phi_d})}$$

$e^{i\vec{\varphi}_u}\cdot e^{i\overleftarrow{\varphi}_d}$ $\qquad \underline{\underline{\phi_u+\phi_d}} = \oint_{\circlearrowleft} \frac{e}{\hbar}\vec{A}\cdot d\vec{r} = \frac{e}{\hbar}\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = \frac{\pi e}{\pi\hbar}\underbrace{\Phi_m}_{\text{magnetni pretok}} = \pi\frac{\Phi_m}{\Phi_0}$

Vpeljali smo $\boxed{\Phi_0 = \frac{\hbar\pi}{e} = \frac{h}{2e}}$ ⇐ kvant magnetnega pretoka

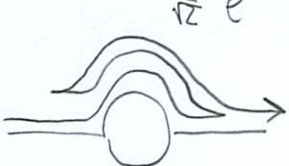
Poskusimo izračunati prevodnost, $G \overset{T=0}{=} \frac{2e^2}{h}|t|^2$ (če $T\neq 0$ moramo povprečiti preko energijskega intervala $4k_BT$).

$\frac{1}{\sqrt2}e^{i(\chi_u+\phi_u)}\frac{1}{\sqrt2}$



$e^{i(2\chi_u+\chi_d-\phi_d)}\frac{1}{\sqrt2}\left(-\frac12\right)\frac12\frac{1}{\sqrt2}$

$e^{i(2\chi_u+\chi_d+2\phi_u+\phi_u)}\cdot\frac{1}{\sqrt2}\cdot\frac12\cdot\frac12\cdot\frac{1}{\sqrt2}$



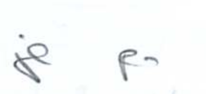
$\frac{1}{\sqrt2}e^{i(3\chi_u+\phi_u)}\left(-\frac12\right)^2\frac{1}{\sqrt2}$

$e^{i(\chi_u+2\chi_d+\phi_u)}\frac{1}{\sqrt2}\frac12\left(-\frac12\right)\frac{1}{\sqrt2}$

Najnižji redi poti, če gre najprej po zgornji poti (podobno je po spodnji).

Vse prispevke lahko skupaj seštejemo (podobno kot pri vajah) v geometrijske vrste. Oglejmo si le te prispevke, ki povzročijo oscilacije (ker so fizikalno najbolj zanimive prispevki).

$|t|^2 = |\text{vsota vseh prispevkov}|^2$

Oglejmo si le  in 

$$\left|\frac12 e^{i(\chi_u+\phi_u)} + \frac12 e^{i(\chi_d-\phi_d)}\right|^2 =$$

$$= \frac14\left(2 + e^{i(\chi_u+\phi_u-\chi_d+\phi_d)} + c.c.\right) =$$

$$= \frac14\left(2+2\cos(\chi_u-\chi_d+\phi_u+\phi_d)\right) = \boxed{\frac12 + \frac12\cos\left(\chi_u-\chi_d+\pi\frac{\Phi_m}{\Phi_0}\right)}$$

Dobimo oscilacije s periodo $\boxed{2\Phi_0 = \frac{h}{e}}$.

Tem oscilacijam pravimo Aharonov–Bohmove oscilacije.

Teh oscilacij ne moremo videti, ker je v argumentu kosinusa dinamična faza, ki se rada povpreči (to smo videli na vajah).

Poglejmo še en prispevek

$$|t|^2 = \left| -\frac{1}{8} e^{i(2\chi_u + \chi_d - \phi_d)} + \frac{1}{8} e^{i(2\chi_u + \chi_d + 2\phi_u + \phi_d)} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{64}\left(2 + -e^{i(-2\phi_u - 2\phi_d)} + c.c.\right) = \dots \cos(2(\phi_u + \phi_d)) =$$

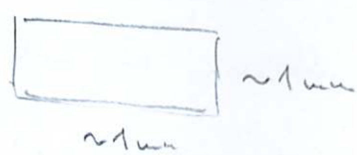
$$= \dots \boxed{\cos\left(2\pi \frac{\Phi_m}{\Phi_0}\right)}$$

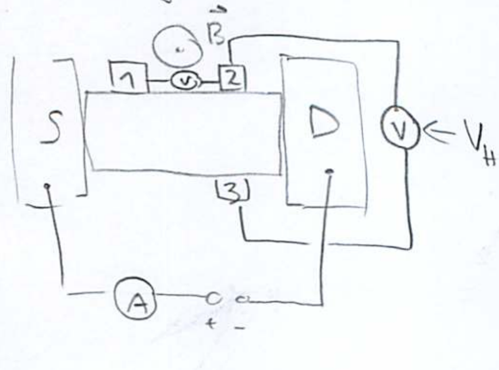
Tukaj se dinamične faze pokrajšajo in dobimo oscilacije s periodo Φ_0.

Tem oscilacijam pravimo ~~Altshuler-Aronov-Spivak~~ Altshuler–Aronov–Spivak oscilacije.

Kvantni Hallov pojav

To je makroskopski pojav,





Hallova napetost

Hallovo napetost lahko pojasnimo čisto klasično (običajen Hallov pojav).

V 80. letih so ugotovili, da se v res visokih poljih to čudno obnaša.

$$e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\vec{p}}{\tau} = m\vec{a} = 0 \leftarrow \text{stacionarno stanje}$$

člen zaradi trkov

povprečen čas med trki

Naš sistem je dvodimenzionalen, zato $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{pmatrix}$ in $\vec{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_y B \\ -v_x B \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$eE_x + ev_yB - \frac{mv_x}{\tau} = 0$$
$$eE_y - ev_xB - \frac{mv_y}{\tau} = 0$$

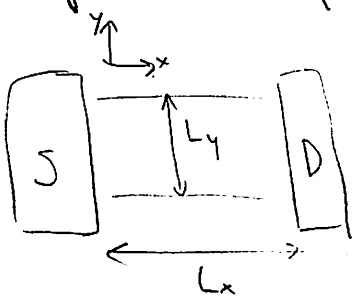
$\vec{j} = ne\vec{v}$: $\quad eE_x + \frac{j_yB}{n} - \frac{mj_x}{ne\tau} = 0$

$$eE_y - \frac{j_yB}{n} - \frac{mj_y}{ne\tau} = 0$$

$\vec{E} = \rho\vec{j}$, $\vec{j} = \sigma\vec{E}$

tenzor specifične upornosti

$$\begin{pmatrix} E_x \\ E_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{m}{ne^2\tau} & -\frac{B}{ne} \\ \frac{B}{ne} & \frac{m}{ne^2\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_x \\ j_y \end{pmatrix}$$



$$j_y = 0$$

$$E_x = \frac{m}{ne^2\tau} j_x \qquad E_y = \frac{B}{ne} j_x$$

$$\underbrace{E_xL_x}_{U_L = \text{napetost med [S] in [D]}} = \frac{m}{ne^2\tau} j_x L_x = \frac{m L_x \overbrace{L_y L_z j_x}^{=I}}{ne^2\tau L_y L_z} = U_L$$

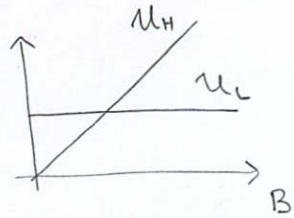
$$R = \rho \cdot \frac{L_x}{L_y L_z}$$

Podobno:

$$E_yL_y = \frac{B}{ne} \overbrace{\frac{L_y \cdot L_z}{L_z} j_x}^{I}$$

$$U_H = \frac{B}{ne\underbrace{L_z}_{\text{debelina}}} \cdot I$$

(10) NANOFIZIKA → PREDAVANJA



Pri višjih poljih prične U_L oscilirati 

U_H pa 

$$U_H = R_H I \; ; \quad R_H = \frac{h}{2e^2 N} \; , \quad G_H = \frac{2e^2}{h}\cdot N$$

celo št.

Kvant prevodnosti $G = \underbrace{\frac{2e^2}{h}}_{\text{v teoriji}}\cdot T(\varepsilon_F)$

težko ga je spraviti pod nekaj %

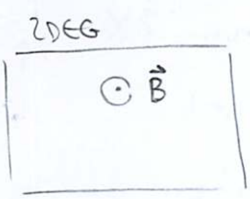
v eksperimentu

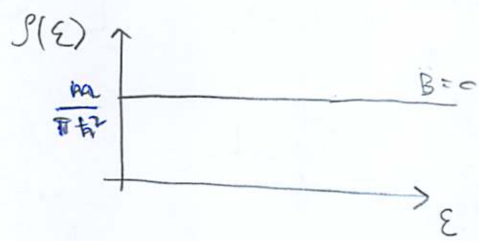
G_H pa lahko tako dobro določimo, da je kvantni Hallov pojav uporaben pri umeritvi merilcev upornosti.

Pri še večjih poljih dobimo FQHE (Fractional Quantum Hall effect), ko dobimo pri večjih vrednostih (to lahko pojasnimo s Cooperjevimi pari – ti se potem obnašajo kot delci z nabojem e/3 in imajo anionsko statistiko).

Mi se bomo omejili na celoštevilski kvantni Hallov pojav, katerega je lažje razumeti.

$\omega_c = \frac{|e|B}{m}$ ← Ciklotronska frekvenca





Za začetek si to oglejmo v kvaziklasični sliki (Bohrov model atoma).

za kroženje

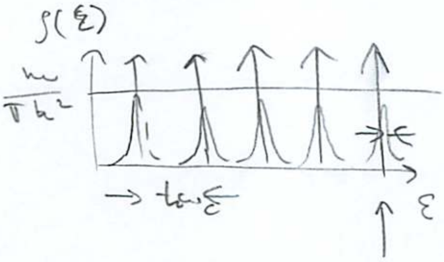
Faza: $2\pi R\cdot k + \frac{e}{\hbar}\underbrace{\oint \vec{A}\cdot d\vec{r}}_{\Phi_m = B\pi R^2} = 2\pi N$ (pogoj iz Bohrovega modela)

$v = \omega_c \cdot R$; $\hbar k = p = mv$

$$\underbrace{\frac{mv}{\hbar}}_{k} \cdot 2\pi \underbrace{\frac{v}{\omega_c}}_{R} + \frac{e}{\hbar} B\pi \frac{v^2}{\omega_c^2} = \frac{mv^2}{\hbar\omega_c}\cdot 2\pi + \frac{\overset{-|e|}{e} B}{\hbar \omega_c}\pi v^2 \frac{m}{|e|B} =$$

$$= \frac{mv^2}{\hbar\omega_c}(2\pi - \pi) = \frac{mv^2 2\pi}{2\hbar\omega_c} = 2\pi N$$

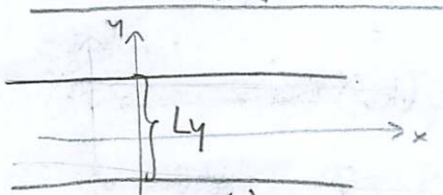
$$\Rightarrow \boxed{\frac{mv^2}{2} = N \cdot \hbar\omega_c}$$



Če je $\hbar\omega_c$ premajhen, začnejo elektroni bolj pogosto trkati in te orbite niso več relevantne – pridemo v klasični režim.

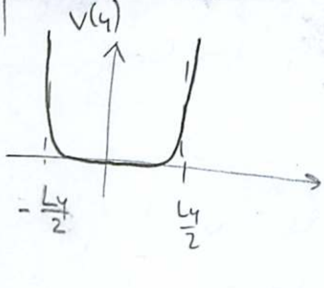
te niso čisto δ-„funkcije", ampak imajo nedoločenost širine $\Gamma \sim \frac{\hbar}{\tau}$ → ko je Γ tako široka, da se vrhovi začnejo prekrivati smo v klasičnem režimu

Schrödingerjeva enačba



žica je v y-smeri omejena

$$\left(\frac{(\vec p - e\vec A)^2}{2m} + V(y)\right)\Psi(x,y) = E\Psi(x,y)$$



$\vec B = \nabla\times\vec A$; $\vec A = -yB\hat e_x$ ⇐ $\vec B = (0,0,B)$, $\vec A$ smo tako izbrali – LANDAUOVA UMERITEV

$$\left(\frac{(p_x + eyB)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + V(y)\right)\Psi(x,y) = E\Psi(x,y)$$

Nastavek:

$$\Psi(x,y) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}}\psi(y)$$

S tem nastavkom dobimo:

$$\left(\frac{(\hbar k_x + e y B)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + V(y)\right)\psi(y) = E\,\psi(y)$$

$$\left(\frac{e^2B^2}{2m}\Big(y + \underbrace{\frac{\hbar k_x}{eB}}\Big)^2 + \frac{p_y^2}{2m} + V(y) - E\right)\psi(y) = 0$$

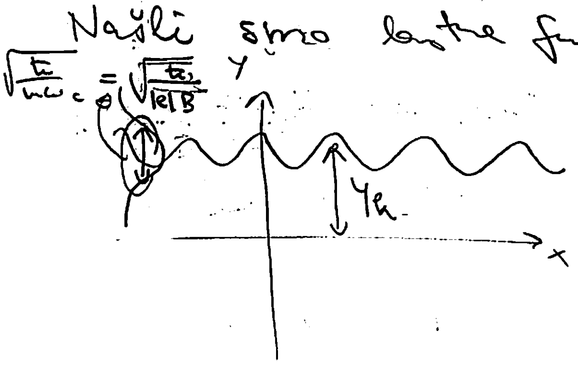
$$y_k = -\frac{\hbar k_x}{eB}$$

$$\left(\frac{e^2B^2}{2m}(y-y_k)^2 + \frac{p_y^2}{2m} + V(y) - E\right)\psi(y) = 0$$

Če postavimo $V(y)=c$, imamo harmonski oscilator. Potem je ravni val in gaus v prečni smeri (približno osnovno stanje).

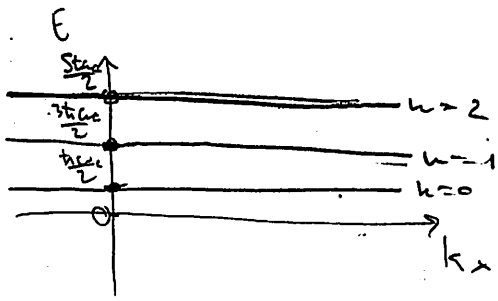
$E = \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right) \leftarrow \hbar\omega_c$ so razlike med nivoji (isto kot prej, le da imamo zdaj še $\frac{1}{2}$ zraven, torej boljši rezultat kot prej).

Našli smo lastne funkcije...

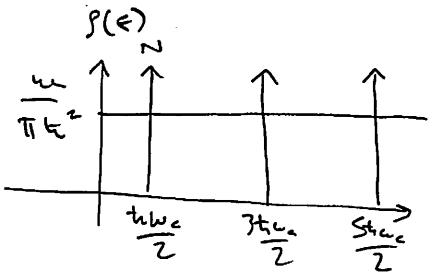


$$E = \hbar\omega_c\left(n+\frac{1}{2}\right) \neq E(k_x)$$

Energija je odvisna le od nivoja v prečni smeri in ni funkcija valovnega vektorja.



Poiskali smo „kanale" v traku, v njih je disperzija konstantna (prej je bila parabolična).



spin

$$N = \overset{\text{spin}}{2}\frac{L_y}{\Delta y_k} = \frac{2L_y}{\frac{\hbar}{|e|B}\Delta k_x} = \frac{2L_y}{\frac{\hbar}{|e|B}\frac{2\pi}{L_x}} = \underbrace{\frac{2L_xL_y|e|B}{h}}_{\text{ploščina traku}\cdot\frac{2|e|B}{h}}$$

N – št. stanj v vsaki s funkciji

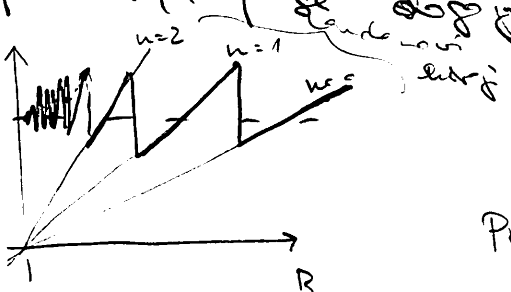
Δy_k kot razdalja v realnem prostoru

$$\boxed{N = S\,\frac{|e|B\cdot 2}{h}}$$

V vsaki delta funkciji je ust. št. stanj kolikor točk in št. stanj narašča z B, razdalja med δ-funkcijami pa gre linearno z B, tako da v povprečju gostota stanj ostaja enaka ($S \frac{m}{\pi \hbar^2}$).

Tem vrhovom pravimo Landauovi nivoji.

Poglejmo si, kaj se dogaja s Fermijevo energijo, ko ostaja št. elektronov konstantno in povečujemo B.

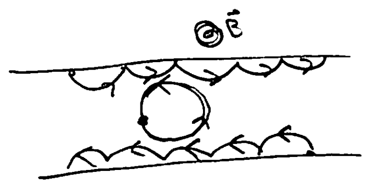


Pri velikih B bodo vsi elektroni v prvem Landauovem nivoju (ker se št. nivojev pri n=0 zelo poveča - imamo fiksno št. elektronov in dovolj velike).

Ko nižamo B, moramo pričeti polniti drugi Landauov nivo (itd.). Fermijeva energija bo skakala (narobe bo ...).

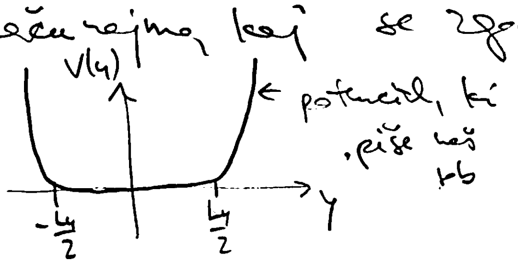
Grupna hitrost elektronov $v_x = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k_x} = 0$, ker $E \neq E(k_x)$ in električnega toka je 0 (to je tudi klasični rezultat, ker elektroni klasično krožijo in se v povprečju ne premikajo).

Očitno Drudejev približek ne opiše vsega (pri nizkih poljih deluje, pri visokih pa ne).



Poskusimo opisati rob žice. Če se odbija pa od robov, bi morali dobiti neki tok. To velja v klasičnem približku.

Izračunajmo, kaj se zgodi kvantnomehansko.



(14) NANO FIZIKA ⇒ PREDAVANJA

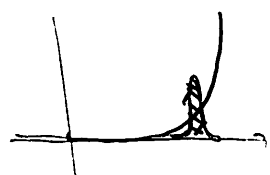
$$\left[\frac{(\vec{p}-e\vec{A})^2}{2m}+V(y)\right]\Psi(x,y)=E\Psi(x,y)$$

$$\vec{A}=-yB\hat{e}_x$$

$$\psi(x,y)=\frac{e^{ikx}}{\sqrt{L_x}}\Psi(y)\;;\quad\left[\frac{p_y^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega_c^2(y-y_k)^2+V(y)\right]\Psi(y)=E\Psi(y)$$

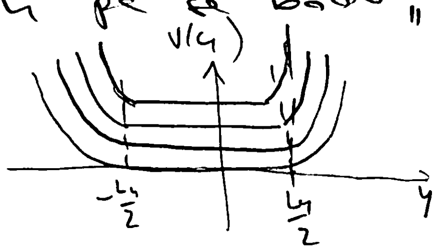
Naš potencial ni ostra stopnica, temveč dost je neka širina, na kateri ~~zvezn~~ potencial zvezno naraste.

Ko bi samo imeli $V=c$, bi smo imeli širino $\sqrt{\frac{\hbar}{|e|B}}$. Predpostavimo, da okrog širine valovne funkcije približno fekso. Pri velikih B, bo širina majhna v primerjavi s širino potencialne stopnice,

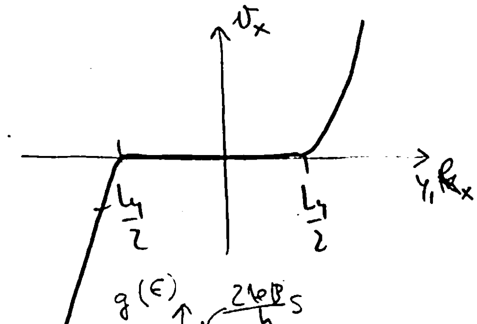


Tako da lahko predpostavimo, da je potencial približno konstanten po celi širini funkcije in potem poznamo rešitev, $E=\hbar\omega_c(k+\frac{1}{2})+V(y_k)$.

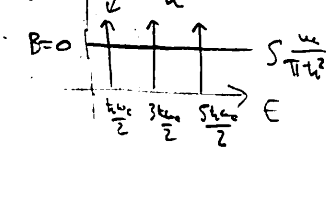
Znotraj žice bodo Landauovi nivoji potem taki kot prej, na robovih pa se bodo „zavihali navzgor".

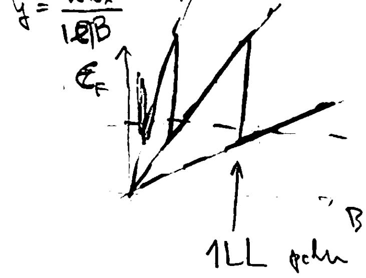


$$v_x=\frac{1}{\hbar}\frac{\partial E}{\partial k_x}=\frac{1}{\hbar}\frac{\partial V(y_k)}{\partial k_x}=\frac{1}{|e|B}V'(y_k)$$

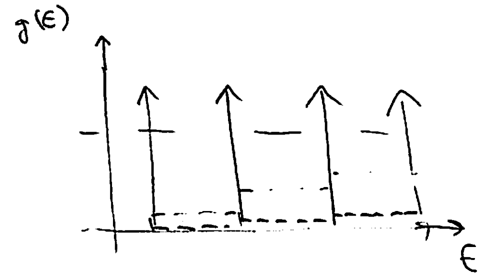


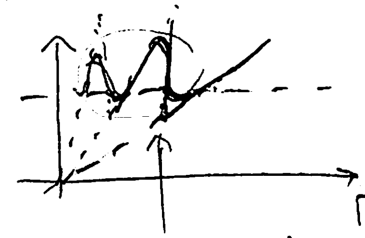
Elektroni na robu žice bodo tekli kvantnomehansko imeli hitrost



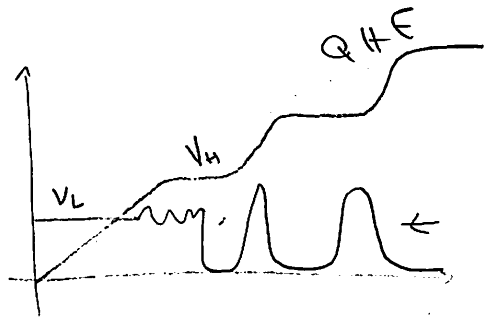


To sta idealizirani sliki. V gostoti stanj še nismo upoštevali, da se Landauovi nivoji ukrivijo navzgor (gl.). Zaradi ukrivljenja dobimo še nekaj neničelno gostoto stanj med Landauovimi nivoji!

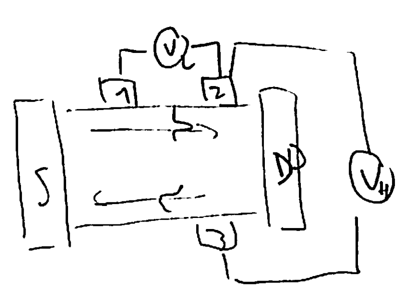




to prehodi so zelo zvezni, a so kljub temu precej ostri



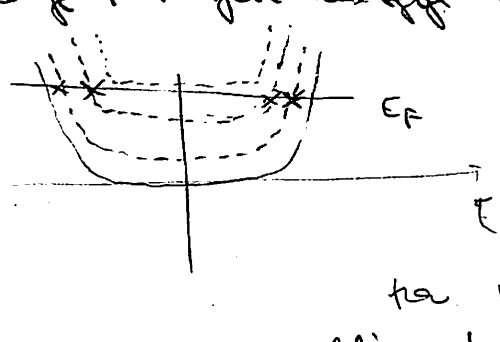
SHUBNIKOV - DE HAAS oscilacije



$$\begin{pmatrix} I_S \\ I_1 \\ I_2 \\ I_D \\ I_3 \end{pmatrix} = \frac{2e^2}{h} \begin{pmatrix} -M & 0 & 0 & 0 & M \\ M & -M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & -M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & -M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & -M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_S \\ V_1 \\ V_2 \\ V_D \\ V_3 \end{pmatrix}$$

to matriko moremo nekako zapisati

Poglejmo si situacijo, ko je Fermijeva energija vmes med dvema Landauovima nivojema.



Stanja, ki prevajajo tok na zgornjem in spodnjem robu žice so v prečni smeri zelo ozka. Zato se tok robu ne odbije, ker so edina stanja po katerih se lahko „odbije nazaj" na drugi strani sistema.

Zato sta D→S in S→D enaka $\frac{2e^2}{h} M$, kjer je M št. „odprtih kanalov" (v narisanem primeru je M=2) (M = št. kanalov „v eno smer"). Od tod pridejo „M" v matriki.

Vsi ostali (razen diagonale) morajo biti enaki 0 (ker tipoboli niso možni ⇒ tok zaradi $\vec{B}$ ves čas teče po robu). Zaradi Kirchoffovih zakonov so po diagonali členi enaki $-M$.

Na ①, ②, ③ priključimo voltmeter; $I_1 = I_2 = I_3 = 0$.

$$M V_S - M V_1 = 0$$

$$M V_1 - M V_2 = 0 \qquad V_1 = V_S = V_2$$

$$M V_D - M V_3 = 0 \qquad V_3 = V_D$$

Naj bo celoten tok skozi sistem enak I. Potem je $I_S = -I$ in $I_D = I$.

Odtod sledi:

$$-I = (-M V_S + M V_3)\frac{2e^2}{h} = \frac{2e^2}{h} M (V_D - V_S)$$

$$I = \frac{2e^2}{h} M (V_2 - V_D) = \frac{2e^2}{h} M (V_S - V_D)$$

ekvivalentni enačbi

$$-V_D + V_S = V_2 - V_3 = V_H = \frac{h}{2e^2 M} I$$

$$-V_2 + V_1 = V_L = 0$$

$$I = \underbrace{\frac{2e^2}{h} M}_{\text{Hallova prevodnost } G_H} V_H$$

S tem smo pojasnili sliko, Hallova napetost je kvantizirana in gre kot $\frac{1}{M}$, longitudinalna napetost pa pade proti 0 (kako jo merimo se v teh „kontaktih").

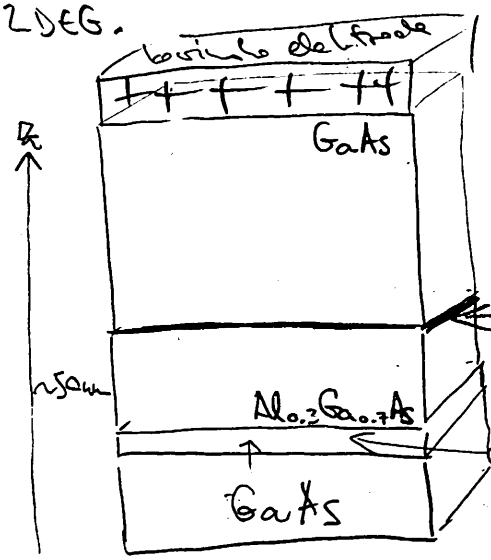
Pri večjih M teh platojev ne opazimo, ker se „razmažejo" zaradi teh gostot stanj (?).

Longitudinalna upornost se pojavi ~~pri~~ na landauovih nivojih.

Kar smo do zdaj naredili je zelo preprosto in ne pojasni eksperimenta. Mi smo ~~pre~~ rekli, da so prehodi ozki, torej bi morali imeti „platoji" zelo ozko širino in tega z eksperimenta ne moremo ~~pojasniti~~ opaziti.

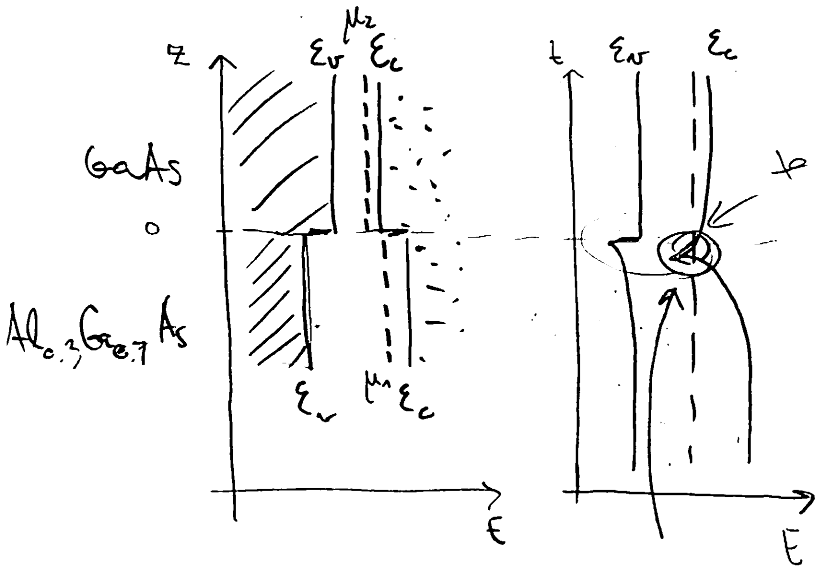
Poskusimo pojasniti, zakaj je ~~ta~~ prehod ($E_F(B)$) širši (ta more biti istega reda velikosti kot širina območij, kjer je E_F v Landauovem nivoju).

Da bi videli, zakaj je to tako široko, si oglejmo kako naredijo 2DEG.



Na površino kristala GaAs postavijo plast drugega polprevodnika, ki je zlitina $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$.

2DEG nastane na stiku med GaAs in $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$.



to se zgodi zaradi naboja, ki se nabere na stiku

---- = kemijski potencial

Tako stanje bi imeli, ko bi bila sistema ločena. Na stiku se morata potenciala poravnati, zato se

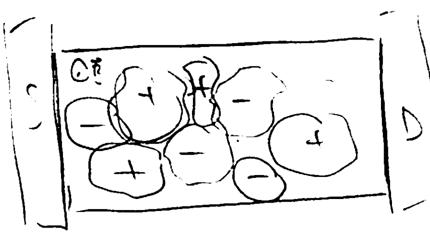
Na tem območju je kemijski potencial nad E_c, zato so elektroni na tem območju v z-smeri močno omejeni, ampak so skoraj povsem gibljivi v ravnini stika.

V z-smeri imamo diskreten energijski nivo, ki je v tej smeri omejen. Višji energijski nivoji so ~~skoraj~~ nezasedeni.

V praksi je teh elektronov premalo, zato dodajo tisto plast silicijevih dopantov in zgoraj (spodaj; odvisno kako obrneš) dodaje pozitivno nabito kovinsko elektrodo.

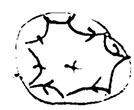
V 2DEG so sistemi praktično čisti in imajo elektroni povprečno prosto pot nekaj μm.

To pa ni čisto res, zaradi nečistoč (donorjev) v dopantni plasti, ostajajo ~~zgoraj na~~ v plasti z dopiranim polprevodnikom dobimo naključne razporejene pozitivne točkaste ~~naboje~~ in zato ~~je ta~~ ~~sima ta~~ potencial naključne fluktuacije.

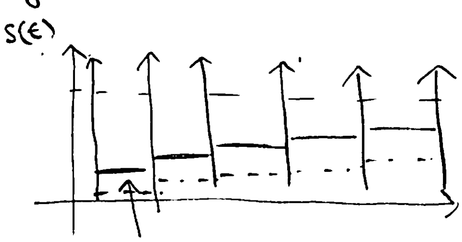


Nekaj najnižjih stanj bi morali iskati s tem izbočenim potencialom, $V \neq V(y)$ ampak $V = V(x,y)$. Dolžinska skala je reda velikosti širine $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ plasti.

Po teh „luknjah" se ko e^- premika „po elipsi",



Stanje v „δ-funkciji" bodo zdaj razširjeno. V enem Landauovem nivoju bomo imeli stanje z višjimi in nižjimi energijami.

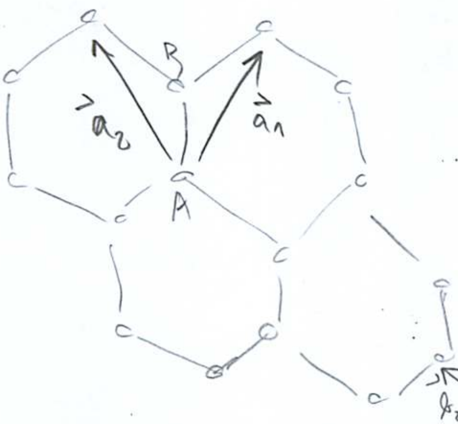


k črtkane črte se precej dvigne (v polne črt). Ti platoji se razširijo.

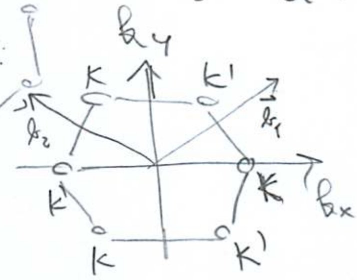
Kaj se zgodi, ko pridemo v vmesno območje?

Pri energijah, ki so blizu povprečja teh fluktuacij, bodo črte konstantne energije „prebile sistem" („slika skozi"). Takrat lahko elektron preko orbit konstantne energije pride z zgornje na spodnje stran in obratno. Temu pojavu pravimo PERKOLACIJA

Grafen



$$\vec{a}_1 = a\left(\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \vec{r}_A = 0$$
$$\vec{a}_2 = a\left(-\tfrac{1}{2}, \tfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \vec{r}_B = a\left(0, \tfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a}\left(1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$
$$\vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a}\left(-1, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$



$$\vec{K} = \frac{\vec{b}_1 - \vec{b}_2}{3} = \frac{2\pi}{3a}(2,0) = \frac{4\pi}{3a}(1,0)$$
$$\vec{K}' = \frac{\vec{b}_2 - \vec{b}_1}{3} = \frac{4\pi}{a}(-1,0)$$

Grafen obravnavamo v približku tesne vezi, kjer je γ prekrivalni integral med sosednjima p_z orbitalama.

$$-\gamma\,\psi_{\vec{R},B} - \gamma\,\psi_{\vec{R}-\vec{a}_1,B} - \gamma\,\psi_{\vec{R}-\vec{a}_2,B} = E\,\psi_{\vec{R},A}$$
$$-\gamma\,\psi_{\vec{R},A} - \gamma\,\psi_{\vec{R}+\vec{a}_1,A} - \gamma\,\psi_{\vec{R}+\vec{a}_2,A} = E\,\psi_{\vec{R},B}$$

Vzamemo nastavek $\psi_{\vec{R}\,{A \atop B}} = \psi_{A \atop B}\, e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}}$

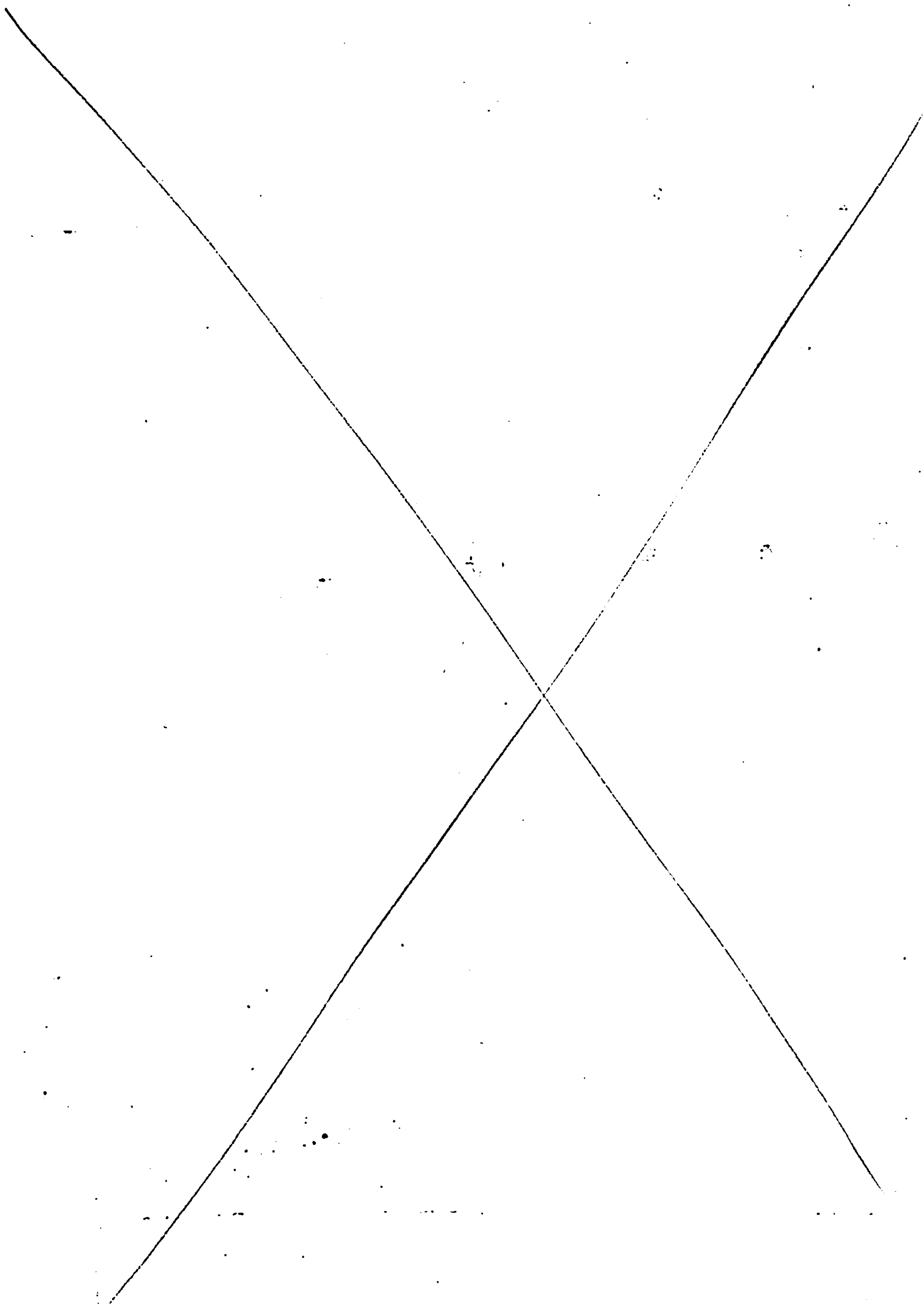
$$\Rightarrow \quad -\gamma\,\psi_B\left(1 + e^{-i\vec{a}_1\cdot\vec{k}} + e^{-i\vec{a}_2\cdot\vec{k}}\right) = E\,\psi_A$$
$$-\gamma\,\psi_A\left(1 + e^{i\vec{a}_1\cdot\vec{k}} + e^{i\vec{a}_2\cdot\vec{k}}\right) = E\,\psi_B$$

Rešitev obstaja, ko je determinanta sistema enaka 0,

$$\boxed{\begin{pmatrix} -E & -\gamma\left(1 + e^{-i\vec{k}\vec{a}_1} + e^{-i\vec{k}\vec{a}_2}\right) \\ -\gamma\left(1 + e^{i\vec{a}_1\vec{k}} + e^{i\vec{a}_2\vec{k}}\right) & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = 0}$$

(2a) NANOFIZIKA → PREDAVANJA

$$\Rightarrow E = \pm \gamma \left| 1 + e^{i\vec{k}\vec{a}_1} + e^{i\vec{k}\vec{a}_2} \right|$$



Zanima nas k, koji se događa u blizini Fermijeve energije (u tom posebnom točkom), zato razvijemo okolo $\vec{K}$; $\vec{k} = \vec{K} + \vec{q}$ (i tudi okolo $\vec{K}'$).

$$\vec{K} = \frac{\vec{b}_1 - \vec{b}_2}{3} \quad ; \quad \vec{K}' = \frac{\vec{b}_2 - \vec{b}_1}{3}$$

$$\vec{K} \cdot \vec{a}_1 = \frac{2\pi}{3} \quad ; \quad \vec{K} \cdot \vec{a}_2 = -\frac{2\pi}{3}$$

$$\boxed{1 + e^{i(\vec{K}+\vec{q})\vec{a}_1} + e^{i(\vec{K}+\vec{q})\cdot\vec{a}_2}} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} \cdot e^{i\vec{q}\vec{a}_1} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} e^{i\vec{q}\vec{a}_2} =$$

q je majhen, zato razvijemo

$$= \underbrace{1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}}}_{\overset{!!}{0}} + e^{i\frac{2\pi}{3}} i\vec{q}\vec{a}_1 + e^{-i\frac{2\pi}{3}} i\vec{q}\vec{a}_2 + \mathcal{O}\left((\vec{q}\vec{a}_1)^2\right) =$$

$$= \cos\frac{2\pi}{3}\, i\vec{q}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + i\sin\frac{2\pi}{3}\, i\vec{q}(\vec{a}_1 - \vec{a}_2) =$$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} i q_y \cdot a - \frac{\sqrt{3}}{2} q_x a = \boxed{-\frac{\sqrt{3}a}{2}(q_x + i q_y)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\gamma\left(1 + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{a}_1} + e^{-i\vec{k}\cdot\vec{a}_2}\right) \\ -\gamma\left(1 + e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}_1} + e^{i\vec{k}\cdot\vec{a}_2}\right) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

↑ Schrödingerjeva enačba v približku tesne vezi

Za $\vec{k} = \vec{K} + \vec{q}$ lahko Schrödingerjevo enačbo prepišemo kot:

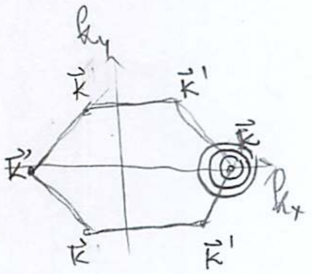
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3}a\gamma}{2}(q_x - i q_y) \\ \frac{\sqrt{3}a\gamma}{2}(q_x + i q_y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_A \\ \psi_B \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{E = \pm \frac{\sqrt{3}a\gamma}{2}|\vec{q}| = \pm \hbar c^* q}$$

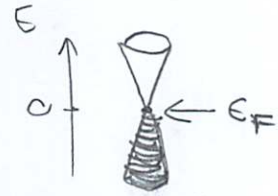
$q \equiv |\vec{q}|$

Ta izraz velja v bližini oglišča Brillouinove cone.

Črte konstantne energije v bližini oglišča so krogi okoli oglišča.



Izkaže se, da isto velja za $\vec{K}'$.



$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ⇐ Običajno imamo le pozitivne energije ~~stanja~~ in disperzija je kvadratna.

Mi pa imamo linearno disperzijo. Relativistično bi veljalo $E=\sqrt{(mc^2)^2+p^2c^2} \xrightarrow{m\to 0} cp = c\hbar k$. Če definiramo $c^* = \frac{\sqrt{3}a\gamma}{2\hbar}$, se elektroni obnašajo kot delci brez mase (to bi bili v prvem približku nevtrini). Tako da je fizika e^- v grafenu ~~...~~ enaka kot fizika nevtrinov (~~Diracova enačba~~). V tem našem hamiltonianu se torej skriva neke vrste Diracova enačba.

Našo Schrödingerjevo enačbo lahko prepišemo kot

$$\boxed{\hbar c^* (q_x \sigma_x + q_y \sigma_y)\psi = E\psi}, \quad \text{oz.} \quad \hbar c^* \underbrace{q\hat{n}}_{\vec{q} = q\cdot\hat{n}}\cdot\vec{\sigma}\psi = E\psi$$

To nima nič skupnega s pravim elektronskim spinom, vsako stanje je dvakrat degenerirano (↑, ↓). Temu (tako definiranemu) spinu pravimo PSEUDOSPIN $\vec{\sigma}$ (ψ_A je amplituda za A celico in ψ_B za B celico).

Operator $\hat{n}\cdot\vec{\sigma}$ je sučnost. Če je lastna vrednost +1, je delec desnosučen, če pa je −1, je levosučen.

Tukaj je mala razlika z delci, nevtrini ($E>0$) so levosučni, antinevtrini ($E<0$) pa desnosučni (ravno obratno kot zdaj).

$$\vec{K}: \quad \hbar c^* \vec{q}\cdot\vec{\sigma}\,\psi = E\psi$$
$$\vec{K}': \quad \hbar c^* \vec{q}\cdot(-\vec{\sigma}^*)\,\psi = E\psi$$

Tako da je celotna matrična enačba enaka

$$\hbar c^* \left(\begin{array}{c|c} -\vec{\sigma}^*\cdot\vec{q} & 0 \\ \hline 0 & \vec{\sigma}\cdot\vec{q} \end{array}\right)\begin{pmatrix}\psi_{\vec{K}'} \\ \psi_{\vec{K}}\end{pmatrix} = E\begin{pmatrix}\psi_{\vec{K}'} \\ \psi_{\vec{K}}\end{pmatrix}.$$

Ta zapis je bločen, ker nimamo sklopitve med obema komponentama (kasneje bomo videli, da je to smiseln zapis, ko bomo dodali še npr. magnetno polje).

Tukaj je $\psi_K = \begin{pmatrix}\psi_{KA} \\ \psi_{KB}\end{pmatrix}$ in $\psi_{K'} = \begin{pmatrix}\psi_{K'A} \\ \psi_{K'B}\end{pmatrix}$.

Zdaj se omejimo na K (pri K' je podobno).

$$\psi_{K\vec{q}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{R}} \psi_{KA}\, e^{i(\vec{K}+\vec{q})\cdot\vec{R}}\, \phi_{p_z}(\vec{r}-\vec{R}-\vec{r}_A) + \sum_{\vec{R}} \psi_{KB}\, e^{i(\vec{K}+\vec{q})\cdot\vec{R}}\, \phi_{p_z}(\vec{r}-\vec{R}-\vec{r}_B)$$

Ta nastavek smo včasih uporabili v približku tesne vezi.

$$\psi_{K\vec{q}}(\vec{r}) = \sum_{\vec{R}} \underbrace{\left(\psi_{KA}\, e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}}\right)}_{\psi_{KA}(\vec{R})} \cdot e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}}\, \phi_{pz}(\vec{r}-\vec{R}-\vec{r}_A) + \ldots$$

envelope function ← $\vec{q}$ je majhen, zato tukaj skoraj ni prostorske odvisnosti (ko gre $\vec{R}$ iz ene v drugo osnovno celico, se $e^{i\vec{q}\cdot\vec{R}}$ skoraj ne spremeni)

(24) NANOFIZIKA → PREDAVANJA

Zapisali bomo enačbe s pomočjo teh „ovojnih funkcij"; ko porušimo translacijsko simetrijo Blochove funkcije niso več ustrezen nastavek.

$$\hbar c^* \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\, \psi_k = E \psi_k \quad \Big/ \cdot e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$$

$$\hbar c^* \vec{\sigma}\cdot\vec{q}\, \psi_k e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}} = E \psi_k e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$$

$$\underbrace{\hbar c^* \psi_k \frac{1}{i}\vec{\sigma}\left(\nabla\right.}_{=\hat{p}} \left. e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}\right) = E \psi_k e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$$

$$\boxed{c^* \vec{\sigma}\cdot\hat{p}\, \Psi_k(\vec{r}) = E \Psi_k(\vec{r})} \leftarrow \text{Definirali smo } \Psi_k(\vec{r}) = \psi_k e^{i\vec{q}\cdot\vec{r}}$$

Izkaže se, da bo ta enačba veljala tudi takrat, ko v Hamiltonian dodamo člene, ki se skozi osnovne celice skoraj ne bo spreminjalo (približno krajevno konstantni členi). Izpeljava je v knjigi.

Oglejmo si, kakšni so Landauovi nivoji v grafenu.

$$\vec{p} \longrightarrow \vec{p} - e\vec{A} \;; \quad \vec{A} = -yB\hat{e}_x$$

$$c^* \vec{\sigma}\cdot(\vec{p} - e\vec{A})\Psi_k(\vec{r}) = E\Psi_k(\vec{r})$$

$$c^* \vec{\sigma}\cdot(\vec{p} + eyB\hat{e}_x)\Psi_k(\vec{r}) = E\Psi_k(\vec{r})$$

Vstavimo nastavek $\Psi_k(\vec{r}) = e^{ikx}\Psi_k(y)$:

$$c^* \vec{\sigma}\cdot\left(\hbar k\hat{e}_x + p_y\hat{e}_y + eyB\hat{e}_x\right)\Psi_k(y) = E\Psi_k(y)$$

$$c^*\left((\hbar k + \underset{-|e|}{e}yB)\sigma_x + p_y\sigma_y\right)\Psi_k(y) = E\Psi_k(y)$$

$$c^*\left(-|e|B\left(y - \frac{\hbar k}{|e|B}\right)\sigma_x + p_y\sigma_y\right)\Psi_k(y) = E\Psi_k(y)$$

Uvedemo konstante $y_k = \frac{\hbar k}{|e|B}$, tako kot zadnjič. Podobno je smiselno uvesti $\sigma_+ = \sigma_x + i\sigma_y$, $\sigma_- = \sigma_x - i\sigma_y$ in $\sigma_x = \frac{\sigma_+ + \sigma_-}{2}$, $\sigma_y = \frac{\sigma_+ - \sigma_-}{2i}$.

$$c^* \left[\underbrace{(-|e|B(y-y_k) - i p_y)}\frac{\sigma_+}{2} + \underbrace{(-|e|B(y-y_k) + i p_y)}\frac{\sigma_-}{2} \right] \psi_k(y) = E\psi_k(y)$$

Tole dvoje sta skoraj kreacijski in anihilacijski operator za harmonični oscilator

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{x_0} + i\frac{p x_0}{\hbar}\right); \quad a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{y}{y_0} - \frac{i p x_0}{\hbar}\right)$$

Zato je smiselno uvesti $y_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{|e|B}}$ in dobim

$$-\frac{\hbar c^*}{y_0\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{y-y_k}{y_0} + i\frac{y_0 p_y}{\hbar}\right)\sigma_+ + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{y-y_k}{y_0} - i\frac{y_0 p_y}{\hbar}\right)\sigma_-\right]\psi_k(y) = E\psi_k(y)$$

Imamo še offset; $\tilde{y} = y - y_k$ in $p_{\tilde{y}} = p_y$. Tako da smo dobili prave a in a^+ (za $\tilde{y} = y - y_k$).

$$\boxed{-\frac{\hbar c^*}{y_0\sqrt{2}}\left(a\sigma_+ + a^+\sigma_-\right)\psi_k(y) = E\psi_k(y)}$$

Zdaj uvedemo tako ω_c da lahko to prepišemo v obliko

$$-\frac{\hbar\omega_c}{2}\left(a\sigma_+ + a^+\sigma_-\right)\psi_k(y) = E\psi_k(y); \quad \omega_c = \sqrt{\frac{2|e|Bc^{*2}}{\hbar}}$$

Kasneje bomo videli, da je to ciklotronska frekvenca.

Zdaj to prepišem v matrično obliko,

$$-\hbar\omega_c \begin{pmatrix} 0 & a \\ a^+ & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{kA}(y) \\ \psi_{kB}(y) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \psi_{kA}(y) \\ \psi_{kB}(y) \end{pmatrix}$$

Imamo sklopljen sistem, $(\psi_A \equiv \psi_{kA}(y),\ \psi_B \equiv \psi_{kB}(y))$

$$-\hbar\omega_c\, a\, \psi_B = E\psi_A$$

$$-\hbar\omega_c\, a^+ \psi_A = E\psi_B$$

$$-\hbar\omega_c\, a^+\left(-\frac{\hbar\omega_c}{E}\, a\,\psi_B\right) = E\psi_B$$

$$\boxed{(\hbar\omega_c)^2 a^+ a\, \psi_B = E^2 \psi_B}$$

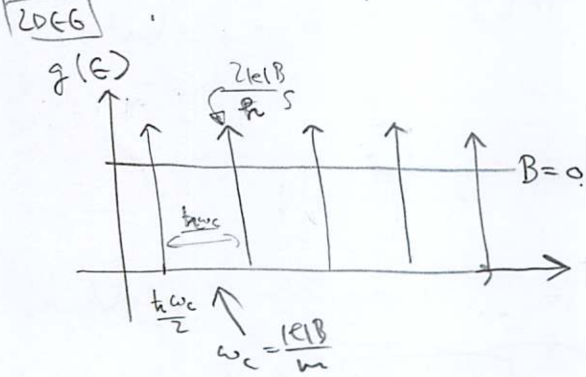
← To znamo rešiti, saj je ~~to~~ skoraj enačba harmonskega oscilatorja.

Potem je $E^2 = \hbar^2\omega_c^2 \cdot N \longrightarrow E = \pm\hbar\omega_c\sqrt{N}$

Nivoji niso več enakomerno razmaknjeni, ampak so z višanjem E vedno bolj skupaj (ne tako kot običajen nerelativističen harmonski oscilator). Poleg tega ~~........~~ je ω_c sorazmerna z $\sqrt{B}$ in ne z B.

Valovne funkcije ni težko najti, ampak jih ne bomo potrebovali.

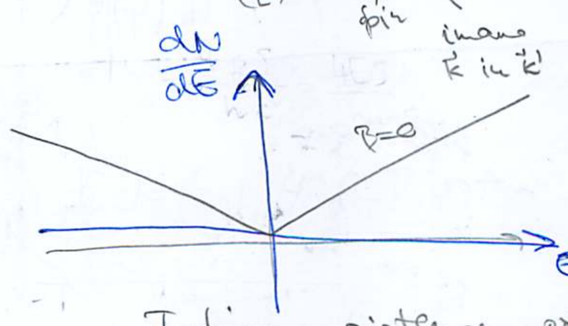
2DEG:



Grafen $E = \pm\hbar c^* q$ $B=0$

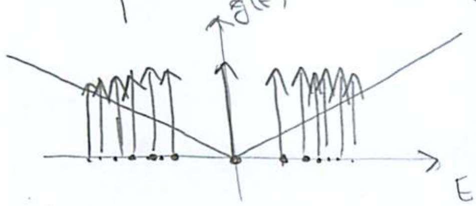
$$B=0:\ \frac{dN}{dE} = \frac{2\pi q\, dq}{\left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 dE} \cdot 2 \cdot 2 = S\,\frac{2}{\pi}\,\frac{q}{\hbar c^*} = S\,\frac{2|E|}{\pi\hbar^2 c^{*2}}$$

spin; imamo $\vec{K}$ in $\vec{K}'$



Takim sistemom pravimo POLKOVINE (semi-metals). To ni ne polprevodnik (ni energijske reže) in ne kovina (napolnjena imajo vsa stanja do E_F).

V prisotnosti polja bomo imeli „δ-funkcije"



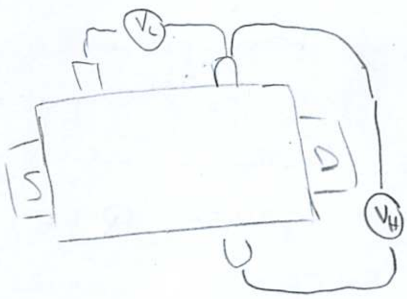
Koliko stanj je v teh „δ-funkcijah"?

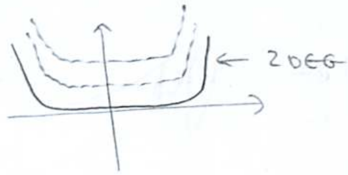
Enkrat vmes smo pojali $\tilde{y}=y-y_k$; $y_k=\frac{\hbar k}{|e|B}$, te pa smo dobili iz nastavka $\psi(\vec r)=e^{ik_x x}\chi(y)$.

Spet so vse uteži enake, $\frac{4|e|BS}{h}$ (to vidimo, če primerjamo z izrazom za 2DEG, ...) — 4 (namesto 2) dobimo iz istega razloga, kot pri energiji — $\vec K$ in $\vec K'$

$$\boxed{N=\frac{\overbrace{2}^{\text{spin}}\cdot\overbrace{2}^{K,K'}\cdot L_y}{\Delta y_k}=\frac{4L_y}{\frac{\hbar}{|e|B}\Delta k}=\frac{4L_xL_y|e|B}{2\pi\hbar}=\frac{4|e|BS}{h}}\qquad \Delta k=\frac{2\pi}{L_x}$$

Podobno kot smo pri točkah skoraj videli, da ~~ta~~ 1-D kristal zaradi termičnih fluktuacij ne obstaja, se to da pokazati za grafen (kot smo mi predpostavili), zato se ta malo „nagubi".

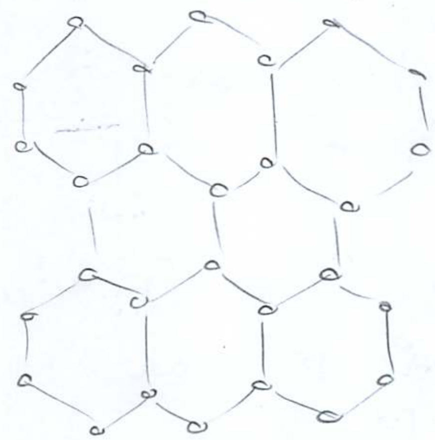


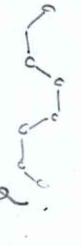


Tak potencial res dosežejo tako, da 2DEG omejijo (na robovih) z negativnimi elektrodami, ~100 nm nad nivojem 2DEG (na tistem višjem polprevodniku).

$$\varphi(\vec r)=\int \rho(\vec r')\frac{e}{4\pi\varepsilon|\vec r'-\vec r|}\,d\vec r'$$

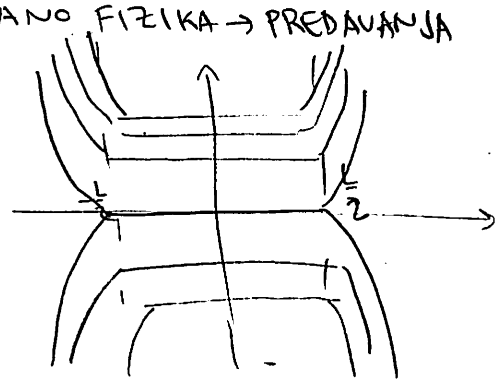
Na razdalji 100 nm je potencial (zaradi konvolucije) tudi v primeru točkastega naboja razmazan na ~100 nm (potencial se res počasi spreminja)



Kako bi grafen razrezali? Zgoraj je rob (zigzag) , pri strani pa  (armchair). Zanimivo še na ~~zares~~ izrezati tako, da bi bil rob celoten enega tipa.

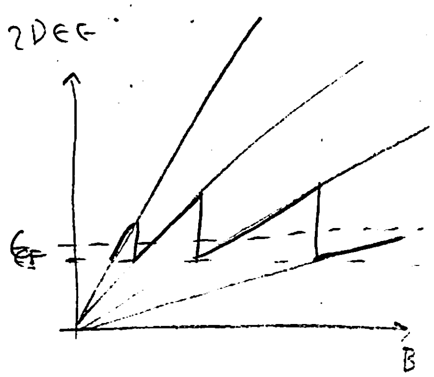
Če bi hoteli ~~na~~ izračunati Hallove napetost, moramo upoštevati rob. Tega ni tako enostavno narediti. Vrniti se moramo na približek tesne vezi.

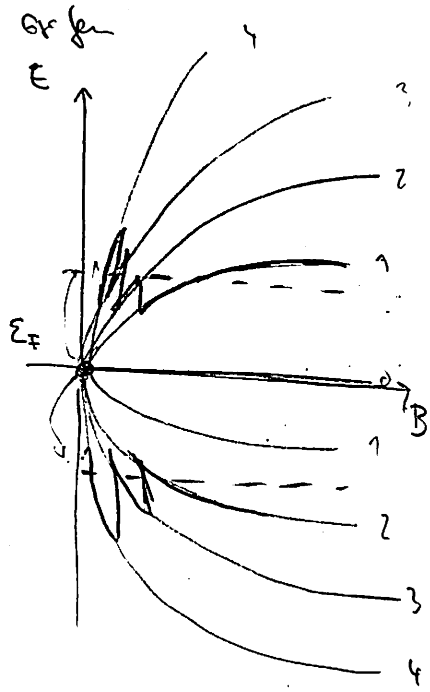
(28) NANO FIZIKA → PREDAVANJA



Izkaže se

Stanje s pozitivno energijo se ukrivlja navzgor, z negativno pa navzdol na sredi (debelo) dve veji gor-dol





$\omega_c \propto \sqrt{B}$

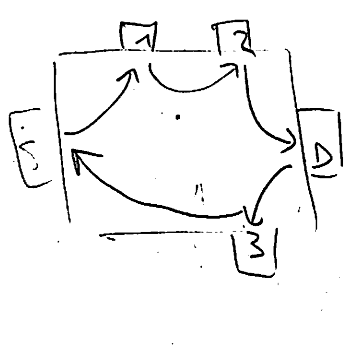
← Fermijeva energija je ves čas pri E=0 (neodvisno od B). Za razlago QFE, smo potrebovali poskoke E_F s spreminjanjem B.

To obliko eksperimentalno tako rešimo, da dodamo (ali odvzamemo) sistemu elektrone.

Druga možnost je, da pri fiksnem polju ($\vec{B}$) spreminjamo napetost na elektrodi, ~~ki E_F določa. Porazdelitev~~

V obeh primerih ~~dol~~ pridemo v režim, ko je E_F med dvema Landauovima nivojema, na robovih pa sta nebi nivoju.

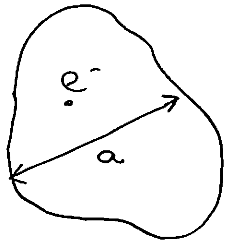
$$\begin{pmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{4e^2}{h}\left(M-\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} -1 & & & & 1 \\ 1 & -1 & & & \\ & 1 & -1 & & \\ & & 1 & -1 & \\ & & & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_S \\ V_1 \\ V_2 \\ V_D \\ V_3 \end{pmatrix}$$



Faktor $M-\frac{1}{2}$ je tukaj zato, ker vsak kanal sešteva 4-krat, le najnižje 2-krat (ker se ~~s~~ simetrično razcepi ↑↓).

$\boxed{\sigma_H = \frac{4e^2}{h}(M-1)}$ ← To vidimo iz matrike ;

Kvantne pike



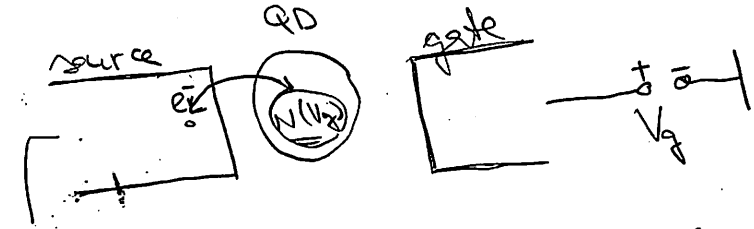
$\Delta E = \frac{\hbar^2}{2ma^2}$ ← ΔE je vedno take oblike (pri elektronu, kjer je a tipična dolžinska skala)

$U = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$ ← energija med dvema e^- na razdalji a

V kvantnih pikah se tudi energijski skoki „tepejo med seboj”. Coulombska interakcija je močnejša pri daljših razdaljah.

Za večino kvantnih pik lahko zanemarimo kvantizacijo energije zaradi kvantne mehanike (ΔE) in se lahko ~~omejimo~~ na klasičen približek elektrostatike.

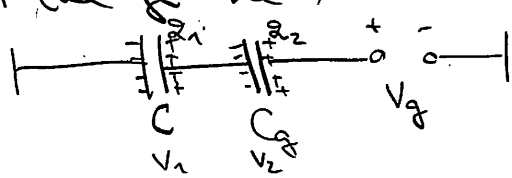
Kvantne pike so polprevodne in kovinske.



Stik med „source” elektrodo in kvantno piko mora biti dovolj ~~stik~~ dober, da bo tuneliranje še možno, ne sme pa biti preveč dober, saj je potem kvantna pika slabo definirana. Stik med piko in „gate” elektrodo mora biti še slabši, tako da je verjetnost za tuneliranje praktično 0 (tej „gate” pomeni le dodaten električni potencial).

Kvantni piki pravimo tudi ENOELEKTRONSKI TRANSISTOR.

Pika je na nek način ekvivalentna dvema kondenzatorjema



Desni kondenzator je v redu, levi pa malo „pušča”.

$N(V_g) = \frac{Q_2 - Q_1}{|e|}$ = − št. e^- na levi plošči desnega kondenzatorja + št. e^- na desni plošči levega kondenzatorja

(30) NANOFIZIKA → PREDAVANJA

$$V_1 + V_2 - V_g = 0$$

$$E = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C_g} \quad \leftarrow \text{energija električnog polja u kondenzatorima}$$

Minimizirati moramo energije pri pogoju, da je V_g fiksen. Zato naredimo Legendrove transformacijo.

$$\tilde{E}_{es} = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C_g} - q_2 V_g$$

$$V_1 + V_2 = V_g \Rightarrow \frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{C_g} = V_g$$

$$q_2 - q_1 = |e| N$$

$$q_2 = q_1 + |e| N \Rightarrow q_1 + q_1 \frac{C}{C_g} + |e| N \frac{C}{C_g} = V_g$$

$$q_1 \left(1 + \frac{C}{C_g}\right) = V_g - N \frac{|e| C}{C_g}$$

$$\underline{\underline{q_1}} = \frac{V_g C_g - N |e| C}{C_g + C} = \frac{V_g - \frac{|e| N}{C_g}}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}}$$

$$q_2 = q_1 + |e| N = \frac{V_g - \frac{|e| N}{C_g} + \frac{|e| N}{C} + \frac{|e| N}{C_g}}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}}$$

$$\underline{\underline{q_2 = \frac{V_g + \frac{|e| N}{C}}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}}}}$$

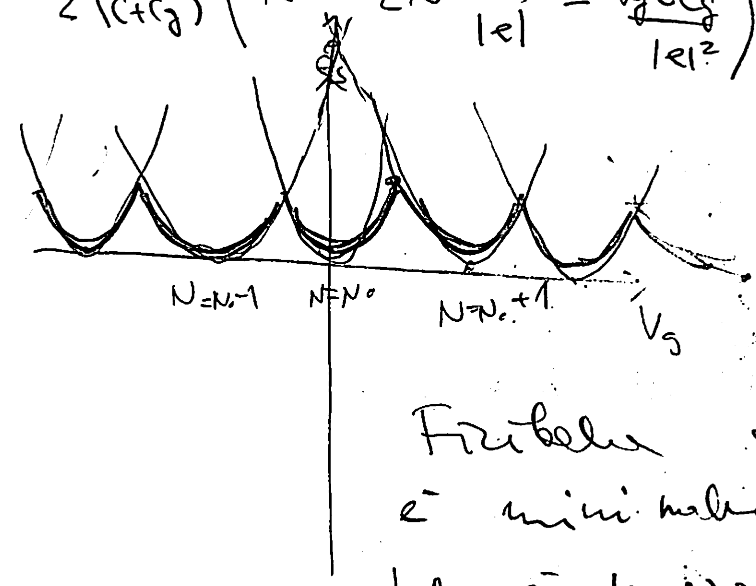
$$\tilde{E}_{es} = \frac{\left(V_g - \frac{|e| N}{C_g}\right)^2}{2C\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}\right)^2} + \frac{\left(V_g + \frac{|e| N}{C}\right)^2}{2C_g\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}\right)^2} - \frac{V_g + \frac{|e| N}{C}}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}} V_g =$$

$$= \frac{1}{2\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}\right)^2} \left(V_g^2 \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}\right) \cancel{- 2|e| N V_g \left(\frac{1}{C C_g} - \frac{1}{C C_g}\right)} + \frac{|e|^2 N^2}{C C_g} \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}\right) \right) -$$

$$- 2\left(V_g + \frac{|e| N}{C}\right) V_g \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{1}{2\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}\right)} \left(V_g^2 + \frac{|e|^2 N^2}{C C_g} - 2 V_g^2 - 2 \frac{|e| N}{C} V_g \right) = \frac{1}{2\left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}\right)} \left(\frac{|e|^2 N^2}{C C_g} - V_g^2 - 2 \frac{|e| N}{C} V_g \right)$$

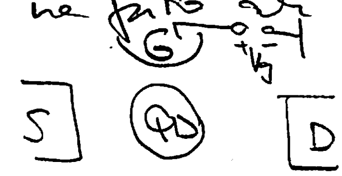
$$= \frac{|e|^2}{2(C+C_g)}\left(N^2 - 2N\frac{V_g C_g}{|e|} - \frac{V_g^2 C C_g}{|e|^2}\right) = \frac{|e|^2}{2(C+C_g)}\left(N - \frac{V_g C_g}{|e|}\right)^2 - \underbrace{\frac{V_g^2 C_g}{2}}_{\text{neodvisno od } N}$$



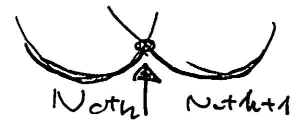
$$\boxed{\tilde{E} = \frac{e^2}{2(C+C_g)}\left(N - \frac{V_g C_g}{|e|}\right)^2}$$

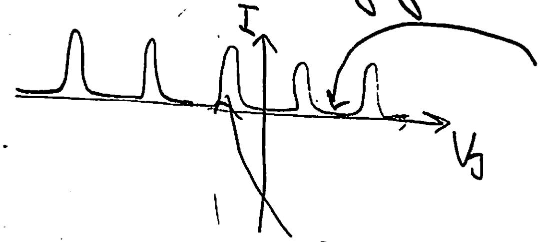
Fizikalno stanje so tista, ko bo N e^- minimalno. S spreminjanjem V_g bodo e^- tunelirali na piko ali z nje

To malo preuredimo:

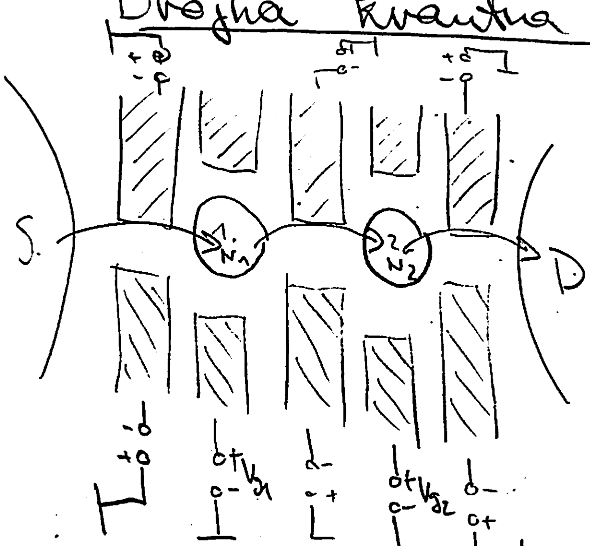


Če smo v presečišču dveh parabol, $I \neq 0$, ko tok teče. Obratno je v območju, kjer je potrebna energija za tok največja in toka praktično ni.





Dvojna kvantna pika - DQD

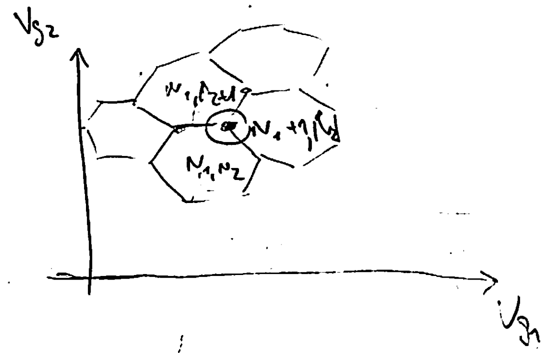


Elektrode so negativno nabite. Prvi set elektrod zato naredi potencialno tunelsko bariero. Podobno velja za ostale pare (desni in srednji).

Prehodi, označeni s puščicami, so tunelski.

Ostala dva para sta "gate" elektrodi (V_{g1}, V_{g2})

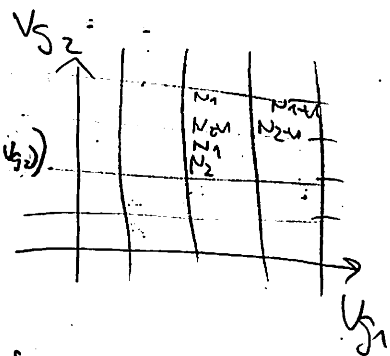
$N_1(V_{g_1}, V_{g_2})$, $N_2(V_{g_1}, V_{g_2})$



$$q_i = \sum_j C_{ij} V_j$$

← Tako izgleda v resnici (ker ni $N_1 \neq N_1(V_{g_2})$)

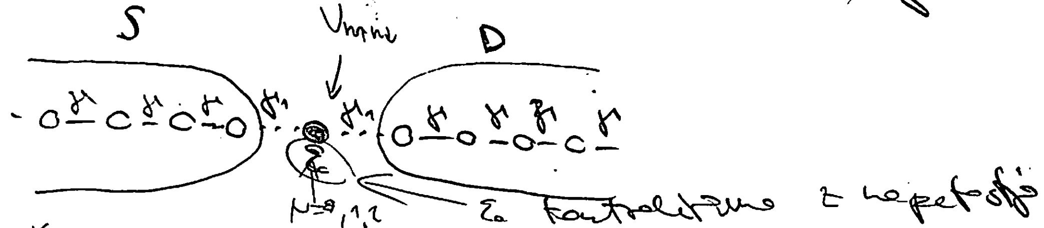
To bi pričakovali →



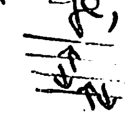
Zanimivo je, da se pojavijo točke, kjer so po 3 konfiguracije z enako energijo.

Če tako nastavimo V_{g_1}, V_{g_2}, da pridemo v take konfiguracije, tok teče brez problema.

Radi bi ocenili, koliko toka teče skozi tak sistem. Samo iz elektrostatike tega ne moremo videti.



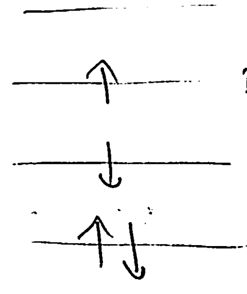
Če sta na kvantni piki dva elektrona, se bo energija povečala za U_{nanu}

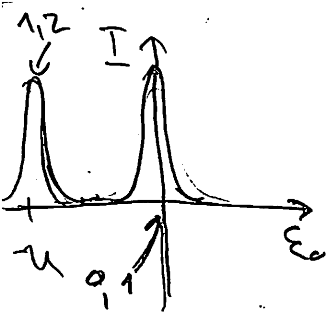
Opazujemo primer, ko imamo eno samo QM stanje, za N=0,1,2. Dovoljene konfiguracije so tri: 

Zato smo v režimu 

N=0,1 | N=1,2

$$H = U_{nanu} + \varepsilon_0 (\hat{n}_\uparrow + \hat{n}_\downarrow)$$



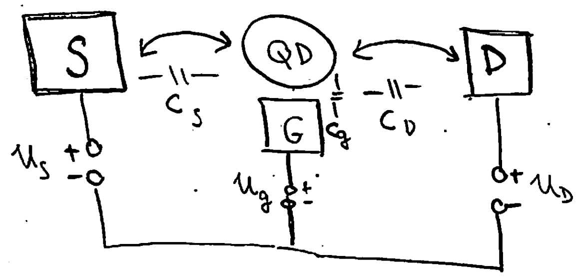


$$\varepsilon_0 = -U \begin{cases} N=1: & E = \varepsilon_0 = -U \\ N=2: & E = 2\varepsilon_0 + U = -U \end{cases}$$

$$\varepsilon = 0 \begin{cases} N=0: & E = 0 \\ N=1: & E = \varepsilon_0 = 0 \end{cases}$$

$E_F = 0$

S tem enostavnim modelom dobimo iste rešitve kot z elektrostatičnim računom prej.



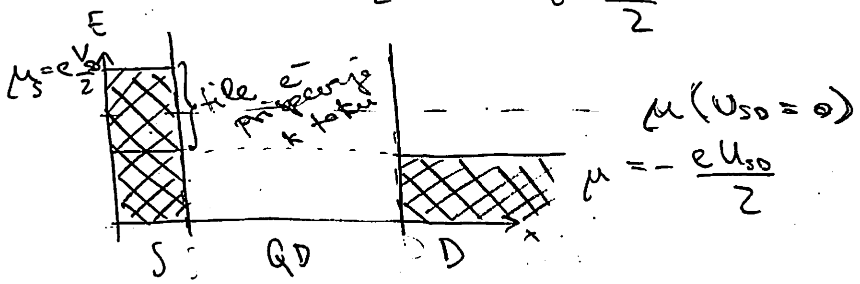
$C_{DD} = C_S + C_D + C_g$

Na začetku smo napisali $H = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C_{DD}} - \frac{Q}{C_{DD}} C_{DE} V_E = \frac{|e|^2 N^2}{2 C_{DD}} - \frac{|e| N}{C_{DD}} (U_g C_g + U_D C_D + U_S C_S)$

Vpeljemo: $E_D = \frac{|e|^2}{C_{DD}}$; $\tilde{U}_g = \frac{C_g U_g}{|e|}$; $\tilde{U}_s = \frac{C_s U_s}{|e|}$, $\tilde{U}_D = \frac{C_D U_D}{|e|}$

$\Rightarrow H = \frac{1}{2} E_D (N - \tilde{U}_g - \tilde{U}_s - \tilde{U}_D)^2$

Postavimo $U_s = \frac{U_{SD}}{2}$ in $U_D = -\frac{U_{SD}}{2}$



Če na kvantni piki ni stanj, nam tudi ti elektroni z E nad kemijskim potencialom „drain" elektrode ne koristijo.

Recimo, da je na QD N elektronov.

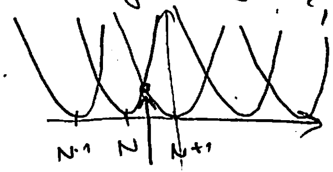
$\mu(N) = H(N+1) - H(N)$

Če postavimo $C_S = C_D$ in zgornjo simetrično definiciji U_S, U_D, dobimo
$H(N) = \frac{1}{2} E_D (N - \tilde{U}_g)^2$.

$\mu(N) = E_D (N - \tilde{U}_g) + \frac{E_D}{2} = -E_D \tilde{\tilde{U}}_g + \frac{E_D}{2}$ ← vpeljali smo $\tilde{\tilde{U}}_g = \tilde{U}_g - N$.

Kemijski potencial na kvantni piki je odvisen od napetosti na „gate" elektrodi.

Če je $\tilde{U}_g = \frac{1}{2}$, je $\mu(N)=0$, kar je res v primeru $\tilde{U}_g = N+\frac{1}{2}$.



← slikica od zadnjič

$N+\frac{1}{2}$ → dve konfiguraciji imate enako energijo

Če želimo, da teče tok, mora biti kemijski potencial na kvantni piki med kemijskim potencialom na „source" in „drain" elektrodi.

Pogoji pa bo tok tekel je $\mu_S > \mu_{QD} > \mu_D$. V točki $\mu(N)=0$ je razlika kemijskih potencialov s in D elektrod pogojeno najmanjša.

Če je $T>0$, imamo zaradi termičnih fluktuacij energije manj strogo.

~~Kemijski potencial~~

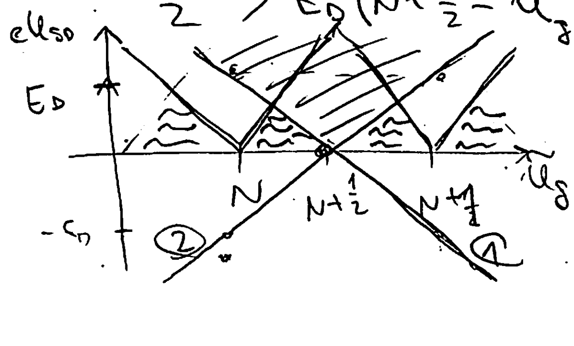
~~za transport elektronov ...~~

~~... pri N elektronih~~

Pogoj za transport elektronov je $\mu_S > \mu_{QD}(N) > \mu_D$.

$$\Rightarrow \quad \frac{eU_{SD}}{2} > \mu(N) > -\frac{eU_{SD}}{2} \quad ; \quad \mu(N) = H(N+1)-H(N) = E_D\left(N+\frac{1}{2}-\tilde{U}_g\right)$$

$$\Rightarrow \frac{eU_{SD}}{2} > E_D\left(N+\frac{1}{2}-\tilde{U}_g\right) > -\frac{eU_{SD}}{2}$$



Prvi pogoj $\frac{eU_{SD}}{2} > E_D(N+\frac{1}{2}-\tilde{U}_g)$ pravi, da so stanja desno od premice ①, drugi pogoj $\frac{eU_{SD}}{2} > E_D(\tilde{U}_g - N - \frac{1}{2})$ pa levo od ②. Dovoljena stanja so torej na prebarvanem območju.

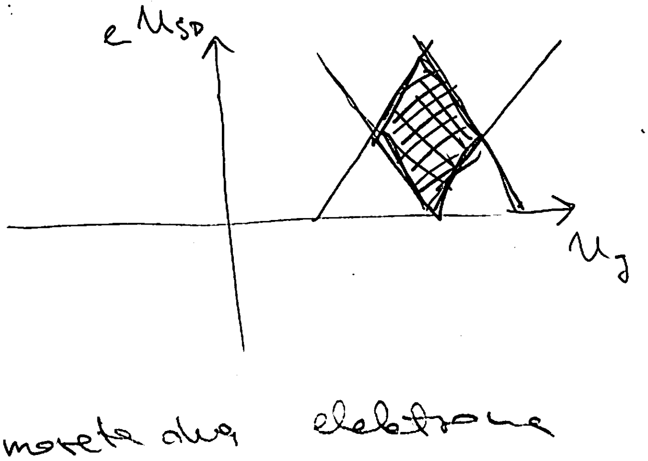
To se periodično nadaljuje (druge črti premic).

Na območju $\approx$ imamo Coulombsko blokado. Vidimo, da je težko z dovolj veliko napetostjo premagamo. Vmes (pri $N+\frac{1}{2}$) imamo fluktuacije med N, $N+1$ in potrebujemo poljubno ~~nizko~~ U_{SD}.

Ko iz S elektrode skoči elektron na kvantno piko, se μ_{QD} poveča. Če je μ_{QD} še vedno manjši od μ_S, lahko potem skoči elektron na D elektrodo, dobimo še en elektron (dva elektrona skočita na kvantno piko). Pogoj za to je $\mu_S > \mu_{QD}(N+1)$.

Oglejmo si pogoj da je dovoljen prejšnji proces in hkrati proces z več kot enim $\bar{e}$ ni možen. Gledamo torej pogoj, da elektroni posamično skačejo na kvantno piko.

$$\mu_S < \mu_{QD}(N+1)$$



$$\frac{eU_{SD}}{2} < E_D\left(N+\tfrac{3}{2}-\tilde{U}_g\right)$$

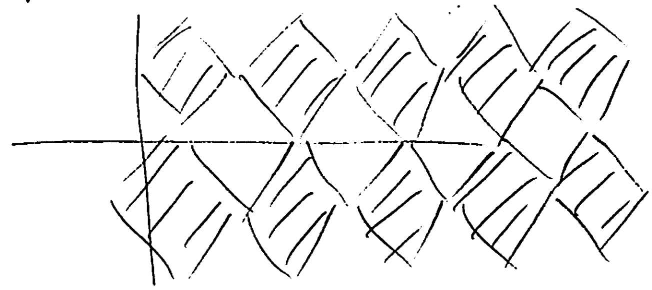
$$eU_{SD} < 2E_D\left(N+\tfrac{3}{2}-\tilde{U}_g\right)$$

Zahtevati moramo še, da ne moreta dva elektrona naenkrat skočiti na drain elektrodo,

$$\mu_{QD}(N-1) < \mu_D$$

Ko vse to zahtevamo, dobimo pogoj, ki je narisan na zgornjem grafu.

Ta območja se zdaj periodično ponavljajo. Če gremo pod os x, ~~dobimo~~ ~~območja~~ z obratno polariteto (D → S).



Tem pravimo Coulombski diamanti.

Podobne oblike naredimo ~~za~~ dvojno kvantno piko.

Želimo si najti formalizem za opis tokov. To moramo narediti kvantnomehansko. Mi bomo to delali v tunelskem približku (to je grob približek, dejansko bi morali drugače računati).

~~Za~~ Tako bomo ocenili tok, da bomo našli oceno za čas tuneliranja. ~~V približku~~ V našem približku so bariere visoke in verjetnost ~~za~~ za tuneliranje majhna. Kvantne pike so „makroskopski" objekti (nekaj 100 – nekaj 10^6 elektronov). Poleg tega je $T > 0$ in e^- interagira, zato se vmes obnaša klasično (pride do dekoherence), ~~preko~~ zato se „faza" izgubi (če to ne bi veljalo, bi bili ~~sistemi~~ ~~tok~~ ~~prehodi~~ koherentni). Če bi korektno kvantnomehansko obravnavali ~~sis~~ celoten sistem, bi opazili da tok teče tudi ~~po~~ ~~pri~~ v ~~prepovedanih~~ območjih.

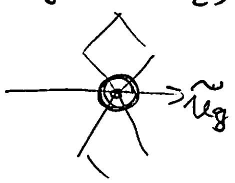
Master enačba

$$\sum_n p_n(t) = 1$$

$$\frac{dp_N(t)}{dt} = \Gamma_{N-1}^{\to QD} p_{N-1}(t) + \Gamma_{N+1}^{QD\to} p_{N+1}(t) - \Gamma_N^{\to QD} p_N(t) - \Gamma_N^{QD\to} p_N(t)$$

$\Gamma_{N-1}^{\to QD}$ = št. preskokov na časovno enoto (~~to~~ bomo ~~[illegible]~~ ocenili iz verjetnosti za tuneliranje)

Gledamo stacionarno stanje, $\frac{dp_N}{dt} = 0$. Poleg tega velja $I^{S\to QD} = I^{QD\to D} = I$. Obravnavajmo primer, za katerega velja $|\tilde{U}_g - (N+\frac{1}{2})| \ll 1$, $eU_{SD} \ll E_D$, $k_BT \ll E_D$. Potem smo v območju



$\to \tilde{U}_g$ blizu obkroženega oglišča in imamo oscilacije $N \leftrightarrow N+1$. Tedaj velja $p_n = 0$ za $n \neq N, N+1$ in $\Gamma_N^{QD\to} = 0$ (ker $p_{N-1} = 0$). Verjetnosti so normirane, $p_N + p_{N+1} = 1$ in od tod sledi $\frac{dp_N}{dt} = 0 = \Gamma_{N+1}^{QD\to} p_{N+1} - \Gamma_N^{\to QD} p_N$,

$$\boxed{p_N = \frac{\Gamma_{N+1}^{QD\to}}{\Gamma_{N+1}^{QD\to} + \Gamma_N^{\to QD}}, \quad p_{N+1} = \frac{\Gamma_N^{\to QD}}{\Gamma_{N+1}^{QD\to} + \Gamma_N^{\to QD}}}$$

Tok je potem enak $I = I^{S\to QD} = e p_N \Gamma_N^{S\to QD} - e p_{N+1} \Gamma_{N+1}^{QD\to S} =$

$$\boxed{= e\,\frac{\Gamma_{N+1}^{QD\to}\Gamma_N^{S\to QD} - \Gamma_N^{\to QD}\Gamma_{N+1}^{QD\to S}}{\Gamma_N^{QD\to} + \Gamma_N^{\to QD}}}$$

Velja $\Gamma_{N+1}^{QD\to} = \Gamma_{N+1}^{QD\to S} + \Gamma_{N+1}^{QD\to D}$ in $\Gamma_N^{\to QD} = \Gamma_N^{D\to QD} + \Gamma_N^{S\to QD}$, zato je

$$I = e\,\frac{\Gamma_{N+1}^{QD\to S}\Gamma_N^{S\to QD} + \Gamma_{N+1}^{QD\to D}\Gamma_N^{S\to QD} - \Gamma_N^{D\to QD}\Gamma_{N+1}^{QD\to S} - \Gamma_N^{S\to QD}\Gamma_{N+1}^{QD\to S}}{\Gamma_N^{QD\to} + \Gamma_N^{\to QD}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{I = e\,\frac{\Gamma_{N+1}^{QD\to D}\Gamma_N^{S\to QD} - \Gamma_N^{D\to QD}\Gamma_{N+1}^{QD\to S}}{\Gamma_N^{QD\to} + \Gamma_N^{\to QD}}}$$

Kvantno mehansko bomo ocenili vrednosti Γ, ki jih pa ni težko izračunati, saj se elektroni med seboj čutijo (sicer pa gre za tuneliranje, ki je že dobro poznano).

Hamiltonian: $$H = \underbrace{H_S + H_D + H_{QD}}_{\substack{\text{na elektrodah} \\ \text{in piki} \\ H_0}} + \underbrace{H^{S\to QD} + H^{QD\to S} + H^{D\to QD} + H^{QD\to D}}_{\text{perturbacija, } H' \text{ za preskoke elektrona}}$$

Obravnavali bomo prvi red perturbacije (posamična preskakovanja e^-) (če bi upoštevali višje rede, bi dobili preskoke v območju Coulombske blokade).

Velja Fermijevo zlato pravilo (,

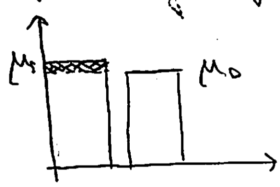
$$\Gamma^{S\to QD} = \frac{2\pi}{\hbar} \sum_{m,n} |\langle m | H^{S\to QD} | n\rangle|^2 \, \delta(E_m - E_n)$$

Stanja zapišemo ~~kot~~ $|m\rangle = |S\rangle|QD\rangle|D\rangle$. Stanji $|S\rangle, |D\rangle$ sta preprosti zapolnjenosti do Fermijeve energije, $|QD\rangle$ pa ne znamo tako enostavno opisati

$$H^{S\to QD} = \sum_{s,q} t_{s,q} \, c_q^+ c_s; \quad c^+, c \text{ sta kreacijski, anihilacijski operator za } e^-$$

Pri $T=0$ je na S, D stanje Slaterjeva determinanta enoelektronskih stanj, pri višji T pa gostotna matrika.

Obravnavajmo najprej direkten prehod $S \to D$ (brez QD).



$$\Gamma_N^{S\to D} \propto \int dE \, f_S(E)(1 - f_D(E))$$

Pri $T=0$ je to kar $\mu_S - \mu_D$

Pri majhni napetosti U_{SD} je zveza linearna, $I = e\Gamma = GU$, zato $\Gamma = \frac{G}{e} U_{SD}$. Pri $T \approx 0$ velja $eU_{SD} = \mu_S - \mu_D$, zato Γ_N [illegible]

$$\Gamma_N^{S\to D} = \frac{G}{e^2}(\mu_S - \mu_D)\,\Theta(\mu_S - \mu_D).$$

Če je $T \neq 0$, je $(\Delta\mu = \mu_S - \mu_D)$ $\Gamma_N^{S\to D} = \dfrac{G}{e^2}\dfrac{-\Delta\mu}{e^{-\beta\Delta\mu}-1}$.

Zdaj poglejmo še, kaj se zgodi, če imamo kovinske pike.

Predpostavimo, da je pika kovinska. Elektronov je več in stanja so bolj „gosta", zato jih lahko obravnavamo kot kontinuum (pri polprevodnih pikah so „~~točke~~" kvantizirane). Elektron gre lahko na katerokoli stanje nad kemijskim potencialom $\mu(N)$.

$S \curvearrowright QD: D$

$$\Delta\mu = \mu_S - \mu_{QD}(N) = \frac{eU_{SD}}{2} - E_D\overbrace{\left(N+\tfrac{1}{2}-\tilde{U}_g\right)}^{-U_g'} = \frac{eU_{SD}}{2} + E_d U_g' \quad \leftarrow \text{to velja za prehod } S \to \tilde{QD}$$

$S\ QD^{N+1} \curvearrowright D: \quad \Delta\mu = \mu_{QD}(N+1) - \mu_D = -E_d U_g' + \dfrac{eU_{SD}}{2}$

$S\ QD^{N} \curvearrowleft D: \quad \Delta\mu = \mu_D - \mu_{QD}(N) = -\dfrac{eU_{SD}}{2} + E_d U_g'$

$S \curvearrowleft QD^{N+1}\ D: \quad \Delta\mu = \mu_{QD}(N) - \mu_S = -E_d U_g' - \dfrac{eU_{SD}}{2}$

Računajmo zgornji diamant ($N \to N+1$; spodaj je podobno) 

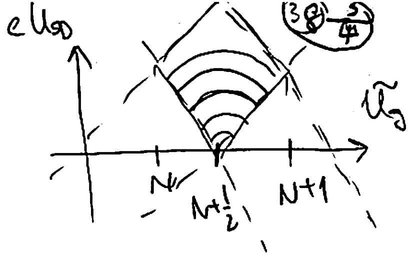
predpostavimo $G_S = G_D = G$

Pri $T=0$ bi tako dobili, samo še upoštevaj $\theta(\ldots)$

$$I = \frac{G}{e}\,\frac{\left(\frac{eU_{SD}}{2} - E_d U_g'\right)\left(\frac{eU_{SD}}{2} + E_d U_g'\right)}{\frac{eU_{SD}}{2} + \cancel{E_d U_g'} + \frac{eU_{SD}}{2} - \cancel{E_d U_g'}} = \frac{G}{e}\left(\frac{1}{2} - \frac{E_d U_g'}{eU_{SD}}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{E_d U_g'}{eU_{SD}}\right)$$

$$\boxed{I = \frac{G}{e^2}\frac{1}{U_{SD}}\left(\left(\frac{eU_{SD}}{2}\right)^2 - \left(E_d U_g'\right)^2\right)}$$

Če je $eU_{SD} > 0$ smo v zgornjem diamantu in sta dva procesa dovoljena, dva pa prepovedana (obratno, kot pri $eU_{SD} < 0$)



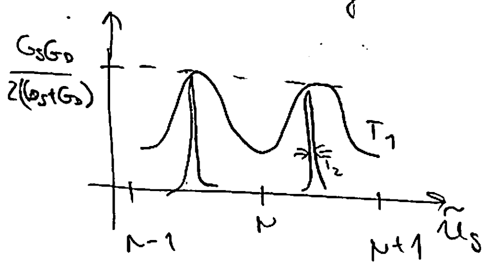
38/5 4 NANOFIZIKA → PREDAVANJA

⌒ – tokovi pri različnih U_{SD}

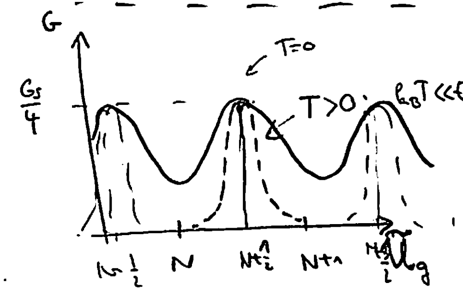
Tok je vedno največji pri $\tilde{U}_g = N + \frac{1}{2}$

Izpeljemo lahko
$$G = \frac{G_S \cdot G_D}{G_S + G_D} \cdot \frac{\beta E_0 U_g'}{2\,\mathrm{sh}(\beta E_0 U_g')} = \frac{I}{U_{SD}} \quad (\text{za } |eU_{SD}| \ll E_0)$$

Upoštevani so vsi procesi!



Pri T_2 izpeljava ni več ok, ker se primešajo še drugi stanje.

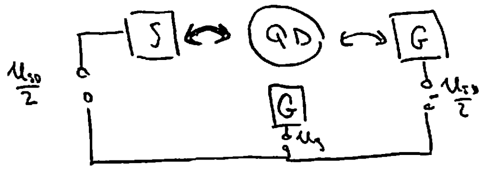


$\leftarrow \frac{G_s}{2}$ pri $T \to \infty$

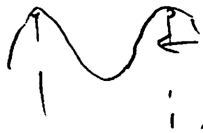
$$G = \frac{G_s}{4} \frac{\beta \mu_{QD}}{\operatorname{sh}(\beta \mu_{QD})}$$

$eU_{SD} \ll E_D$

$$\mu_{QD}(N) = E_D \left(N + \frac{1}{2} - \tilde{U}_g\right)$$



Podobna slika se ponavlja pri

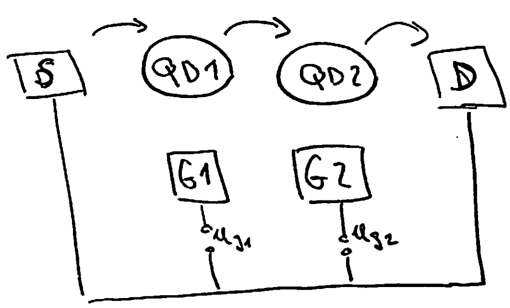


Prekrivanj nismo upoštevali, zgodi se pri k_BT, ki so po redu velikosti blizu E_D.

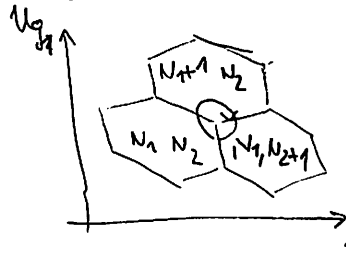
Ideja je, da bi se ta pojav okoristilo za tranzistor, saj lahko majhne spremembe napetosti na gate elektrodi dobimo velike spremembe toka skozi sistem. Težava je delovna temperatura, ki je reda velikosti ~100 mK. V prihodnosti želijo to narediti na molekulah (in ogljikovih nanocevkah?), kjer bi to delali tudi pri sobni temperaturi. Zraven pa še nihče nima dobre kontrole nad sistemom (eksperimentalne težave :)).

Oblika zgornjih krivulj je močno odvisna od temperature, zato lahko to uporabimo kot termometer.

Dvojna kvantna pika



Za tako postavitev smo izračunali diagram stabilnosti pri vajah (FSeP)



To je stacionarno stanje. Če pa sta U_{g1}, U_{g2} časovno spremenljivi, to opišemo s časovno odvisnim hamiltonianom in bo tekel tok.

Tipična časovna skala: $\tau = \left(\Gamma_N^{S \to QD}\right)^{-1}$

Če želimo, da bo tok tekel, se morata napetosti spreminjati počasneje, kot je τ, torej

$$\omega \ll \Gamma_N^{S \to QD}$$

Naloge za kolokvij:

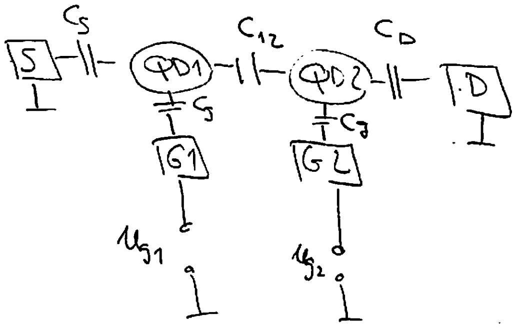
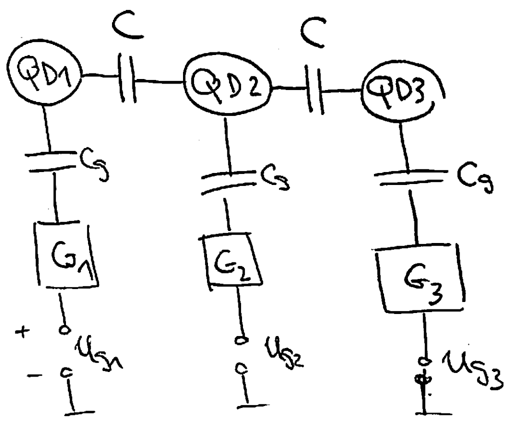
① 

Diagram stabilnosti v 3 primerih:

a) $C_{12} \ll C_S, C_D$

b) $C_S \gg C_D \gg C_{12}$

c) $C_S \gg C_{12} \gg C_D$

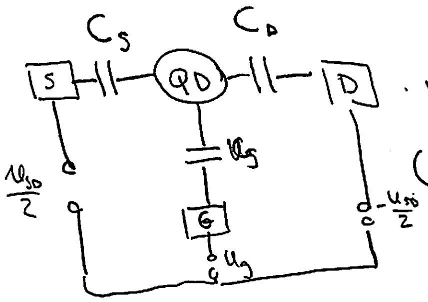
② 

Začetno stanje:

$U_{g1}=U_{g2}=U_{g3}=0$; kvantne pike so prazne (tako je najnižja energija sistema, da velja).

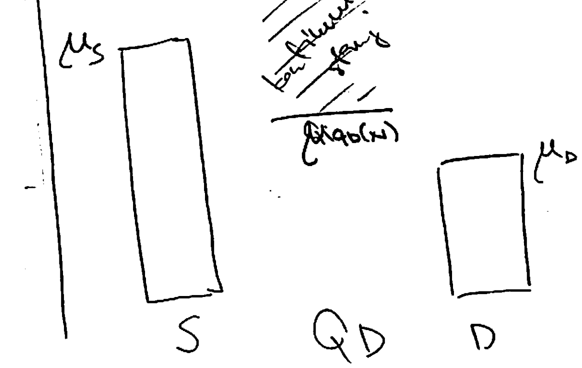
U_{g1} začnemo povečevati

Pri kateri vrednosti U_{g1} bo prvi elektron skočil v sistem? ← Lahko kar vzamemo rešitev od zadnjič in jo smiselno posplošimo.

③ 

Izpelji Coulombske diamante za primer $C_S \neq C_D$ (mi smo izpeljali za primer $C_S = C_D$).

④ Master enačba v ravnovesju $U_{SD}=0$ (tok skozi sistem ne teče). Pokaži, da je verjetnost za N elektronov v ravnovesju $p_N \propto e^{-\beta H_N}$.

⑤ 

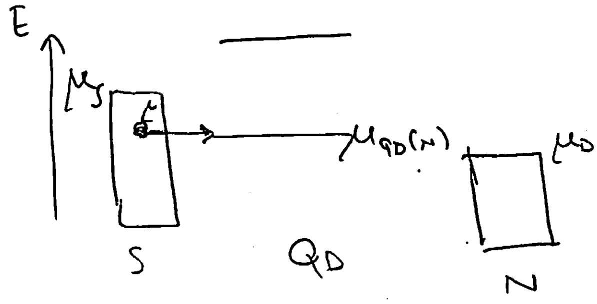
Ko e^- skoči na kvantno piko, lahko skoči na $\mu_{QD}(N)$ ali pa na kakšno energijo nad kemijskim potencialom (predpostavimo, da je nad μ_{QD} kontinuum stanj).

Ob tej predpostavki smo zadnjič zapisali Γ,

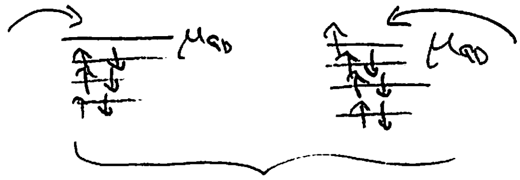
$$\Gamma = \frac{G_S}{e^2}\int f_S(\epsilon)\left(1-f_{QD}(\epsilon)\right) d\epsilon.$$

Ta predpostavka ni vedno izpolnjena (to bolj velja za kovinske, ne za polprevodne kvantne pike).

V polprevodniških pikah bi bolj veljalo



Oglejmo si še limito, ko imamo na voljo le en nivo, na katerega lahko elektron skoči



Obravnavati moramo dva primera, ko so vsi nivoji do zadnjega zasedeni in je zadnje prost in primer, ko je na zadnjem nivoju še en elektron.

$$\Gamma_N^{S\to QD} = 2\Gamma_S f_S(\mu_{QD})$$

$$\Gamma_{N+1}^{QD\to D} = \Gamma_D(1-f_D(\mu_{QD}))$$

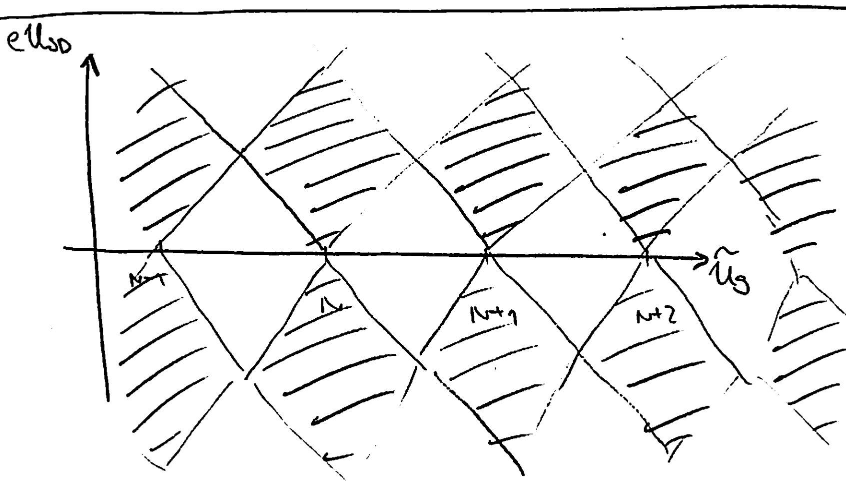
V obravnavanem modelu nimamo možnosti, da bi elektron izgubil energijo (v hamiltonianu nimamo člena, ki bi to opisal) zato lahko skoči le pri μ_{QD}.

Obratna procesa

$$\Gamma_N^{D\to QD} = 2\Gamma_D f_D(\mu_{QD})$$

$$\Gamma_{N+1}^{QD\to S} = \Gamma_S(1-f_S(\mu_{QD}))$$

Zdaj, ko imamo te 4 Γ, lahko nadaljujemo s tokim računom kot zadnjič. Poglej tok v dveh limitah ($eU_{SD} \ll E_D$ in $T\to 0$).



◇ beli diamanti = Coulombske blokade

= 1 elektron

To je rezultat, v katerem obravnavamo le procese prvega reda.

Iz stališča energijskega zakona v belih območjih elektron ne more preskočiti, po Heisenbergovem izključitvenem načelu pa je to mogoče, če je tipičen čas $\tau \le \frac{\hbar}{E}$. Zato lahko potekajo procesi DRUGEGA REDA.

(42) NANOFIZIKA → PREDAVANJA

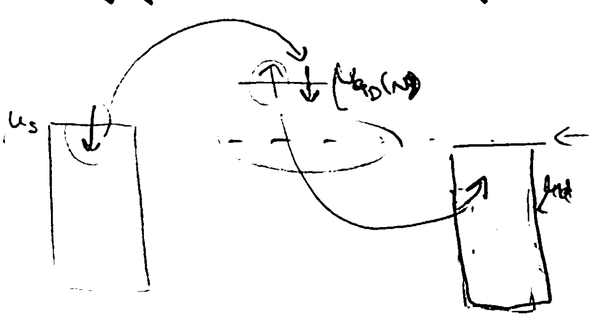
čas; $\frac{E_D}{2}$ je tipična energijska razlika med kemijskim potencialom.

$$\Gamma \approx \Gamma_N^{S\to QD} \cdot \left(\Gamma_{N+1}^{QD\to D} \frac{\hbar}{E_D} \right)$$

To je en sam koherenten kvantni prehod preko virtualnega stanja. Iz resnega računa dobimo rezultat istega velikostnega reda (ki se računa s formalizmom Feynmanovih diagramov).

Temu pojavu pravimo COTUNNELING (dva elektrona skupaj tunelirata). Kotuneliranje omogoča tok zaradi Coulombske blokade.

Obstajajo procesi še višjih redov.



← To je poseben primer kotuneliranja. Če pogledamo procese še višjih redov se spin na kvantni piki sklopi v singlet (spin na kvantni piki lahko može fluktuirati, da je v povprečju enak 0).

k_BT_K – energijska skala

T_K – Kondova temperatura ⇒ $\underbrace{k_BT_K = \frac{\sqrt{\Gamma U}}{2} e^{\frac{\varepsilon_d(\varepsilon_d+U)}{\Gamma U}}}$

Nova energijska skala, ki je na začetku ni bilo. To je netrivialna energijska skala, ne moremo je preprosto oceniti.

$U \sim E_D$
$\varepsilon_d \sim U_g$
Γ

Osnovne energijske skale – to znamo enostavno oceniti (Poissonova enačba itd :))

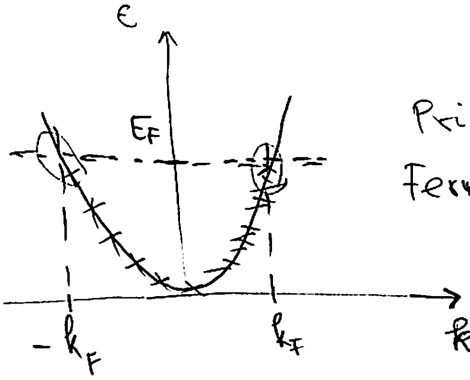
Ta funkcija je neperturbativna. Zato vidimo, da moramo za izračun tega (to je Kondov pojav) seštevati vse rede v perturbaciji in ne le začetnih redov (podobno je pri superprevodnosti). Podobno se opisuje asimptotska svoboda kvarkov.

Kondov pojav – nastane neko stanje pod $\mu_{QD}(N)$. To velja le, ko je na μ_{QD} nivoju en elektron (tako liho stanje) pri $eU_{SD} < k_BT_K$ in $T<T_K$.

[[illegible] ☺ – Nekaj superprevodnega]

$\xrightarrow{\hspace{4cm}} x$

Če imamo elektrone, ki so omejeni na gibanje v 1D, je hamiltonian $H = \frac{p^2}{2m}$. Rešitve so ravni valovi, $\psi(x) = e^{ikx}$, $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$.



Pri $T=0$ so zasedena vsa stanja pod Fermijevo energijo.

Relevantna stanja so blizu Fermijeve energije (relevantna za stvari, ki nas zanimajo). Zato lahko razvijemo v okolici teh dveh (obkroženih) točk:

$$k = k_F + \delta k$$
$$E = E_F + \delta E$$
$$\psi(x) = e^{ik_F x} e^{i\delta k \cdot x}$$

$$E = E_F + \delta E = \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + \frac{(k^2 - k_F^2)\hbar^2}{2m} \approx$$
$$\approx \frac{\hbar^2 k_F^2}{2m} + \frac{\hbar^2 k_F \delta k}{m} = E_F + \hbar v_F \delta k$$
$$\Rightarrow \boxed{\delta E_1 = \hbar v_F \delta k},$$ vpeljali smo Fermijevo hitrost $\boxed{v_F = \frac{\hbar k_F}{m}}$.

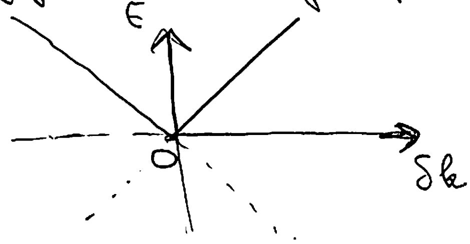
Podobno bi lahko naredili za $k = -k_F + \delta k$, $\boxed{\delta E_2 = -\hbar v_F \delta k}$.
V okolici Fermijeve energije dobimo linearizirano disperzijo.

Tudi v primeru linearizirane disperzije imamo pod Fermijevo energijo ogromno št. delcev. Namesto tega namesto običajnega Fockovega vakuuma vzamemo $\boxed{\text{Fermijevo morje}}$ in naredimo kanonične transformacije kreacijskih in anihilacijskih operatorjev.

Kot osnovno stanje vzamemo Fermijevo morje $|\tilde{0}\rangle$ in kreacijski operatorji ustvarijo elektrone ali vrzeli (odvisno od tega, ali smo nad ali pod Fermijevo energijo).

Energija 0 ustreza Fermijevemu morju. Če ustvarimo vrzel, se energija poviša (~~vzam~~ odstranimo elektron z negativno energijo). Zato je predznak ~~disperzije~~ disperzije pod E_F drugačen (kot nad E_F).

Disperzija je potem enaka temu.



Zato moramo hamiltonian tako zapisati, da bomo ~~dobili~~ dobili tako disperzijo.

$$\boxed{\begin{aligned} &\text{el:} \quad \hat{H}_e = \hat{H} - \epsilon_F \\ &\text{vrzel:} \quad \hat{H}_h = -(\hat{H} - E_F)^* \end{aligned}}$$

da pride * vidimo, če si predstavljamo magnetno polje

Tukaj je $\hat{H}$ načeloma splošen hamiltonian za večten sistem; $\hat{H}_e, H_h$ sta za ~~naš~~ hamiltonian za sistem z drugim vakuumom.

$$\left.\begin{aligned} \hat{H}_e &= -i\hbar v_F \partial_x \\ \hat{H}_h &= i\hbar v_F \partial_x \end{aligned}\right\} \text{To očitno velja:}$$

$$\underbrace{\left.\begin{aligned} \hat{H}_e \tilde{\psi}_e &= -\hbar v_F \delta k \tilde{\psi}_e \\ \hat{H}_h \tilde{\psi}_h &= -\hbar v_F \delta k \tilde{\psi}_e \end{aligned}\right\}}_{} \quad k = k_F + \delta k$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \hat{H}_e &= \mp i\hbar v_F \partial_x \\ H_h &= \pm i\hbar v_F \partial_x \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{zgoraj} = +k \\ &\text{spodaj} = -k \end{aligned}$$

Ob tem moramo paziti, da vzamemo le pozitivne energije, sicer dobimo napačno disperzijo (negativno vejo).

Če bi gledali razvoj v okolici ~~k~~ $-k_F$, bi se predznaka zamenjala.

~~Vzeti~~

V glavnem: vzeti moramo tisto rešitev, ki ima pozitivno energijo.

Tak pristop je uporaben za opis superprevodnosti.

$$\begin{bmatrix} \hat{H}_e & 0 \\ 0 & \hat{H}_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e \\ \tilde{\psi}_h \end{bmatrix} = \delta E \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e \\ \tilde{\psi}_h \end{bmatrix} \quad \leftarrow \text{Naš sistem.}$$

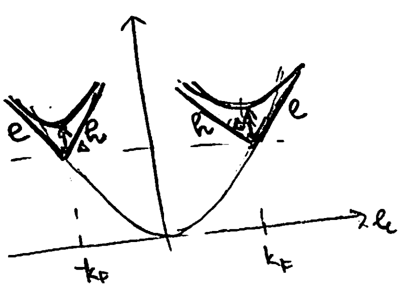
Izkaže se (po teoriji BCS), da zaradi superprevodnosti dobimo sklopitev med elektroni in vrzelmi:

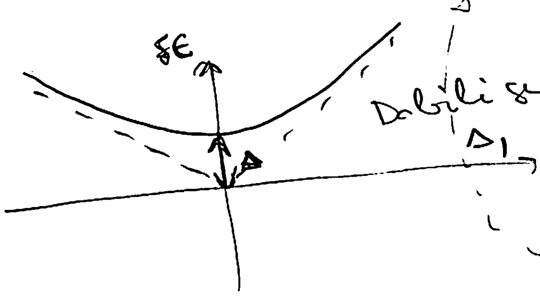
$$\begin{bmatrix} \hat{H}_e & \Delta e^{i\varphi} \\ \Delta e^{-i\varphi} & \hat{H}_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e \\ \tilde{\psi}_h \end{bmatrix} = \delta E \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e \\ \tilde{\psi}_h \end{bmatrix} \quad ; \quad \text{nastavek: } \tilde{\psi}_e = \tilde{\psi}_e^0 e^{i\delta k x}, \quad \tilde{\psi}_h = \tilde{\psi}_h^0 e^{i\delta k x}$$

$$\frac{+k_F}{-k_F} : \begin{bmatrix} \mp i\hbar v_F \partial_x & \Delta e^{i\varphi} \\ \Delta e^{-i\varphi} & \pm i\hbar v_F \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e^0 \\ \tilde{\psi}_h^0 \end{bmatrix} e^{i\delta k x} = \delta E \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e^0 \\ \tilde{\psi}_h^0 \end{bmatrix} e^{i\delta k x}$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \pm\hbar v_F \delta k - \delta E & \Delta e^{i\varphi} \\ \Delta e^{-i\varphi} & \mp\hbar v_F \delta k - \delta E \end{bmatrix}}_{\det \text{ je } 0} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e^0 \\ \tilde{\psi}_h^0 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \delta E = \sqrt{\Delta^2 + (\hbar v_F \delta k)^2}$$





Dobili smo energijsko režo kar se ujema s tem kar že vemo o superprevodnosti.

Lastne funkcije $\quad (\hbar v_F \delta k - \delta E)\tilde{\psi}_e^0 + \Delta e^{+i\varphi}\tilde{\psi}_h^0 = 0 \rightarrow \dfrac{\tilde{\psi}_h^0}{\tilde{\psi}_e^0} = \dfrac{\delta E - \hbar v_F \delta k}{\Delta e^{i\varphi}} =$

$$= e^{-i\varphi}\left(\frac{\delta E}{\Delta} - \frac{\sqrt{\delta E^2 - \Delta^2}}{\Delta}\right)$$

Naslednjič si bomo pogledali:
- × stik med normalno in superprevodno plastjo

$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
N	S

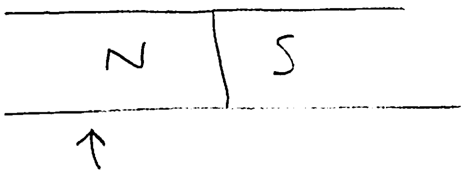
- × stik med N+S z nekim spojem

S ← sploh notranje

$\boxed{N} \otimes \boxed{S}$

To nam že rešiti v odsotnosti superprevodnika.

Kateri procesi omogočajo prevodnost?



$\begin{pmatrix} e^{iSkx} \\ 0 \end{pmatrix}$ ← e^- potuje proti stiku

$\begin{pmatrix} 0 \\ e^{iSkx} \end{pmatrix}$ ← vrzel potuje proti stiku

Če proti stiku potuje e^-, se bo nazaj odbil le kot vrzel (privzamemo, da je stik idealen in na stiku ni sipalca). Podobno velja za vrzel, ta se odbije le kot elektron.

$\delta E > 0$:

e →

$$\begin{pmatrix} e^{iSkx} \\ 0 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 0 \\ e^{-iSkx} \end{pmatrix}$$

h →

$$\begin{pmatrix} 0 \\ e^{iSkx} \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} e^{-iSkx} \\ 0 \end{pmatrix}$$

to so vsa možna sipalna stanja pri dani energiji

- uporabili smo le predpostavko, da je ~~sipalca~~ stik idealen (zgornji odstavek!)

Na superprevodni strani valovna funkcija ni tako enostavna, ker imamo tudi izvendiagonalne elemente v Hamiltonianu. Superprevodnik je razsežen, zato vanj ne more priti e^-/h z energijo nižjo od energije para (če bi bil superprevodnik dovolj ozek, bi lahko tuneliral).

Od zadnjič: $\boxed{x>0}$

$$\delta E = \sqrt{\Delta^2 + (\hbar v_F \delta k)^2}$$

$$\Psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_e^0 \\ \psi_h^0 \end{pmatrix} e^{i\delta k x}$$

$$\frac{\psi_h^0}{\psi_e^0} = e^{-i\varphi}\left(\frac{\delta\epsilon}{\Delta} - \frac{\sqrt{\delta\epsilon^2-\Delta^2}}{\Delta}\right)$$

velja $\Delta^2 > \delta\epsilon^2$ ← obravnava ta poseben primer!

$$\delta k = \frac{\sqrt{\delta\epsilon^2-\Delta^2}}{\hbar v_F} = \frac{i\sqrt{\Delta^2-\delta\epsilon^2}}{\hbar v_F} \equiv i\varkappa$$

$$\begin{pmatrix} \psi_e^0 \\ \psi_h^0 \end{pmatrix} e^{-\varkappa x}$$

Enačba je prvega reda, zato je dovolj zahtevati zveznost valovne funkcije na stiku (ne smemo zahtevati zveznosti odvoda).

$$\Psi(0_-) = \Psi(0_+)$$

e →
$$\begin{pmatrix} 1 \\ r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_e^0 \\ \psi_h^0 \end{pmatrix}$$
$$\hookrightarrow r_e = \frac{\psi_h^0}{\psi_e^0}$$

h →
$$\begin{pmatrix} r \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_e^0 \\ \psi_h^0 \end{pmatrix}$$
$$\hookrightarrow r_h = \frac{\psi_e^0}{\psi_h^0}$$

$$\underline{\underline{r_e}} = \frac{\psi_h^0}{\psi_e^0} = e^{-i\varphi}\left(\underbrace{\frac{\delta\epsilon}{\Delta}}_{\cos\alpha} - \underbrace{\frac{\sqrt{\delta\epsilon^2-\Delta^2}}{\Delta}}_{i\sin\alpha,\ \text{ker } \Delta^2>\delta\epsilon^2}\right) = e^{-i\varphi}e^{-i\alpha} = e^{-i(\varphi+\alpha)} = \underline{e^{i\chi_e}}$$

Upeljali smo $\boxed{\chi_e = -\varphi - \arccos\frac{\delta\epsilon}{\Delta}}$, fazo elektrona.

ni res!

$$\underline{\underline{r_h}} = \frac{\psi_e^0}{\psi_h^0} = e^{i\chi_h} = e^{-i\chi_e} \Rightarrow \boxed{\chi_h = \varphi + \arccos\frac{\delta\epsilon}{\Delta}}$$ ← Faza vrzeli

NAROBE $\chi_h = \varphi - \arccos\frac{\delta\epsilon}{\Delta}$

Verjetnost za odboj elektrona: $R_e = |r_e|^2 = 1$

–||– vrzeli $R_h = |r_h|^2 = 1$

Očitno se naboj ne ohranja, ~~rečemo~~ „izgubimo" dva elektrona ali dve vrzeli → dobili smo Cooperjev par v $\boxed{S}$

Ta Cooperjev par, ki ga v enačbah ne vidimo, je „šel" v Bose-Einsteinov kondenzat. Temu se pravi $\boxed{\text{ODBOJ ANDREJEVA}}$, tistim matričnim enačbam (Schrödingerjeva enačba za S in N) pa BOGOLJUBOV-DE GENNESOVE enačbe.

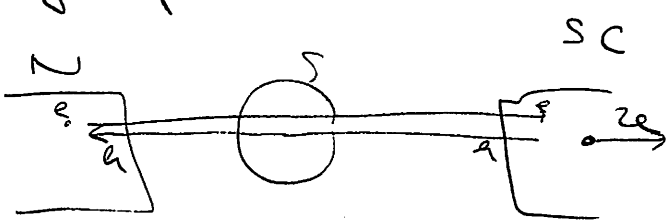
$$R_e = |r_e|^2 = 1 \longrightarrow G = \frac{4e^2}{h}$$

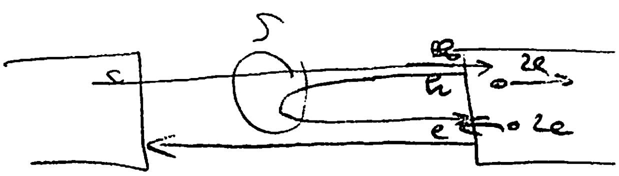
Dodamo še sipalec s sipalno matriko S

Če pride e⁻ notri, lahko gre skozi, se na S odbije kot vrzel in se vrne v normalno kovino ali pa se spet odbije kot vrzel in od superprevodnika odbije kot elektron itd.

Podobno velja za vrzel.

V superprevodniku se ali ~~absorbita~~ isprejme oba pa nastane Cooperjev par.



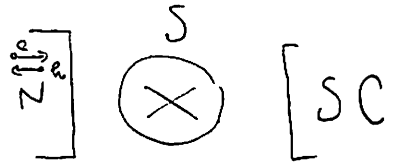


← ni prispevka k toku

Zadnjič smo se zmotili: $\chi_h = \varphi - \alpha$

$\chi_e = -\varphi - \alpha$ (uporabili smo H_{k_F} namesto H_{-k_F} za vrzeli)

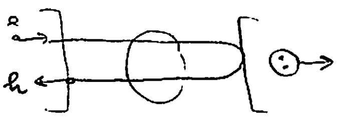
$R_e = R_h = 1$; $G = \frac{4e^2}{h}$



Upoštevati moramo vse procese, pri katerih se bo elektron odbil kot vrzel (ker k toku ne prispeva odboj e^- na sipalcu, ker se odbije kot elektron).

Sipalna matrika za elektrone (ni magnetnega polja): $S_e = \begin{bmatrix} r_e & t_e \\ t_e & r_e' \end{bmatrix}$

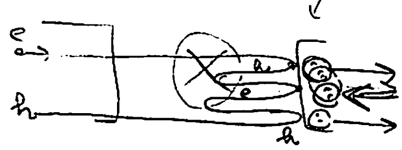
-||- vrzeli -||- : $S_h = \begin{bmatrix} r_h & t_h \\ t_h & r_h' \end{bmatrix}$



to fazo smo zadnjič izpeljali

$t_e e^{i\chi_e} t_h$

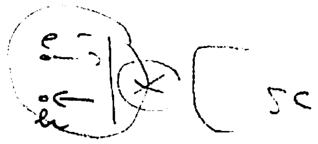
Naslednji red: k toku prispevajo procesi z lihim št. odbojev na SC



$$t_e e^{i\chi_e} r_h' e^{i\chi_h} r_e' e^{i\chi_e} t_h = t_e e^{i\chi_e} t_h \left(e^{i\chi_e} r_h' e^{i\chi_h} r_e'\right)$$

Od tod vidimo, da je dovolj ~~...~~ ~~potenciti~~ sklepaj in zajame vse procese

amplituda za proces



$$\Rightarrow \tilde{r}_h = \sum_{n=0}^{\infty} t_e e^{i\chi_e} t_h \left(e^{i\chi_e} r_h' e^{i\chi_h} r_e'\right)^n = \frac{t_e e^{i\chi_e} t_h}{1 - r_h' e^{i(\chi_e+\chi_h)} r_e'}$$

$R_h = |\tilde{r}_h|^2$; $G = \frac{4e^2}{h} R_h$

↑ verjetnost ↑ prevodnost

Hamiltonian za elektrone: $(H-\epsilon_F)\psi_e = \delta\epsilon\,\psi_e$

-||- za vrzeli: $-(H-\epsilon_F)^*\psi_h = \delta\epsilon\,\psi_h$ ← Če zamenjamo kreacijske in anihilacijske operatorje v II. kvantizaciji in potem prevedemo opis nazaj v I. kvantizacijo, dobimo takšno Schrödingerjevo enačbo.

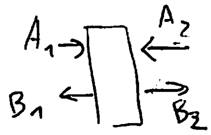
Sipalno matriko za elektrone dobimo iz zgornje enačbe, $S_e(\delta\epsilon)$.

konjugirana S.E. za vrzeli:

$$(H-\epsilon_F)\psi_h^* = -\delta\epsilon\,\psi_h^*$$

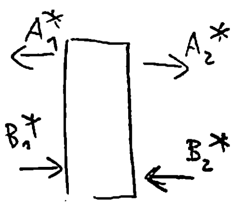
⟹ za ψ_h^* velja ista sipalna matrika kot za elektrone, le da je energija $-\delta\epsilon$, $S_e(\delta\epsilon)$.

ψ_h^* ⟹



$$\begin{pmatrix}B_1\\B_2\end{pmatrix} = S\begin{pmatrix}A_1\\A_2\end{pmatrix}$$ ← to naj opisuje ψ_h^*

ψ_h: $$\begin{pmatrix}B_1^*\\B_2^*\end{pmatrix} = S^*\begin{pmatrix}A_1^*\\A_2^*\end{pmatrix}$$



← sedaj so se smeri ravnih valov zamenjale.

Zato je sipalna matrika za ψ_h $(S^*)^{-1}$. Pozabili smo upoštevati, da se vrzel giblje v nasprotno smer kot kaže valovni vektor in ~~se iz~~ če to upoštevamo, vidimo da je S^* tista sipalna matrika.

$$\Rightarrow \boxed{S_e = S_e(\delta\epsilon) \Leftrightarrow S_h = S_e^*(-\delta\epsilon)}$$

$$S_e = \begin{pmatrix} r & t \\ t & r' \end{pmatrix}\Bigg|_{\delta\epsilon} \qquad S_h = \begin{bmatrix} r^* & t^* \\ t^* & r'^* \end{bmatrix}\Bigg|_{\delta\epsilon}$$

Zdaj še predpostavimo, da je sipalna matrika neodvisna od energije. Ta pogoj ni vedno izpolnjen, velja pa recimo za N|▨|SC, kjer je SC izolator/vakuum/nekaj pač :).

$$\tilde{r}_e = \frac{t_e e^{i\chi_e} t_h}{1 - r_h' e^{i\chi_h} r_e' e^{i\chi_e}} \Leftarrow \quad t_e = t \quad r_e = r \quad r_e' = r'$$
$$t_h = t^* \quad r_h = r^* \quad r_h' = r'^*$$

$$\tilde{r}_e = \frac{|t|^2 e^{i\chi_e}}{1 - |r'|^2 e^{i(\chi_e + \chi_h)}}$$

$|t|^2 = T$ ← prepustnost sipalca

$|r'|^2 = R$ ← odbojnost sipalca

$\chi_e + \chi_h = -2\alpha$; $\alpha = \arccos \frac{\delta\epsilon}{\Delta}$

$$\tilde{r}_e = \frac{T e^{i\chi_e}}{1 - R e^{i\alpha}} = \frac{T e^{i\chi_e}}{1 + R}$$

$\delta\epsilon \ll \Delta \Rightarrow \alpha \approx \frac{\pi}{2}$

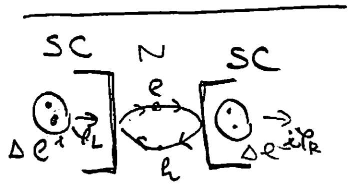
$$G_{N,SC} = \frac{4e^2}{h} \frac{T^2}{|1+R|^2} = \frac{4e^2}{h} \frac{T^2}{(2-T)^2}$$

Če bi isti sipalec imeli med dvema kovinama, bi bilo $G_{N,N} = \frac{2e^2}{h} T$.

Dve limiti:

- $T = 1$ (ni sipalca) $\longrightarrow$ $G_{N,SC} = \frac{4e^2}{h}$, $G_{N,N} = \frac{2e^2}{h}$ $\Big\}$ $G_{N,SC} > G_{N,N}$
- $T \ll 1$ $\longrightarrow$ $G_{N,SC} = \frac{e^2}{h} T^2$, $G_{N,N} = \frac{2e^2}{h} T$ $\Big\}$ $G_{N,SC} < G_{N,N}$

Stik dveh superprevodnikov

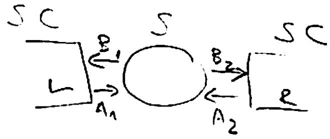


Josephsonov stik

Ta $\Delta e^{i\varphi}$ pride iz BCS teorije (valovne funkcije Cooperjevega para). V Ginsburg-Landauovi teoriji je to makroskopska valovna funkcija.

$I_j(\varphi) \leftarrow$ Josephsonov tok (tok skozi stik) je odvisen od $\varphi = \varphi_R - \varphi_L$ (to bomo kar privzeli :))

Obravnavali bomo primer, ko je vmes sipalec (Josephsonov stik ima vmes izolator), kvalitativno je slika podobna kot v primeru kovine.



$$B_e = \underline{\underline{S}} A_e \qquad A_e = e^{i\chi_h} B_h$$
$$B_h = \underline{\underline{S}}^* A_h \qquad A_h = e^{i\chi_e} B_e \qquad (**)$$

Sipanje Andrejeva

$$A_{h2} = e^{i\chi_{eR}} B_{e2}$$
$$A_{h1} = e^{i\chi_{eL}} B_{e1}$$

$$\begin{bmatrix} A_{h1} \\ A_{h2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\chi_{eL}} & 0 \\ 0 & e^{i\chi_{eR}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{e1} \\ B_{e2} \end{bmatrix}$$

Podobno velja za $\begin{bmatrix} A_{e1} \\ A_{e2} \end{bmatrix}$.

V vsaki od faz za odboj Andrejeva imamo $\alpha = \arccos \frac{\delta E}{\Delta}$, ki je odvisen od energije.

Sistem (**) je homogen, zato mora biti determinanta enaka 0 in rešitev obstaja pri diskretnih vrednostih energije. Odtod dobimo pogoj

$$\delta E = \pm \Delta \sqrt{1 - T \sin^2 \frac{\varphi}{2}}.$$

Na začetku smo privzeli, da je dovolj opazovati le $\delta E > 0$, saj $\delta E < 0$ predstavljajo že zasedena stanja. Zdaj pa to nova stanja, ki jih prej v superprevodniku ni bilo, zato sta obe energiji ($\delta E > 0$ in $\delta E < 0$) energiji fizikalno relevantnih stanj. Pogledati moramo, kaj pomeni: $\delta E < 0$.

V sistem dajmo napetost, desnemu kosu superprevodnika povišamo kemijski potencial.

$$\psi(t) \xrightarrow{eV} \psi(t)\, e^{-\frac{ieV}{\hbar}t}$$

↑

celotnemu sistemu dodamo konstanten potencial (gauge transformacija)

V superprevodniku je gauge simetrija zlomljena, zato „čuti" to dodatno fazo, $\psi_{cp} \to \psi_{cp}\, e^{-\frac{2ieV}{\hbar}t}$

V Bogoljubov–deGennesovem formalizmu pride ta faza „noter" v izvendiagonalne elemente, $\varphi = -\frac{2eV}{\hbar}t = \frac{2|e|V}{\hbar}t$ (to moramo vzeti), $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2|e|V}{\hbar}$. Zdaj smo nekako razložili, zakaj pride do fazne razlike med kosoma polprevodnika (oz. poznamo način, kako ustvariti to fazno razliko).

$P = VI = \Leftarrow$ moč, ki se porablja na stiku — ta energija se spremeni v energijo vezanega stanja

$$= \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2|e|V}{\hbar}\frac{dE}{d\varphi} \Rightarrow I = \frac{2|e|}{\hbar}\frac{dE}{d\varphi} = \frac{|e|\Delta}{2\hbar}\frac{T\sin\varphi}{\sqrt{1-T\sin^2\frac{\varphi}{2}}}$$

To smo zdaj zelo približno navedli (nismo vseh detajlov povedali).

Josephsonov efekt običajno obravnavamo v tej limiti

$$V=0 \to I_j(\varphi) = I_c\sin\varphi;\ I_c = \frac{|e|\Delta}{2\hbar}T \quad (T\ll 1)$$

$$E(\varphi) = -E_j\cos\varphi + \text{konst.};\ E_j = \frac{\hbar c}{2|e|}$$

$\boxed{\text{Kvantni računalniki}}$

Imamo valovno funkcijo $|\psi\rangle$, na katero pod vplivom nekega hamiltoniana deluje časovni razvoj, $|\psi\rangle \rightarrow U_t|\psi\rangle$, kjer je U_t unitarna matrika.

$$U = e^{-\frac{i}{\hbar}Ht} \quad \leftarrow \text{če je } H \text{ neodvisen od časa}$$

$$U = Te^{-\frac{i}{\hbar}\int H(t)\,dt} \quad \leftarrow \text{če je } H \text{ odvisen od časa}$$

Ideja kvantnih računalnikov je v tem da pripravimo stanje $|\psi\rangle$ in ga časovno propagiramo ter nato pomerimo.

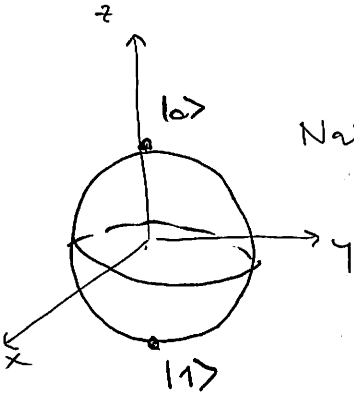
O kvantnih algoritmih ne bomo kaj dosti povedali, ker to ni ravno snov tega predmeta.

Vzemimo en kubit (delec s spinom $\frac{1}{2}$). Baza je zdaj $|\uparrow\rangle, |\downarrow\rangle$ in $|\psi\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ ~~najbolj splošno~~ je neko poljubno stanje. V kvantnem računalništvu je v navadi označiti $|\uparrow\rangle \rightarrow |0\rangle$ in $|\downarrow\rangle \rightarrow |1\rangle$

$$|\psi\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \cos\frac{\vartheta}{2}|0\rangle + \sin\frac{\vartheta}{2}e^{i\varphi}|1\rangle \quad \leftarrow \text{to je parametrizacija,}$$

ki smo jo vpeljali že pri kvantni mehaniki 1.

Velja
$$\left.\begin{aligned} \langle\sigma_x\rangle &= \sin\vartheta\cos\varphi \\ \langle\sigma_y\rangle &= \sin\vartheta\sin\varphi \\ \langle\sigma_z\rangle &= \cos\vartheta \end{aligned}\right\}$$
našo valovno funkcijo lahko enolično prikažemo na enotski sferi (Blochova sfera)



Naše valovne funkcije se nahajajo na površini te krogle. To je glavna razlika med klasičnim in kvantnim računalnikom

V teh stanjih se nahaja ogromno informacije, a je težava v tem, da je ne moremo dobiti, saj z meritvijo stanje kolapsira v lastno stanje „nečesa" in imamo le nekaj možnosti.

Za karkoli uporabnega potrebujemo več qubitov, npr. 2

$$|\psi\rangle = a|\uparrow\uparrow\rangle + b|\uparrow\downarrow\rangle + c|\downarrow\uparrow\rangle + d|\downarrow\downarrow\rangle.$$

Če je valovna funkcija N kubitov, je ta unitarna matrika U_t velikosti $2^N \times 2^N$. Glede na to, da potrebujemo nekaj tisoč kubitov (to je ocena), so te unitarne ~~tra~~ matrike nepredstavljivo velike.

Izkaže se, da lahko vsako unitarno transformacijo zapišemo kot produkt unitarnih transformacij, ki delujejo naenkrat le na enega ali dva kubita, $U = U_M U_{M-1} \dots U_1$. V splošnem potrebujemo eksponentno št. transformacij zato, da naredimo ta razcep. Če želimo, da bo algoritem praktično uporaben, ne sme biti čisto splošen (sicer bo težko narediti dekompozicijo).

$$H = -\underbrace{\vec{\mu}}\cdot\vec{B} + V_0 \quad \leftarrow \text{delec v magnetnem polju}$$

za e^- je to

$$\mu_B B \cdot \vec{\sigma}\cdot\hat{n}\,; \quad \vec{B} = B\cdot\hat{n}$$

$$e^{-\frac{iH}{\hbar}t} = e^{-\frac{i}{\hbar}B\mu_B\vec{\sigma}\cdot\hat{n}t}\, e^{-\frac{i}{\hbar}V_0 t} \equiv e^{i\phi_0}\, e^{\frac{i\phi_B\vec{\sigma}\cdot\hat{n}}{2}}$$

Definirali smo $-\frac{2B\mu_B}{\hbar}t = \phi_B$ in $\phi_0 = -\frac{1}{\hbar}V_0 t$

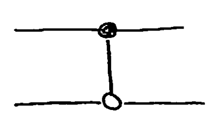
$$\Rightarrow e^{-\frac{iHt}{\hbar}} = \begin{bmatrix} e^{i\phi_0} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_0} \end{bmatrix}\left(\mathbb{1}\cos\frac{\phi_B}{2} + i\sin\frac{\phi_B}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\hat{n}\right) \leftarrow \text{iz kvantne mehanike I}$$

Potrebujemo še dvokubitne transformacije. Od teh jih je veliko možnih (4×4 unitarne matrike). Iz dokaza za obstoj tiste zgornje dekompozicije bi lahko ~~...~~ videli, da je dovolj ena dvokubitna operacija, CNOT.

$|00\rangle \longrightarrow |00\rangle$
$|01\rangle \longrightarrow |01\rangle$
$|10\rangle \longrightarrow |11\rangle$
$|11\rangle \longrightarrow |10\rangle$

$\uparrow$ kontrolni bit

$$U_{CNOT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



← znak za CNOT operacijo

NOT ← enokubitna operacija

$0 \to 1$

$1 \to 0 \quad \Rightarrow \quad U_{NOT} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \sigma_x$

To ustreza prejšnjemu hamiltonianu z $\hat{n} = \hat{e}_x$ in $\phi_B = \pi$, $\phi_0 = +\frac{\pi}{2}$.

Hardamardova vrata

$$\phi_B = \pi, \quad \hat{n} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T \qquad \boxed{H}$$

$$\mathbb{1}\cos\frac{\phi_B}{2} + i\sin\frac{\phi_B}{2}\,\vec{\sigma}\cdot\hat{n} = i\,\vec{\sigma}\cdot\hat{n} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\sigma_x + \sigma_z)$$

i se znebimo tako, da postavimo $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$. Ostane nam matrika

$$U_H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Če želimo delati dvokubitne interakcije, moramo gledati sklopitev med spini, recimo Heisenbergovo: $H = -J\,\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$, ali anizotropno sklopitev, $H = -J\,S_{1z}S_{2z}$. Na vajah bomo pokazali, da je operacija CNOT ekvivalentna

$$CNOT = e^{-\frac{i\pi}{4}} R_{\hat{y}}^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_{\hat{z}}^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) U_{Ising}\left(\frac{\pi}{4}\right) R_{\hat{z}}^{(2)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) R_{\hat{y}}^{(2)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

↑ 2. spin, rotacija okrog osi $\hat{y}$ za kot $-\frac{\pi}{2}$

$$U_{Ising} = e^{+\frac{i}{4} J \sigma_{1z}\sigma_{2z}\cdot t}$$

Oglejmo si Deutschev algoritem (kot primer preprostega algoritma).

$f: \{0,1\} \to \{0,1\}$ ⇐ diskretne funkcije

Imamo 4 take funkcije,

f_1: $0 \to 0$, $1 \to 0$ } konstantna

f_2: $0 \to 1$, $1 \to 0$ } uravnotežena

f_3: $0 \to 0$, $1 \to 1$ } uravnotežena

f_4: $0 \to 1$, $1 \to 1$ } konstantna

Nekdo nam je dal „black-box", v kateri je ena izmed teh funkcij. Ugotoviti moramo, ali je noter uravnotežena funkcija, ali konstanta.

Klasično potrebujemo dva izračuna.

Če bi to posplošili in imamo $\{0 \dots 15\} \to \{0,1\}$. Tukaj sta 2 konstantni in 12870 uravnoteženih funkcij. Potrebujemo (v najslabšem primeru) 9 evalvacij funkcije. Če imamo N vhodnih podatkov, potrebujemo 2^N+1 vrednosti (seveda je funkcija le uravnotežena ali konstantna, ostalih možnosti ni v škatli).

Deutschov algoritem zna to narediti z 1 vrednostjo. Poglejmo si samo le primer N=2 (deluje za $\forall N$).

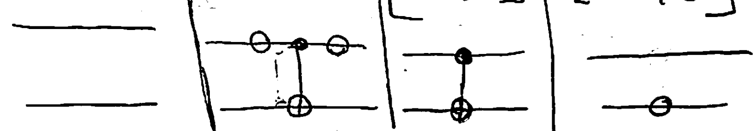
$|x\rangle|y\rangle \leftarrow |x\rangle = f\rangle|1\rangle$ (isto $|y\rangle$)

seštevanje po modulu 2

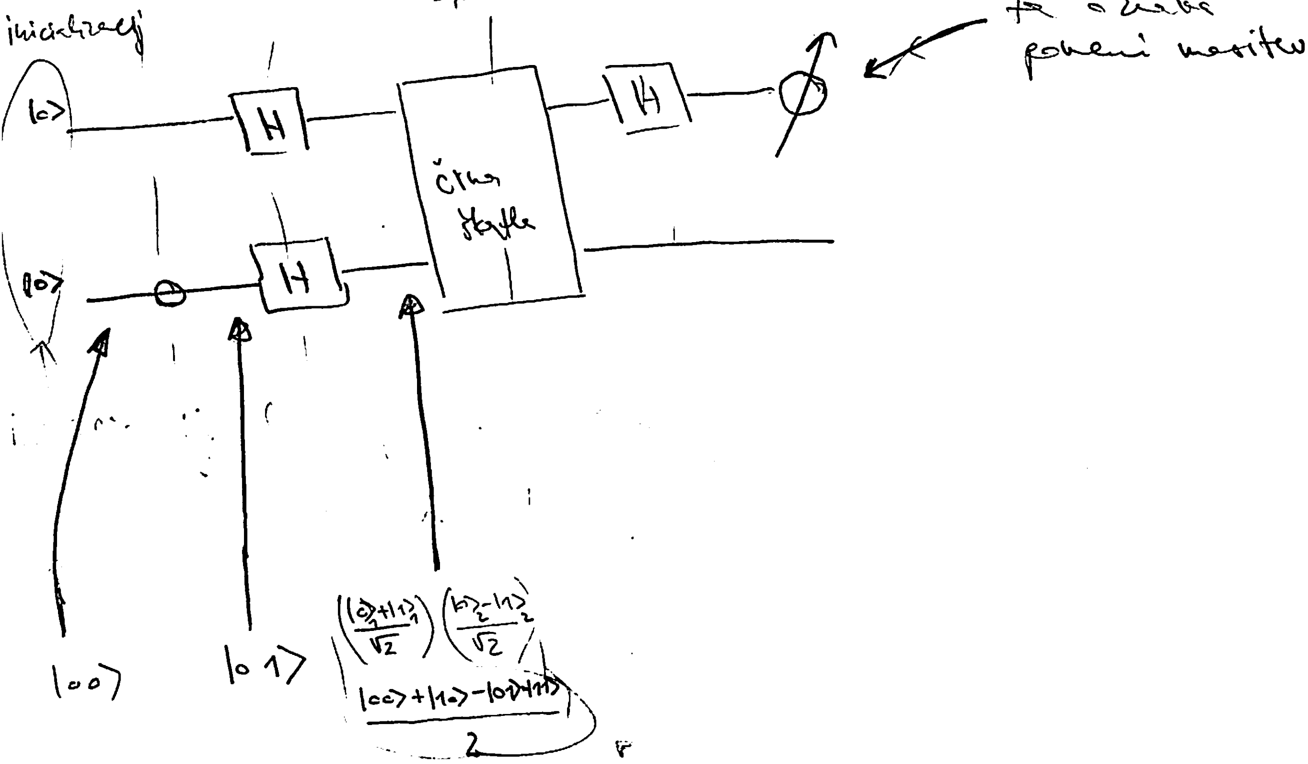
$$|x\rangle|y\rangle \longrightarrow |x\rangle\,|f(x)\oplus y\rangle$$

To je unitarna transformacija.

	f_1	f_2	f_3	f_4
$\lvert 0\rangle\lvert 0\rangle \to$	$\lvert 0\rangle\lvert 0\rangle$	$\lvert 0\rangle\lvert 1\rangle$	$\lvert 0\rangle\lvert 0\rangle$	$\lvert 0\rangle\lvert 1\rangle$
$\lvert 0\rangle\lvert 1\rangle \to$	$\lvert 0\rangle\lvert 1\rangle$	$\lvert 0\rangle\lvert 0\rangle$	$\lvert 0\rangle\lvert 1\rangle$	$\lvert 0\rangle\lvert 0\rangle$
$\lvert 1\rangle\lvert 0\rangle \to$	$\lvert 1\rangle\lvert 0\rangle$	$\lvert 1\rangle\lvert 0\rangle$	$\lvert 1\rangle\lvert 1\rangle$	$\lvert 1\rangle\lvert 1\rangle$
$\lvert 1\rangle\lvert 1\rangle \to$	$\lvert 1\rangle\lvert 1\rangle$	$\lvert 1\rangle\lvert 1\rangle$	$\lvert 1\rangle\lvert 0\rangle$	$\lvert 1\rangle\lvert 0\rangle$
U	$U=\mathbb{1}_4$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ 1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 \\ & & 1 & 0 \end{bmatrix}$
vezje		NOT(1) CNOT(2) NOT(1)	CNOT(2)	NOT(2)



Imamo teh 4 možna vezja in moramo ugotoviti, katero od teh je v črni škatli.



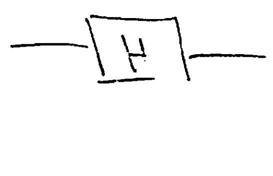
Kaj naredi črna škatla na tem stanju?

f_1: $\frac{1}{2}\left(|00\rangle-|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle\right) \rightarrow |f_1\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle-|01\rangle+|10\rangle-|11\rangle\right) = \frac{|0\rangle_1+|1\rangle_1}{\sqrt2}\,\frac{|0\rangle_2-|1\rangle_2}{\sqrt2}$

f_2: $-\parallel-$ $\rightarrow |f_2\rangle = \frac{1}{2}\left(|01\rangle-|00\rangle+|10\rangle-|11\rangle\right) = \frac{|0\rangle_1-|1\rangle_1}{\sqrt2}\,\frac{|0\rangle_2+|1\rangle_1}{\sqrt2}$

f_3: $-\parallel-$ $\rightarrow |f_3\rangle = \frac{1}{2}\left(|00\rangle-|01\rangle+|11\rangle-|10\rangle\right) = -|f_2\rangle$

f_4: $-\parallel-$ $\rightarrow |f_4\rangle = \frac{1}{2}\left(|01\rangle-|00\rangle+|11\rangle-|10\rangle\right) = -|f_1\rangle$



$H = \frac{1}{\sqrt2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}$

$I = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$

Dovolj je pogledati, kaj H naredi na prvem spinu (drugi ni pomemben).

$(H_1 \otimes I_2)\,|f_1\rangle = H_1 \frac{|0\rangle_1+|1\rangle_1}{\sqrt2} \otimes$ drugi kubit

$$H|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ 1\end{bmatrix} = \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$H|1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix} = \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$$

$$H^2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow H\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |0\rangle$$

$$H\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = |1\rangle$$

Tik pred merjenjem imamo tako 0 za f_1, f_4 in 1 za f_2, f_3. Zato bomo po meritvi 100% vedeli, ali imamo konstantno ali uravnoteženo funkcijo.

To je slab primer kvantnega algoritma (ni ravno uporaben).

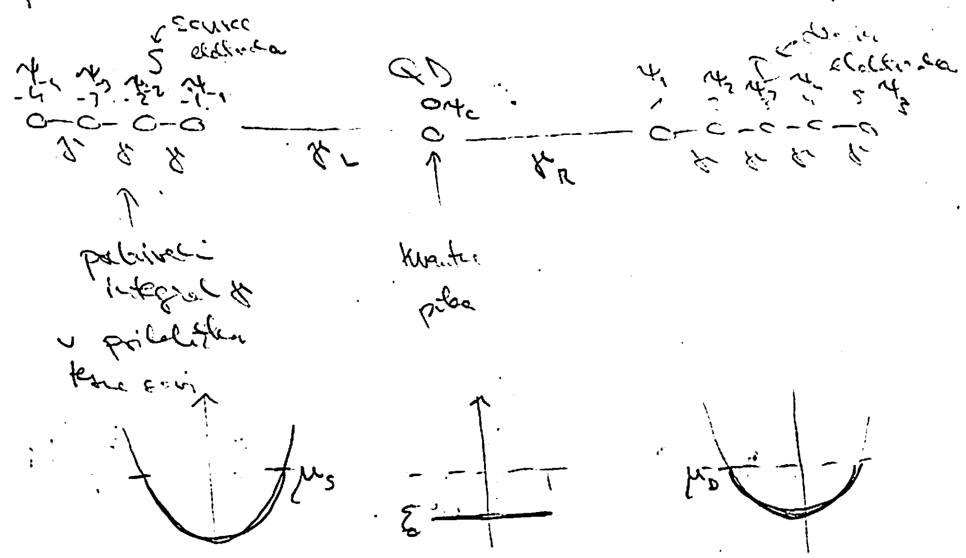
$$I = \frac{2e}{h}\int d\varepsilon \left(f_s(\varepsilon) - f_d(\varepsilon)\right) T(\varepsilon)$$

Opazujemo še najnižji red v prevodni smeri.

$\mu_s = \mu_d + eU$

$$\lim U \to 0 \Rightarrow I = GU; \quad G = \frac{2e^2}{h}\int d\varepsilon \left(-f'(\varepsilon)\right) T(\varepsilon)$$

Opisali bomo teoretičen model za kvantno piko.



Pričakujemo, da bo sistem dobro prevoden, ko bo ε_0 blizu μ_s, μ_D.

Približek tesne vezi:

$$-\gamma\psi_{n-1} - \gamma\psi_{n+1} + \varepsilon_n\psi_n = E\psi_n$$

γ je preskakovalni integral med n in $n+1$ / n in $n-1$

$n=0$: $-\gamma_L\psi_{-1} - \gamma_R\psi_1 + \varepsilon_0\psi_0 = E\psi_0$

$n=1$: $-\gamma_R\psi_0 - \gamma\psi_2 + \varepsilon_1\psi_1 = E\psi_1$

$n=-1$: $-\gamma\psi_{-2} - \gamma_L\psi_0 + \varepsilon_{-1}\psi_{-1} = E\psi_{-1}$

← v ostalih primerih je tako kot zgoraj.

Velja $\varepsilon_n = 0$ za $n \neq 0$ (ničla energije, zato):

$n=0$: $-\gamma_L\psi_{-1} - \gamma_R\psi_1 + \varepsilon_0\psi_0 = E\psi_0$

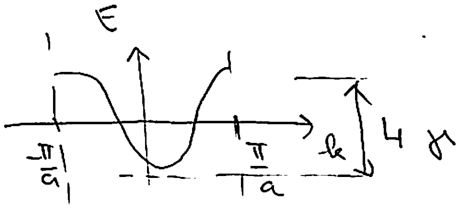
$n=-1$: $-\gamma\psi_{-2} - \gamma_L\psi_0 = E\psi_{-1}$

$n=1$: $-\gamma_R\psi_0 - \gamma\psi_2 = E\psi_1$

$n \neq 0, \pm 1$: $-\gamma\psi_{n-1} - \gamma\psi_{n+1} = E\psi_n$

Nastavek za rešitev je ~~...~~ $\psi_n = A e^{ikna}$:

$$-\gamma e^{ik(n-1)a} - \gamma e^{ik(n+1)a} = E e^{ikna} \Rightarrow \underline{\underline{E}} = -\gamma e^{-ika} - \gamma e^{ika} = \underline{\underline{-2\gamma\cos(ka)}}$$



Vzamemo: $n<0 \quad \psi_n = e^{ikna} + r e^{-ikna}$

$n>0 \quad \psi_n = t e^{ikna}$

To zdaj vstavimo v enačbe:

$n=0: \quad -\gamma_L\left(e^{-ika} + r e^{ika}\right) - \gamma_R t e^{ika} + \varepsilon_0 \psi_0 = E\psi_0$

$n=1: \quad -\gamma\left(e^{-2ika} + r e^{2ika}\right) - \gamma_L t \psi_0 = E\left(e^{-ika} + r e^{ika}\right)$

$n=1: \quad -\gamma_R \psi_0 - \gamma t e^{2ika} = E t e^{ika}$

Ta sistem ima rešitev, izkaže se

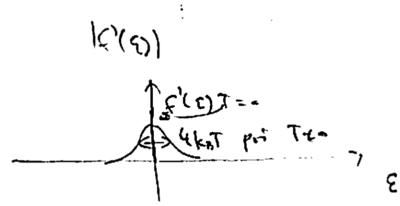
$$t = \frac{-2i\sin(ka)\,\frac{\gamma_L\gamma_R}{\gamma}}{E - \varepsilon_0 + \frac{\gamma_L^2+\gamma_R^2}{\gamma} e^{ika}}$$

Energijska odvisnost ima v $E-\varepsilon_0$ in k.

Predpostavimo, da je pas do polovice zapolnjen. To je smiselna predpostavka za kovine in nam močno olajša račun. Zato velja $-\frac{\pi}{2a} < k < \frac{\pi}{2a}$.

$$T(\varepsilon) = |t|^2$$

Oglejmo si poseben primer, ko je temperatura enaka 0, $T=0$. Potem je $f'(\varepsilon) = -\delta(\varepsilon - \varepsilon_F)$. Pas je zapolnjen do polovice in je $k_F = \frac{\pi}{2a}$ in $\varepsilon_F = 0$.



$$t(E=0) = \frac{-2i\,\frac{\gamma_L\gamma_R}{\gamma}}{-\varepsilon_0 + \frac{\gamma_L^2+\gamma_R^2}{\gamma} i}$$

Če je temperatura nizka, ~~moramo poiskati~~ prispeva le ozek pas okrog

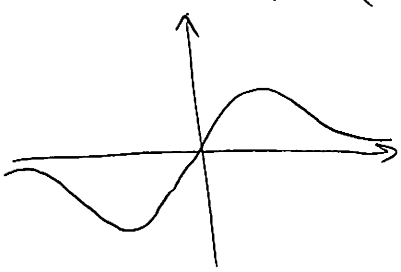
velja, $\left| t(E\approx 0) = \frac{-2i\,\frac{\gamma_L\gamma_R}{\gamma}}{E-\varepsilon_0 + \frac{\gamma_L^2+\gamma_R^2}{\gamma} i} \right|$

Med elektrodi priključimo tako napetost, da bo tok enak 0,

$$I = \frac{2e}{h}\int d\varepsilon\, T(\varepsilon)\left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)\left(eU + \frac{\varepsilon-\mu}{T}\Delta T\right) = 0$$

$$eU = -\frac{\Delta T}{T}\,\frac{\int(\varepsilon-\mu)(-f'(\varepsilon))\,T(\varepsilon)\,d\varepsilon}{\int(-f'(\varepsilon))\,T(\varepsilon)\,d\varepsilon} \equiv S\Delta T$$

$(\varepsilon-\mu)(f'(\varepsilon))$



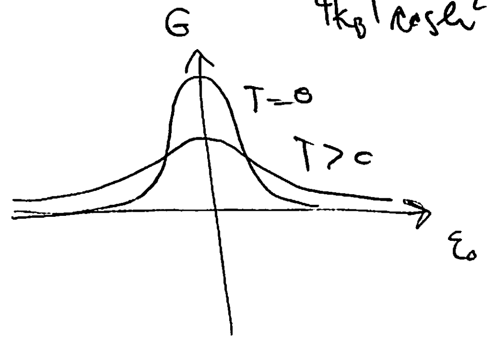
Seebeckov koeficient

!? neki čudni grafi ¡

Naj bo $\gamma_L = \gamma_R = \gamma_1$. Kaj se zgodi s prevodnostjo pri $T > 0$?

$$G = \frac{2e^2}{h} \int d\varepsilon \underbrace{\left(-f'(\varepsilon)\right)}_{\frac{1}{4k_B T \cosh^2 \frac{\varepsilon}{2k_B T}}} T(\varepsilon)$$

kot smo prej videli je to neke vrste Lorentzova porazdelitev



Kaj se zgodi, če sta source in drain na različnih temperaturah?

$$I = \frac{2e}{h} \int d\varepsilon \left(f_s(\varepsilon) - f_d(\varepsilon)\right) T(\varepsilon); \quad f(\varepsilon, \mu, T) = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}} + 1}$$

Drain: μ, T

Source: $\mu + eU, \; T + \Delta T$

$$f_s = f(\varepsilon, \mu + eU, T + \Delta T) = f(\varepsilon, \mu, T) + \frac{\partial f}{\partial \mu} eU + \frac{\partial f}{\partial T} \Delta T$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu} = -\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}; \quad \frac{\partial f}{\partial T} = \frac{\partial f}{\partial \left(\frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}\right)} \cdot \frac{\partial \frac{\varepsilon-\mu}{k_B T}}{\partial T} = \frac{\partial f}{\partial \varepsilon} \cancel{k_B T} \frac{\varepsilon - \mu}{\cancel{k_B} T^{\cancel{2}}} (-1) = -\frac{\varepsilon-\mu}{T} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}$$

$$\Rightarrow f_s = f_d + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\left(-eU - \frac{\varepsilon - \mu}{T} \Delta T\right) = f_d - \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\left(eU + \frac{\varepsilon-\mu}{T}\Delta T\right)$$

$$f_s - f_d = \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)\left(eU + \frac{\varepsilon - \mu}{T} \Delta T\right)$$

$$\boxed{I = \frac{2e}{h} \int d\varepsilon \left(-\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}\right)\left(eU + \frac{\varepsilon-\mu}{T}\Delta T\right) T(\varepsilon)}$$

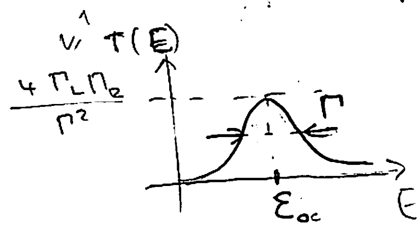
To je toplotni generator.

Vpeljemo $\frac{\gamma_L^2}{\gamma} = \frac{\Gamma_L}{2}$, $\frac{\gamma_R^2}{\gamma} = \frac{\Gamma_R}{2}$, $\Gamma = \Gamma_L + \Gamma_R$.

$$t(E \approx 0) = \frac{-2i\,\frac{\sqrt{\Gamma_L \Gamma_R}}{2}}{E - \varepsilon_0 + \frac{i}{2}\Gamma}$$

$$\boxed{T(E) = |t|^2 = \frac{\Gamma_L \Gamma_R}{|E-\varepsilon_0|^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}}$$

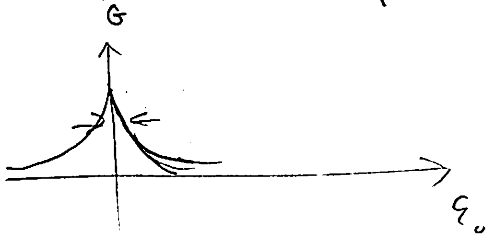
Breit-Wignerjeva resonanca



Če je sklopitev simetrično, bo $\Gamma_L = \Gamma_R = \frac{\Gamma}{2}$ in $T(E)$ v resonanci je 1,

$\underline{T(\varepsilon_0) = 1.}$

Naj bo kemijski potencial na srednjem pasu, $\mu = 0$



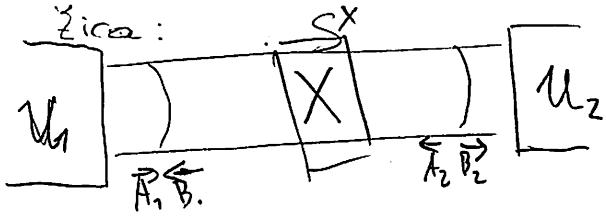
$$G = \frac{2e^2}{h}\Gamma_L\Gamma_R \int \frac{-f'(\varepsilon)\,d\varepsilon}{(\varepsilon-\varepsilon_0)^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2}$$

$T = 0$: $$G = \frac{2e^2}{h}\Gamma_L\Gamma_R \frac{1}{h\left((\varepsilon_F-\varepsilon_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}\right)} \overset{\varepsilon_F = 0}{=} \frac{2e^2\Gamma_L\Gamma_R}{h\left(\varepsilon_0^2 + \frac{\Gamma^2}{4}\right)}$$

Če se od 0 odmaknemo za $\sim \Gamma$, tok še vedno teče. Šele ko je ε_0 res daleč od 0, tok neha teči.

(1) NANOFIZIKA → VAJE

Žica:

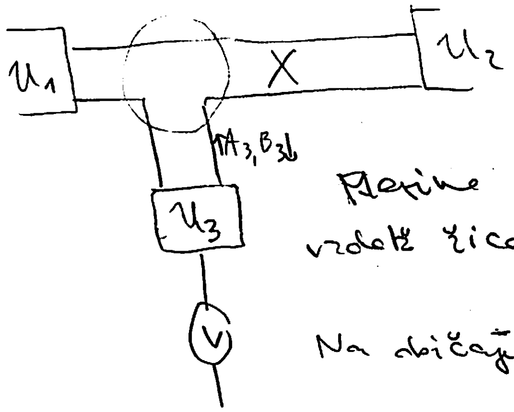


⇐ U_1, U_2 sta napetosti, X je delec na sredini, ki ima sipalno matriko S^X. Za eno stanje je relevantno

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}}_{S^X} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

Razlika napetosti $U_2 - U_1$ bo povzročila tok skozi „žico".

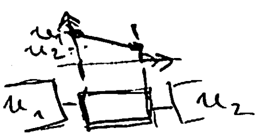
Dodamo še tretjo žico



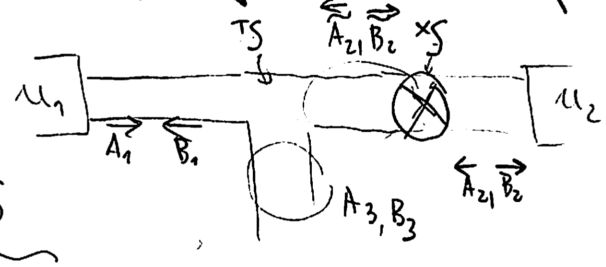
(noninvasive voltage probe)

Merimo napetost U_3 v odvisnosti od položaja vzdolž žice

Na običajnem upormku je



Na stičišču treh žic imamo spet neko sipalno matriko, S^T. Med tem stičiščem in x valovne funkcije ne bo več podane z A_1, B_1, ampak označimo $\overleftarrow{\tilde{A}_2}, \overrightarrow{\tilde{B}_2}$.



Velja:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = \overbrace{\begin{pmatrix} r & t' \\ t & r' \end{pmatrix}}^{{}^{x}S} \begin{pmatrix} \tilde{B}_2 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ \tilde{B}_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = {}^{T}S \begin{pmatrix} A_1 \\ \tilde{A}_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Z S označimo celotno matriko,

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}$$

Iz teh treh matričnih enačb bi se redi izračunali

$\tilde{A}_2, \tilde{B}_2$.

Do zdaj smo naredili eno napako, saj moramo upoštevati še fazo, $e^{\pm ikd}$ (izhodišče postavimo v „T"-stik); ta faza spremeni k $\tilde{A}_2, \tilde{B}_2$.

$$\text{Vzamemo} \quad {}^{\times}S = \begin{pmatrix} i\sqrt{1-T} & \sqrt{T} \\ \sqrt{T} & i\sqrt{1-T} \end{pmatrix} \leftarrow \text{Sipalno matriko smo parametrizirali}$$

s predpostavko $T=|t|^2$. Velja ${}^{\times}S^T = {}^{\times}S$ in ${}^{\times}S^+ {}^{\times}S = \mathbb{1}$.

$${}^{T}S = \begin{pmatrix} a & b & \sqrt{\varepsilon} \\ b & a & \sqrt{\varepsilon} \\ \sqrt{\varepsilon} & \sqrt{\varepsilon} & c \end{pmatrix}; \qquad a = -\frac{1+c}{2}, \; b = \frac{1-c}{2}, \; c = \sqrt{1-2\varepsilon}$$

Matriko ${}^{T}S$ smo zdaj parametrizirali z ε.

$$I_\alpha = -\frac{e}{h}\int d\varepsilon \sum_{n,\beta m} f_\beta(\varepsilon)\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{mn} - |S_{\alpha n,\beta m}|^2\right)$$

$$f_\beta(\varepsilon) = f(\varepsilon - eU_\beta) \approx f(\varepsilon) - eU_\beta f'(\varepsilon)$$

$$I_\alpha = \sum_\beta G_{\alpha\beta} U_\beta; \qquad G_{\alpha\beta} = -\frac{e^2}{h}\int d\varepsilon(-f'(\varepsilon)) \sum_{n,\beta m}\left(\delta_{\alpha\beta}\delta_{mn} - |S_{\alpha n,\beta m}|^2\right)$$

$$I_3 = G_{31}U_1 + G_{32}U_2 + G_{33}U_3 \underset{\uparrow}{=} 0 \Rightarrow U_3 = -\frac{1}{G_{33}}\left(G_{31}U_1 + G_{32}U_2\right)$$

rečeno, da je
tok skozi
„voltmeter" približno 0

$$G_{31} + G_{32} + G_{33} = 0 \Rightarrow G_{33} = -(G_{31} + G_{32}) \quad \text{(„Kirchhoffov zakon")}$$

$$U_3 = \frac{G_{31}U_1 + G_{32}U_2}{G_{31} + G_{32}} \qquad G_{31} = -\frac{2e^2}{h}\int d\varepsilon\left[-f'(\varepsilon)\right]\left(-|S_{31}|^2\right)$$

spin!

$$G_{32} = -\frac{2e^2}{h}\int d\varepsilon(-f'(\varepsilon))\left(-|S_{32}|^2\right)$$

Postavimo $T=0 \rightarrow G_{31} = \frac{2e^2}{h}|S_{31}|^2$ in $\frac{2e^2}{h}|S_{32}|^2$.

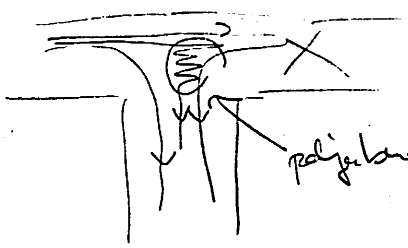
⑥ NANOFIZIKA → VAJE

Tako lahko zapišemo $$\mathcal{U}_3 = \frac{|S_{31}|^2\,\mathcal{U}_1 + |S_{32}|^2\,\mathcal{U}_2}{|S_{31}|^2 + |S_{32}|^2}$$

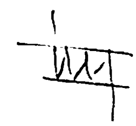
Elemente sipalne matrike opazujemo pri μ, ki je neka srednja vrednost (predpostavimo, da so razlike med μ majhne). Ta predpostavka je dobra, ker smo že prej izbrali tako modelsko sipalno matriko, ki je neodvisna od μ.

Uporabili bomo Feynmanov „path"-integral: sipalno matriko dobimo tako, da seštejemo vse možne poti, da pridemo iz $i \to j$ (tako dobimo S_{ij}).

TS $\quad$ ^{x}S



poljubnokrat se lahko odbije med ^{x}S, ^{T}S.

To je ekvivalentno interferenci svetlobe na tanki plasti,  .

$$S_{31} = \underbrace{\sqrt{\varepsilon}}_{\text{direktno}} + \underbrace{b e^{ikd}\, i\sqrt{1-T}\, e^{ikd}\sqrt{\varepsilon}}_{1\text{ odboj}} + b e^{ikd}\, i\sqrt{1-T}\, e^{ikd}\, a e^{ikd}\, i\sqrt{1-T}\, e^{ikd}\sqrt{\varepsilon} + \dots$$

$$= \sqrt{\varepsilon} + b e^{ikd}\, i\sqrt{1-T}\, e^{ikd}\sqrt{\varepsilon} + b e^{ikd}\, i\sqrt{1-T}\, e^{ikd}\underbrace{\left(a e^{ikd}\, i\sqrt{1-T}\, e^{ikd}\right)}_{\text{ta del se pri večkratnih odbojih ponavlja}}\sqrt{\varepsilon} + \dots =$$

$$= \sqrt{\varepsilon} + b e^{ikd}\, i\sqrt{1-T}\, e^{ikd}\sqrt{\varepsilon}\sum_{n=0}^{\infty}\left(a e^{2ikd}\, i\sqrt{1-T}\right)^n =$$

$$= \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{\varepsilon}\, i\sqrt{1-T}\, e^{2ikd}\, b\,\frac{1}{1 - a e^{2ikd}\, i\sqrt{1-T}} = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{1 - a e^{2ikd}\, i\sqrt{1-T} + i\sqrt{1-T}\, b e^{2ikd}}{1 - a e^{2ikd}\, i\sqrt{1-T}} =$$

$$= \sqrt{\varepsilon}\,\frac{1 - e^{2ikd}\, i\sqrt{1-T}\,(a-b)}{1 - e^{2ikd}\, i\sqrt{1-T}\, a} = \sqrt{\varepsilon}\,\frac{1 + i\sqrt{1-T}\, e^{2ikd}}{1 - i\sqrt{1-T}\, e^{2ikd}\frac{\sqrt{1-2\varepsilon}-1}{2}} \approx \sqrt{\varepsilon}\left(1 + i\sqrt{1-T}\, e^{2ikd}\right)$$

$$\boxed{\begin{aligned} a &= -\frac{c+1}{2} = \frac{\sqrt{1-2\varepsilon}-1}{2} \\ a-b &= \frac{-c-1-1+c}{2} = -1 \end{aligned}}$$

ε je majhen, zato lahko $\sqrt{1-2\varepsilon}-1$ v prvem redu zanemarimo

$$\Rightarrow \boxed{|S_{31}|^2 = \mathcal{E}\left(2-T+2\sqrt{1-T}\,\sin(2k_0d)\right)}$$

Podobno izračunamo $\boxed{|S_{32}|^2 = \mathcal{E}T}$.

Odtod vidimo

$$U_3 = \frac{\mathcal{E}\left(2-T+2\sqrt{1-T}\,\sin(2k_0d)\right)U_1 + \mathcal{E}TU_2}{2\mathcal{E}\left(1+\sqrt{1-T}\,\sin(2k_0d)\right)}$$

Vidimo, da se izmerjena napetost spreminja z d (in oscilira). Takih členov pri klasičnem Ohmovem zakonu nimamo (v klasični fiziki je ta odvisnost linearna).

V eksperimentu tega sinusnega člena ne opazimo.

$$G_{\beta\alpha} = -\frac{2e^2}{h}\int dE\,[-f'(E)]\,|S_{\beta\alpha}(E)|^2 \quad (\beta\neq\alpha)$$

← Pri končni temperaturi moramo povprečiti po energiji.

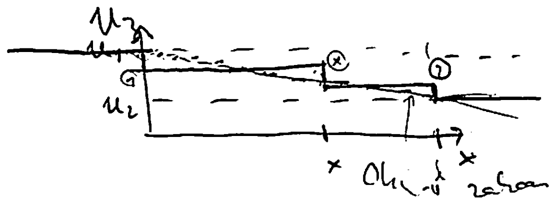
Če je temperatura dovolj visoka, se oscilacije izpovprečijo in je

$$\underline{\underline{U_3}} = \frac{\mathcal{E}(2-T)U_1 + \mathcal{E}TU_2}{2\mathcal{E}} = \underline{\underline{\left(1-\frac{T}{2}\right)U_1 + \frac{T}{2}U_2}}$$

Zaradi končne temperature se faze izpovprečijo in prišli smo v režim, kjer se ne seštevajo amplitude (koherentni režim), ampak verjetnosti (nekoherentni režim).

Potem je $S_{31} = \mathcal{E} + 1\cdot(1-T)\mathcal{E} + \ldots = \mathcal{E}(2-T)$. Veliko lažje smo zdaj dobili isti izraz, kot zgoraj.

V U_3 na videz ni kvantne odvisnosti, a spomnimo se, da smo predpostavili, da je TF pred ⊗. Zato velja:



Kljub temu dobimo drugačno obliko, kot je Ohmov zakon za običajen upornik

$$I = \frac{2e^2}{h}T(U_1-U_2)$$

tok čez 1: $I = G_1\frac{1}{2}(U_1-U_2)$

tok čez 2: $I = G_2\cdot\frac{U_1-U_2}{2}$

tok čez ⊗: $I = G_x(1-T)(U_1-U_2)$

② NANOFIZIKA ⇒ VAJE

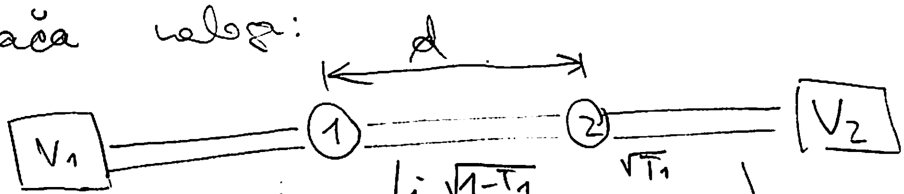
To zdaj primerjamo z rezi, kot smo jih dobili,

$$G_1 = \frac{4e^2}{h}, \quad G_2 = \frac{4e^2}{h}, \quad G_x = \frac{2e^2}{h}\frac{T}{1-T}$$

Če sipalca ni, je prevodnost zaradi sipalca ∞.

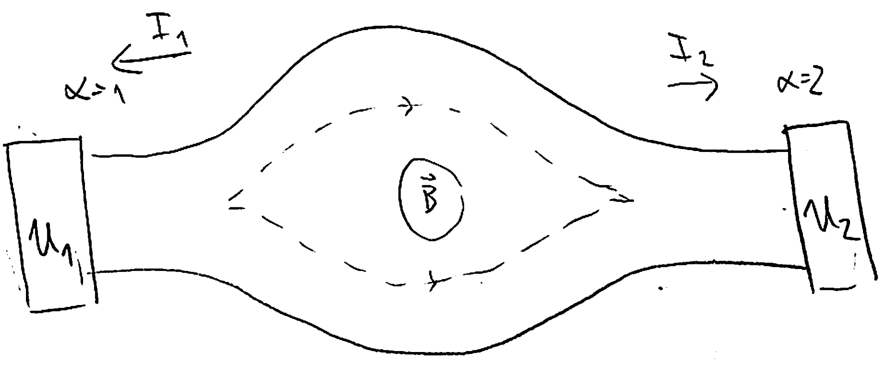
$$\frac{1}{G} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2} + \frac{1}{G_x}.$$ Če ni sipalca, se G_1, G_2 ujemata z $G = \frac{2e^2}{h}$.

Domača naloga:



$$^1S = \begin{pmatrix} i\sqrt{1-T_1} & \sqrt{T_1} \\ \sqrt{T_1} & i\sqrt{1-T_1} \end{pmatrix} \qquad {}^2S = \dots \; T_1 \to T_2$$

Najdi prevodnost.
To izračunaj za koherenten in nekoherenten primer.



$$\cos\left(\chi_\mu - \chi_\alpha + \frac{\pi\,\phi_m}{\phi_0}\right); \quad \phi_0 = \frac{h}{2e}$$

$$\phi_m = \int \vec{B}\cdot d\vec{S}$$

$$\cos\left(2\pi\frac{\phi_m}{\phi_0}\right)$$

$$I_\alpha = \sum_\beta G_{\alpha\beta} U_\beta \qquad I_2 = -I_1 \;\to\; I = I_2$$
$$I_1 = -I$$

$$I_1 = G_{11}U_1 + G_{12}U_2$$

$$I_2 = G_{21}U_1 + G_{22}U_2 \quad \leftarrow \quad G_{11} = -G_{12} \text{ in } G_{21} = -G_{22}$$

$$U = U_1 - U_2$$

$$I_1 = G_{12}(-U_1 + U_2) \qquad I = +G_{12}U$$

$$I_2 = G_{21}(U_1 - U_2) \qquad I = +G_{21}U$$

$$G_{\alpha\beta} = \frac{2e^2}{h}\int d\varepsilon \left[-f'(\varepsilon)\right] \left|S_{\alpha\beta}(\varepsilon)\right|^2 \qquad \alpha\neq\beta$$

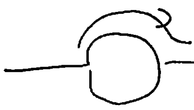
$$S_{12}(\vec{B}) = S_{21}(-\vec{B})$$ ← to smo pokazali na predavanjih

$$G_{12}(\vec{B}) = G_{21}(-\vec{B})$$

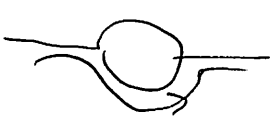
Če bi eksperiment dvakrat ponovili, enkrat z $\vec{B}$ in enkrat z $-\vec{B}$, bi morali izmeriti enaka toka (prevodnost).

Če pa pogledamo Aharonov-Bohmove oscilacije, dobimo enkrat $\cos\left(\chi_u - \chi_d + \frac{\pi\Phi_m}{\Phi_0}\right)$, enkrat pa $\cos\left(\chi_u - \chi_d - \frac{\pi\Phi_m}{\Phi_0}\right)$ (*), vrednosti očitno nista enaki. Napako smo dobili pri izpeljavi, ko smo zanemarili prispevke višjih redov.

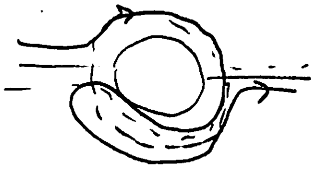
Poskusimo si ogledati nekaj teh prispevkov, ki smo jih zanemarili.



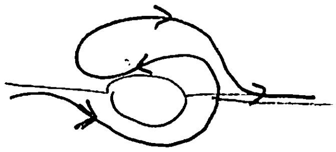
$e^{i(\chi_u+\Phi_u)}$



$e^{i(\chi_d-\Phi_d)}$



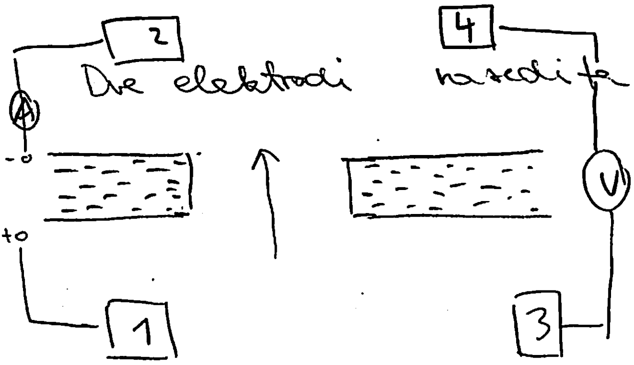
$e^{i(\chi_u+2\chi_d+\Phi_u)}$



$e^{i(2\chi_d+\chi_u-\Phi_d)}$

Iz teh dveh členov dobimo nekaj podobnega tistemu kosinusnemu členu (*)

To lahko malo posplošim. Elektron ~~obkrož~~ zavije okrog in pridobi poljubno dinamične faze in eno magnetne (ali pa pridobi poljubno dinamične faze ter $-\Phi_d$ magnetne). Če vzamemo vse ~~take~~ prispevke dobimo $(\cdot - - - -)\cos\left(\pi\frac{\Phi_m}{\Phi_0}\right)$.



Dve elektrodi naredita kvantni točkovni stik:

Obe elektrodi imata negativni naboj, zato je za e^- najbolj ugodno, da „teče" „po sredini" med elektrodama. Na tak način dobimo „zelo tanko žico".

Vzamemo 4 elektrode, da lažje merimo napetost in tok G (tem se znebimo vpliva neidealnih kontaktov).

$$I_\alpha = \sum_\beta G_{\alpha\beta} U_\beta$$

$$I_1 = G_{11}U_1 + G_{12}U_2 + G_{13}U_3 + G_{14}U_4$$

$$I_2 = G_{21}U_1 + G_{22}U_2 + G_{23}U_3 + G_{24}U_4$$

$$I_3 = G_{31}U_1 + G_{32}U_2 + G_{33}U_3 + G_{34}U_4$$

$$I_4 = G_{41}U_1 + G_{42}U_2 + G_{43}U_3 + G_{44}U_4$$

$$I_1 = G_{12}\underbrace{(U_2 - U_1)}_{U_{21}} + G_{13}\underbrace{(U_3 - U_1)}_{U_{31}} + G_{14}\underbrace{(U_4 - U_1)}_{U_{41}}$$

$$\vdots$$

$$I_4 = G_{41}U_{14} + G_{42}U_{24} + G_{43}U_{34}$$

Poleg tega velja $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ in zaradi voltmetra $I_4 = I_3 = 0$. Zato $I_1 + I_2 = 0$. Postavimo $I = I_1 = -I_2$.

$$\underset{\varepsilon}{G_{12}}\underset{1}{U_{21}} + \underset{1}{G_{13}}\underset{\varepsilon}{U_{31}} + \underset{\varepsilon}{G_{14}}\underset{1}{U_{41}} = I \quad (1)$$

$$-\underset{\varepsilon}{G_{21}}U_{21} + \underset{\varepsilon}{G_{23}}U_{32} + \underset{1}{G_{24}}U_{42} = -I \quad (2)$$

$$-\underset{1}{G_{31}}U_{31} - \underset{\varepsilon}{G_{32}}U_{32} + \underset{\varepsilon}{G_{34}}U_{43} = 0$$

$$\underset{\varepsilon}{G_{41}}U_{41} + \underset{1}{G_{42}U_{42}} + \underset{\varepsilon}{G_{43}}U_{43} = 0 \quad (4)$$

Na voltmetru bomo izmerili $V = U_{43}$. Zdaj imamo dovolj neznank in enačb, da lahko rešimo sistem. Sistem pa je 4x4, zato poskusimo problem poenostaviti.

Celi sistem (razen ozke žičke med elektrodama) je uporovno $\sim \sigma$, zato so veliki G, ko gre elektron ~~med~~ po 2D elektronskem plinu, majhne pa „po žički".

En red velikosti $1 \sim$ velike prevodnosti, majhne prevodnosti $\sim \varepsilon \ll 1$.

· G_{13}, G_{24} sta veliki, $\mathcal{O}(1)$

Če pogledamo enačbo, vidimo da morajo biti napetosti zraven členov z velikimi prevodnostmi reda ε, zraven členov z majhnimi prevodnostmi pa 1.

$$U_{41} = \overset{1}{U_{43}} + \overset{\varepsilon}{U_{31}} \approx U_{43} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$U_{21} = U = \underbrace{U_{24}}_{\sim\varepsilon} + U_{43} + \underbrace{U_{31}}_{\sim\varepsilon} \approx U_{43} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

Zdaj tako popišemo (1), (4) in obdržimo le člene reda ε (manjše izpustimo)

$$G_{12} U_{43} + G_{13} U_{31} + G_{14} U_{43} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = I$$

$$G_{41} U_{43} + G_{42} U_{42} + G_{43} U_{43} + \mathcal{O}(\varepsilon^2) = I$$

Imamo še eno neznanko preveč.

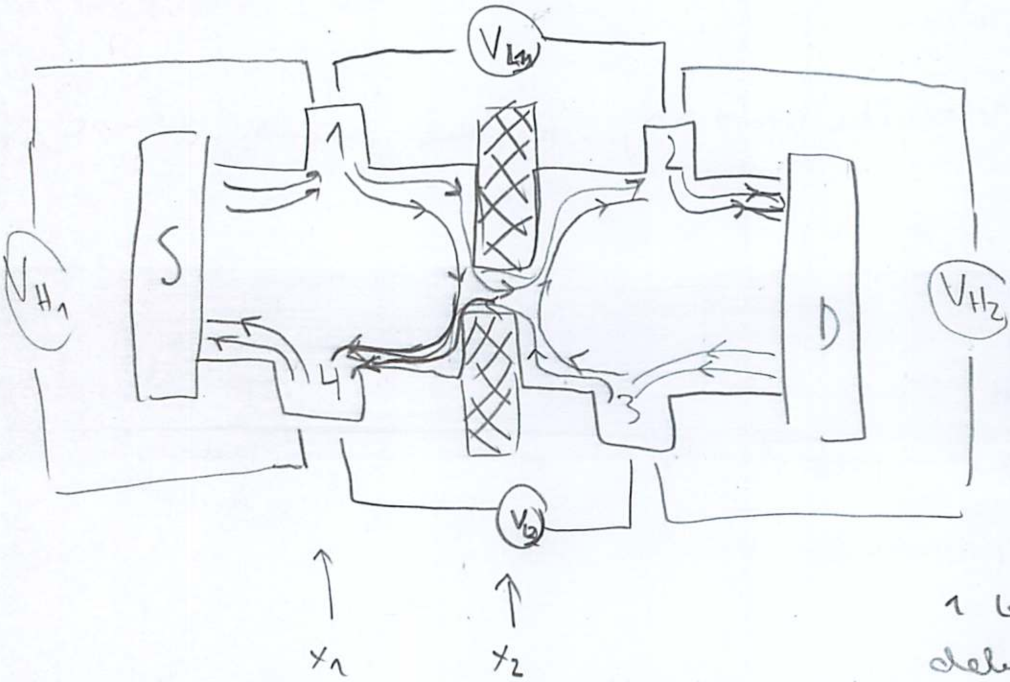
Zato zdaj pogledamo (2)

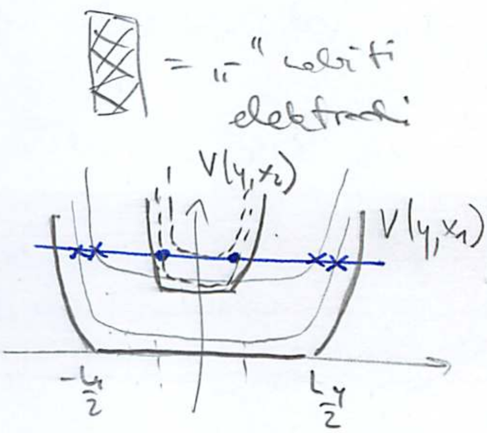
$$U_{32} = -U_{43} + U_{42} = -U_{43} + \mathcal{O}(\varepsilon)$$

$$(2): \quad -G_{21} U_{43} - G_{23} U_{43} + G_{24} U_{42} = -I$$

Odtod dobimo $\boxed{U_{43} = \dfrac{I}{G_{41}+G_{21}+G_{23}+G_{43}}}$; če velja $\vec{B}=0$ (če je $\vec{B}\neq 0$ pa pač drugače dobimo).

Izračunajmo Hallovo in longitudinalno napetost za tale sistem:





Na zožanju imamo zaseden 1 Landauov nivo, na širokem delu pa 2.

Malo bolj splošno naj bo M nivojev zasedenih na širokem in N na ožkem $(N<M)$ ← obe „števili" sta za en smer.

$$\begin{pmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2e^2}{h}\begin{pmatrix} -M & 0 & 0 & 0 & 0 & M \\ M & -M & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N & -M & 0 & M-N & 0 \\ 0 & 0 & M & -M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & -M & 0 \\ 0 & M-N & 0 & 0 & N & -M \end{pmatrix}\begin{pmatrix} V_S \\ V_1 \\ V_2 \\ V_D \\ V_3 \\ V_4 \end{pmatrix}$$

~~Vemo~~

$V_1 = +V_S$ $\qquad V_D = V_3$

$\cancel{N V_1 - M V_2 + (M-N) V_3 = 0}$

Definiramo $V_{L1} = V_1 - V_2$ in $V_{L2} = V_3 - V_4$

3. vrstica: $NV_1 - MV_2 + (M-N)V_3 = 0$

$$\to NV_S - MV_2 + (M-N)V_D = 0 \Rightarrow V_2 = \frac{N}{M}V_S + \left(1 - \frac{N}{M}\right)V_D$$

Podobno: $V_4 = \frac{N}{M}V_D + \left(1 - \frac{N}{M}\right)V_S$

1. vrstica

$$\frac{2e^2}{h} M(\underbrace{V_4 - V_S}_{-(V_1 - V_4) = -V_{H1}}) = -I \qquad V_{H1} = V_1 - V_4$$

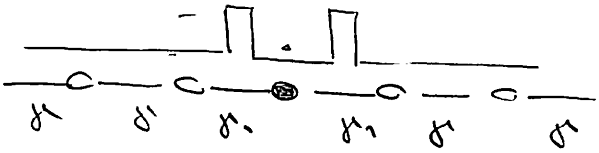
$$\Rightarrow \frac{hI}{2e^2} = MV_{H1} \Leftarrow \text{Hallova prevodnost je torej enaka } \frac{2e^2}{h}M = G_H$$

Longitudinalna prevodnost:

$$V_{L1} = V_1 - V_2 = V_S\left(1 - \frac{N}{M}\right) - \left(1 - \frac{N}{M}\right)V_D = \left(1 - \frac{N}{M}\right)(V_S - V_D)$$

$$\frac{h}{2e^2} I = M(V_2 - V_D) = M\left(\frac{N}{M}V_S - \frac{N}{M}V_D\right) = N(V_S - V_D) =$$

$$= \frac{N}{1 - \frac{N}{M}} V_{L1} \Rightarrow \boxed{G_L = \frac{2e^2}{h}\frac{N}{1 - \frac{N}{M}}}$$



$\gamma_1 \ll \gamma$

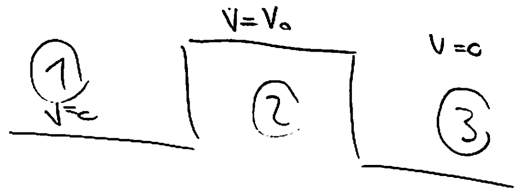
Kvantne pike naredimo iz dveh potencialnih barier. Poskusimo si pogledati kako izgleda kvantna pika v grafenu. To si malo poenostavimo in poskusimo rešiti enostavnejši problem,  v grafenu.

$$c^* \vec{p}\cdot\vec{\sigma}\, \Psi = E \Psi$$ ← Sem noter moramo dodati še potencialno bariero.

- Če bi bariera dovolj široka, je bodo tako atomi A, kot B enakovredni in dodamo diagonalni element, ampak najprej prepišimo za 1D:

$$c^* p_x \sigma_x \Psi = E \Psi.$$

To razpišimo za vsa tri območja



1 :

$$c^* p_x \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_A(x) \\ \Psi_B(x) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_A(x) \\ \Psi_B(x) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -i\hbar c^* \frac{d}{dx} \\ -i\hbar c^* \frac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_A(x) \\ \Psi_B(x) \end{pmatrix} = -i\hbar c^* \begin{pmatrix} \Psi_B'(x) \\ \Psi_A'(x) \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_A(x) \\ \Psi_B(x) \end{pmatrix}$$

Sistem ima translacijsko simetrijo, zato vzamemo nastavek

$$\Psi(x) = e^{ikx} \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix}$$

$$\hbar k c^* \begin{pmatrix} \Psi_B \\ \Psi_A \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -E & \hbar k c^* \\ \hbar k c^* & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix} = 0 \implies \boxed{E = \pm \hbar k c^*}$$

Lastna vektorja sta $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ in $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

$\uparrow$ $E=-\hbar c^* k$ $\qquad$ $\uparrow$ $E=\hbar c^* k$

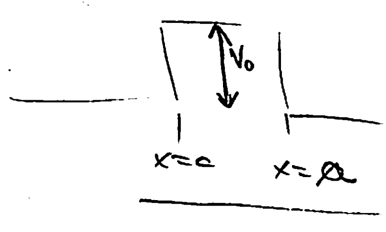
$$\psi_I(x) = \underbrace{e^{ikx}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + R\,e^{-ikx}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}}_{\text{obe tidve imata energijo } \hbar c^*|k|} \Leftarrow \text{splošen nastavek}$$

Za območje III imam $\psi_{III}(x) = t\,e^{ikx}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ (sipanje z leve)

Za območje II pa:

$$\psi_{II}(x) = A\,e^{iqx}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + B\,e^{-iqx}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \leftarrow q = \frac{E-V_0}{\hbar c^*}$$

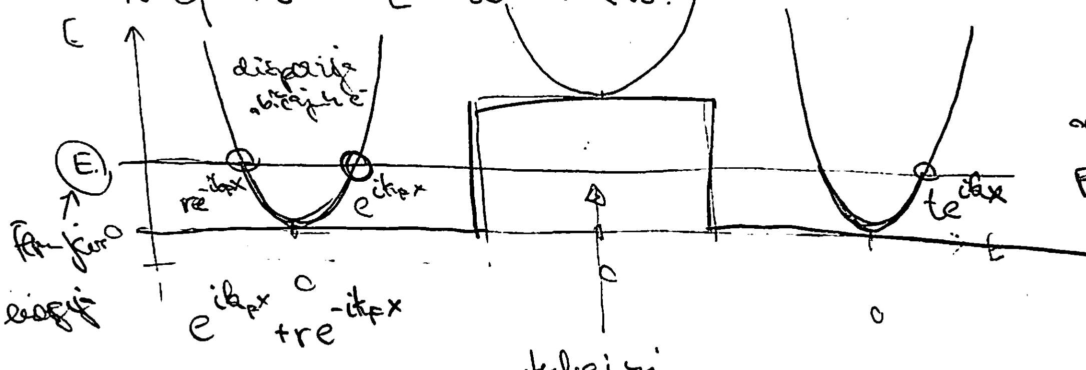
RP: To ni Schrödingerjeva enačba in ni 2. reda, ampak 1. reda, zato rabi robnih le en RP. To je očitno zveznost.



$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad \text{in} \quad \psi_{II}(a) = \psi_{III}(a)$$

Ponovimo:

Naj bo $E = \hbar c^*|k| < V_0$.

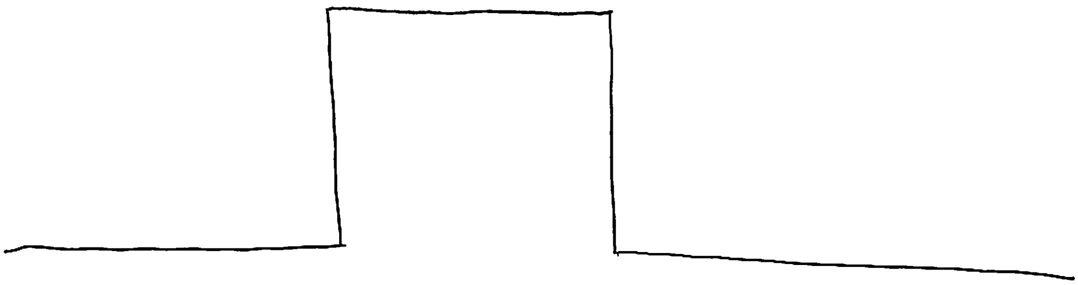


Za prevodnost so odgovorni elektroni pri Fermijevi energiji.

tu pa ni zasedenih stanj, ker so vse nad Fermijevo energijo

Na srednjem območju disperzije ni res korektno narisano, tukaj se še eksponentno naraščajoča in padajoča stanja (lahko bi rekli, da imajo „imaginarni k").

Zdaj poglejmo disperzijo v grafenu (linearna disperzija).



$H\Psi(\vec r) = E\Psi(\vec r)$, $\quad \Psi(\vec r) = \text{pseudo spinor} = \begin{pmatrix}\Psi_1(\vec r)\\ \Psi_2(\vec r)\end{pmatrix}$

$$\Psi(\vec r) = e^{ik_x x}\begin{pmatrix}\Psi_A\\ \Psi_B\end{pmatrix}$$

← x je v smeri „potovanja" elektron

$\Psi = \begin{pmatrix}\Psi_A\\ \Psi_B\end{pmatrix}$ ↑ konstanten spinor

Gledamo primer, ko delec potuje v smeri, ki je pravokotna na barieri.

$$c^* \vec\sigma\cdot\vec p\,\Psi(\vec r) + V(\vec r)\Psi(\vec r) = E\Psi(\vec r)$$

$$c^*\sigma_x(\hbar k)\,\Psi + \underbrace{V(\vec r)}_{V_0}\Psi = E\Psi$$

$$\begin{pmatrix} V_0 & c^*\hbar k \\ c^*\hbar k & V_0 \end{pmatrix}\Psi = E\Psi \Rightarrow \begin{pmatrix} E-V_0 & -c^*\hbar k \\ -c^*\hbar k & E-V_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Psi_A\\ \Psi_B\end{pmatrix} = 0$$

$$E - V_0 = \pm c^*\hbar k$$

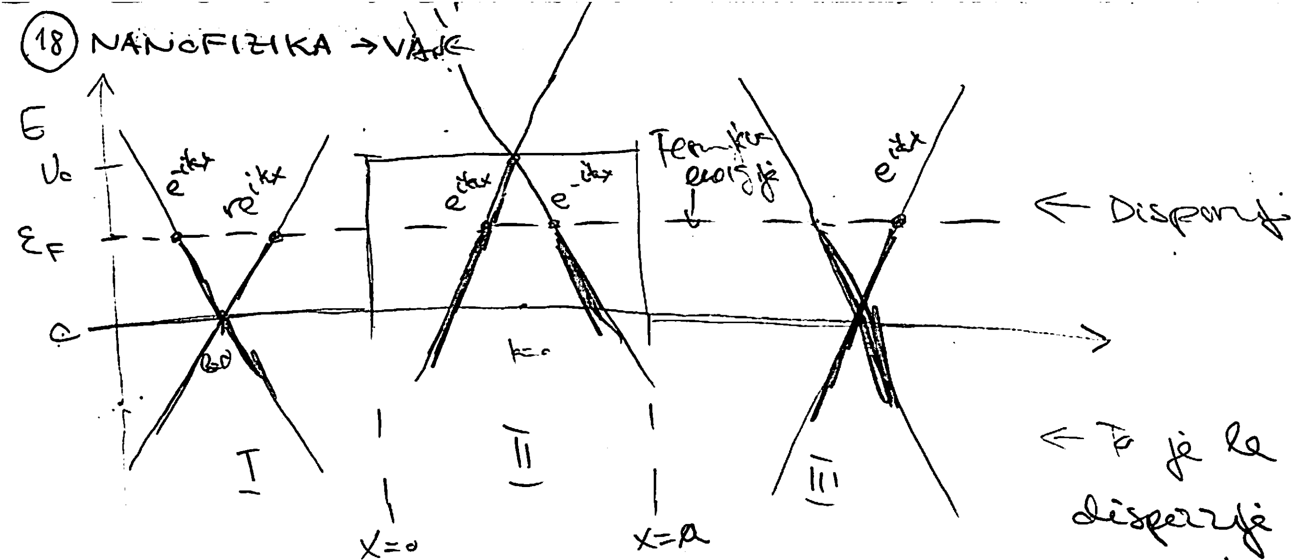
$$E = V_0 + c^*\hbar k \longrightarrow \begin{pmatrix}\Psi_A\\ \Psi_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$E = V_0 - c^*\hbar k \longrightarrow \begin{pmatrix}\Psi_A\\ \Psi_B\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

⇑

linearna disperzija

18 NANOFIZIKA → VAJE



← To je le razvoj disperzije okrog energije 0!

↑
Zasedena stanja so označena z odebeljeno črto. Načeloma bi to šlo do $k \to \pm\infty$, ampak energijski nivoji se ukrivijo, ker razvoj ne drži več za velike $|k|$.

Nastavek na različnih območjih:

I $$\psi_I = e^{ikx}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + r e^{-ikx}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad k = \frac{E}{\hbar c^*}$$

II $$\psi_{II} = A e^{-ik'x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + B e^{+ik'x}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}; \quad k' = \frac{V_0 - E}{\hbar c^*}$$

III $$\psi_{III} = t e^{ikx}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

RP: Valovna funkcija je zvezna

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \qquad \psi_{II}(a) = \psi_{III}(a)$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1+r\\1-r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}A+B\\A-B\end{pmatrix}$$

$$1+r = A+B$$
$$1-r = A-B$$
$$2 = 2A \Rightarrow \boxed{A=1}$$
$$2r = 2B \Rightarrow \boxed{B=r}$$

2. RP:

$$\psi_{II}(a) = e^{-ik'a}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + r e^{ik'a}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} =$$

$$= \psi_{III}(a) = t\, e^{ika}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad e^{-ik'a} + r e^{ik'a} = t e^{ika}$$

$$e^{-ik'a} - r e^{ik'a} = t e^{ika}$$

$$2e^{-ik'a} = 2t e^{ika} \Rightarrow t = e^{-i(k'+k)a} = e^{-i\frac{V_0}{\hbar c^*}a}$$

$$2re^{ik'a} = 0 \Rightarrow \boxed{r = 0}$$

$$\boxed{t = e^{-\frac{iV_0 a}{\hbar c^*}}}$$

Prepustnost je $\boxed{T = |t|^2 = 1}$.

V grafenu potencialne bariere ne motijo gibanja elektronov. Izkaže se, da ~~pa~~ to ni res za vse vpadne kote (obstaja odvisnost prepustnosti od vpadnega kota - mi smo zdaj gledali le poseben primer, ko elektroni vpadajo pravokotno na bariero).

$$\psi_I(x) = e^{ikx}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \psi_{II}(x) = e^{-ik'x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \quad \psi_{III}(x) = e^{ik'x}e^{-\frac{ika}{\hbar c^*}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

Zdi se malo nenavadno, da je hitrost negativna. To ni čisto res, ker je negativna grupna hitrost, k ~~pa~~ je pozitivna.

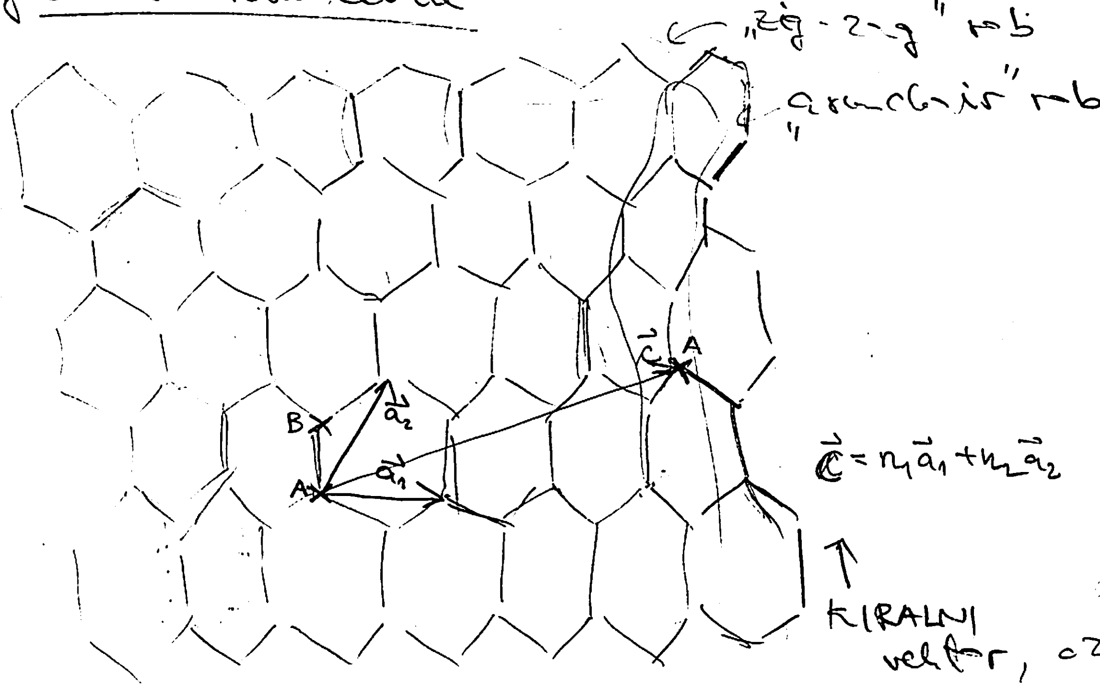
Temu se reče Kleinov paradoks.

(20) NANOFIZIKA – SNOVI

~~Diracova~~ Zgodovinsko so prišli do te težave ~~za~~ pri obravnavi relativističnega sipanja, kjer ~~te ne velja dobro~~ se te rezultat ne ujema z eksperimentom. Očitno je Diracova enačba premala in potrebujemo kvantno teorijo polja.

Pri nas (grafen) nimamo teh težav.

Ogljikove nanocevke



$\vec C = n_1 \vec a_1 + n_2 \vec a_2$ ← poljuben vektor Bravaisove mreže

↑ KIRALNI vektor, označimo (n_1, n_2)

Če je $\vec c = (n_1, n_2)$, ~~ako~~ enolično dobimo nanocevko (predstavljajmo si, da ~~sta~~ A in $A+\vec c$ isti točki – torej vidimo „zvijemo" grafen)

V smeri pravokotno na $\vec C$ je „vzdolž cevke"! Definiramo $\vec T \perp \vec C$, tako da $\vec T$ (translacijski vektor) določa periodičnost.

$$\vec T = t_1 \vec a_1 + t_2 \vec a_2$$

$$\vec c \cdot \vec T = n_1 t_1 a_1^2 + n_2 t_2 a_2^2 + (n_1 t_2 + n_2 t_1)\, \vec a_1 \cdot \vec a_2$$

$\vec a_1 = (a, 0)$

$\vec a_2 = \left(\frac{a}{2}, \frac{a\sqrt3}{2}\right)$

$$\vec C \cdot \vec T = n_1 t_1 a^2 + n_2 t_2 a^2 + (n_1 t_2 + n_2 t_1)\frac{a^2}{2} =$$

$$= t_1 a^2\left(n_1 + \frac{n_2}{2}\right) + t_2 a^2\left(n_2 + \frac{n_1}{2}\right) = 0$$

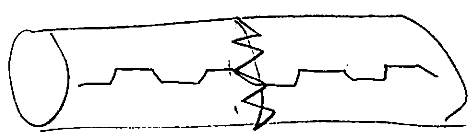
$\Rightarrow t_1 = -n_1 - 2n_2$

$t_2 = 2n_1 + n_2$

$(n_1, n_2) = (2, 2) \Rightarrow (t_1, t_2) = (-6, 6)$ ← to pa ni res, pravi je $(t_1, t_2) = (-1, 1)$

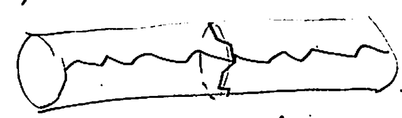
Očitno je $t_1 = -n_1 - 2n_2$, $t_2 = 2n_1 + n_2$, potem pa še delimo z največjim skupnim deliteljem.

$\vec{c} = (n, 0)$

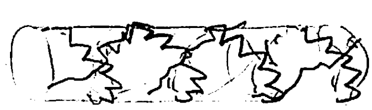


cik-cak nanocevka

$\vec{c} = (n, n)$

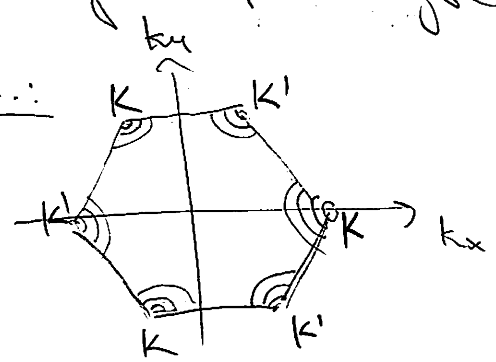


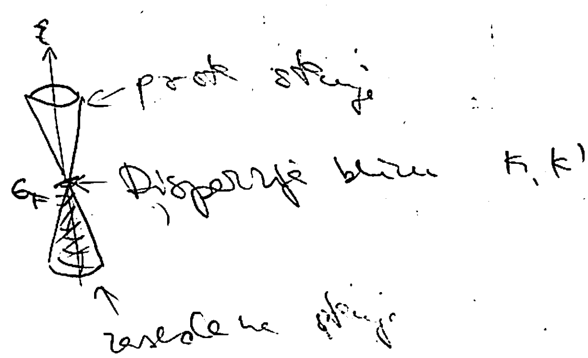
armchair nanocevka

Vse ostale nanocevke so „kiralne" in je nekaj vmes med cikcak in armchair nanocevko. Cikcak in armchair robovi tvorijo spirale 

V resnici nanocevke niso narejene iz zvitega grafena, ampak se jih pripravi s kemičnimi postopki (tudi odkrili so jih pred grafenom).

1. B.C.:





Če se premaknemo za $\vec{C}$, pridemo v začetno točko, zato $e^{i\vec{k}\cdot\vec{C}} = 1$. To je pogoj za $\vec{k}$ (pri grafenu so bili vsi znotraj 1. B.C.)

To zdaj zapišemo malo krajše

$$\begin{pmatrix} q_D \\ q_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{DD} & C_{DE} \\ C_{ED} & C_{EE} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V_D \\ V_E \end{pmatrix} \leftarrow \text{Bločni zapis!}$$

Koliko dela moramo vložiti, da nabijemo vse kondenzatorje? Delo bomo računali tako, da počasi integriramo (tako počasi, da je sistem ves čas v ravnovesju).

$$dA = d\underline{q}^T \underline{V} = d\underline{q}^T \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{q}$$

$$A = \int_0^{q} d\underline{q}'^T \underline{\underline{C}}^{-1} \underline{q}' = \frac{1}{2} \underline{q}^T \overbrace{\underline{\underline{C}}^{-1} \underline{q}}^{\underline{V}} = \frac{1}{2} \underline{q}^T \underline{V}$$

To je pa kar enako energiji sistema. Razdelimo jo lahko na dva dela, energijo zaradi kvantnih pik in ostalega,

$$E = E_D + E_E = \frac{1}{2} \underline{q}_D^T \underline{V}_D + \frac{1}{2} \underline{q}_E^T \underline{V}_E$$

Energijo bi radi izrazili s št. elektronov na pikah in napetostjo na elektrodah. Torej se moramo znebiti količin $\underline{V}_D$ in $\underline{q}_E^T$.

$$\underline{q}_D = \underline{\underline{C}}_{DD} \underline{V}_D + \underline{\underline{C}}_{DE} \underline{V}_E \Rightarrow \underline{V}_D = \underline{\underline{C}}_{DD}^{-1} \underline{q}_D - \underline{\underline{C}}_{DD}^{-1} \underline{\underline{C}}_{DE} \underline{V}_E$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{2} \underline{q}_D^T \underline{\underline{C}}_{DD}^{-1} \underline{q}_D - \frac{1}{2} \underline{q}_D^T \underline{\underline{C}}_{DD}^{-1} \underline{\underline{C}}_{DE} \underline{V}_E + \frac{1}{2} \underline{q}_E^T \underline{V}_E$$

$$\underline{q}_E = \underline{\underline{C}}_{ED} \underline{V}_D + \underline{\underline{C}}_{EE} \underline{V}_E = \underline{\underline{C}}_{ED} \underline{\underline{C}}_{DD}^{-1} \underline{q}_D - \underline{\underline{C}}_{ED} \underline{\underline{C}}_{DD}^{-1} \underline{\underline{C}}_{DE} \underline{V}_E + \underline{\underline{C}}_{EE} \underline{V}_E$$

Minimizirati moramo nebitnu Legendreove transformirane energije, $H = E - \underline{Q_E}^T \underline{V_E}$

$$H = \frac{1}{2} \underline{Q_D}^T \underline{\underline{C_{DD}}}^{-1} (\underline{Q_D} - \underline{\underline{C_{DE}}} \underline{V_E}) - \frac{1}{2} \left(\underline{\underline{C_{ED}}} \underline{\underline{C_{DD}}}^{-1} (\underline{Q_D} - \underline{\underline{C_{DE}}} \underline{V_E}) + \underline{\underline{C_{EE}}} \underline{V_E} \right)^T \underline{V_E}$$

Ta dva člana ništa ne ovise od $\underline{Q_D}$, zato ga ispuštamo

$$H = \frac{1}{2} \underline{Q_D}^T \underline{\underline{C_{DD}}}^{-1} \underline{Q_D} - \frac{1}{2} \underline{Q_D}^T \underline{\underline{C_{DD}}}^{-1} \underline{\underline{C_{DE}}} \underline{V_E} - \frac{1}{2} \underline{Q_D}^T \underline{\underline{C_{DD}}}^{-1} \underline{\underline{C_{DE}}} \underline{V_E} =$$

$$= \frac{1}{2} \underline{Q_D}^T \underline{\underline{C_{DD}}}^{-1} \underline{Q_D} - \underline{Q_D}^T \underline{\underline{C_{DD}}}^{-1} \underline{\underline{C_{DE}}} \underline{V_E}$$

$\underline{\underline{C_{DD}}}^{-T} = \underline{\underline{C_{DD}}}^{-1}$ $\quad \underline{\underline{C_{ED}}}^T = \underline{\underline{C_{DE}}}$

$$\underline{Q_D} = \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix} = -|e| \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix} \equiv -|e| \underline{N_D}$$

$$H = \frac{|e|^2}{2} \underline{N_D}^T \underline{\underline{C_{DD}}}^{-1} \underline{N_D} + |e| \underline{N_D}^T \underline{\underline{C_{DD}}}^{-1} \underline{\underline{C_{DE}}} V_E$$

$$\underline{N_D} = + \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{C_{DD}}} = \begin{bmatrix} C_D & -C_{12} \\ -C_{12} & C_D \end{bmatrix} \qquad C_D = C_{SD} + C_{12} + C_g,$$

$$\underline{\underline{C_{DE}}} = \begin{bmatrix} -C_{SD} & 0 & -C_g & 0 \\ 0 & -C_{SD} & 0 & -C_g \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{C_{DD}}}^{-1} = \frac{1}{C_D^2 - C_{12}^2} \begin{bmatrix} C_D & C_{12} \\ C_{12} & C_D \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{|e|^2}{2} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_D & C_{12} \\ C_{12} & C_D \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{C_D^2 - C_{12}^2} + \frac{|e|}{C_D^2 - C_{12}^2} \begin{bmatrix} N_1 & N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_D & C_{12} \\ C_{12} & C_D \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} -C_{SD} & 0 & -C_g & 0 \\ 0 & -C_{SD} & 0 & -C_g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{SD} \\ 0 \\ U_{g1} \\ U_{g2} \end{bmatrix}$$

(26) NANOFIZIKA → VAJE

Gledamo obnašanje v ravnovesju (minimiziramo energijo), zato postavimo $U_{SD}=0$.

$$H=\frac{|e|^2}{2(C_D^2-C_{12}^2)}\left(C_D(N_1^2+N_2^2)+2C_{12}N_1N_2\right)-\frac{|e|C_g}{C_D^2-C_{12}^2}\Big(N_1(C_DU_{g1}+C_{12}U_{g2})+$$

$$+N_2(U_{g1}C_{12}+C_DU_{g2})\Big)$$

Vpeljemo $\frac{|e|^2C_D}{C_D^2-C_{12}^2}=E_D$; $\frac{|e|^2C_{12}}{C_D^2-C_{12}^2}=E_{12}$, zato

$$H=\frac{E_D}{2}(N_1^2+N_2^2)+E_{12}N_1N_2-\frac{C_g}{|e|}E_DU_{g1}N_1-\frac{C_g}{|e|}E_{12}U_{g2}N_1-$$

$$-\frac{C_g}{|e|}E_{12}U_{g1}N_2-\frac{C_g}{|e|}E_DU_{g2}N_2$$

Vpeljemo brezdimenzijsko napetost

$$\tilde{U}_{g1}=\frac{C_g}{|e|}U_{g1} \quad \text{in} \quad \tilde{U}_{g2}=\frac{C_g}{|e|}U_{g2};$$

pravilna je spodnja

$$\cancel{H=\frac{E_D}{2}(N_1^2+N_2^2)}+E_{12}N_1N_2-\cancel{E_{12}\tilde{U}_{g1}(N_1+N_2)}-\cancel{E_D\tilde{U}_{g2}(N_1+N_2)}=$$

$$=\frac{E_D}{2}(N_1-\tilde{U}_{g1})^2-\frac{E_D}{2}\tilde{U}_{g1}^2+\frac{E_D}{2}(N_2-\tilde{U}_{g2})^2-\frac{E_D}{2}\tilde{U}_{g2}^2+E_{12}(N_1-\tilde{U}_{g1})(N_2-\tilde{U}_{g2})-$$

$$-E_{12}\tilde{U}_{g1}\tilde{U}_{g2}=$$

Obkroženi členi so konstantni, zato jih ne potrebujemo → $\cancel{\frac{E_D}{2}(N_1-\tilde{U}_{g1})^2+\frac{E_D}{2}(N_2-\tilde{U}_{g2})^2}$

$$H=\frac{E_D}{2}(N_1-\tilde{U}_{g1})^2+\frac{E_D}{2}(N_2-\tilde{U}_{g2})^2+E_{12}(N_1-\tilde{U}_{g1})(N_2-\tilde{U}_{g2})$$

Konfiguracija bo stabilna, ko bo veljalo

$$H(N_1,N_2)<H(N_1\pm1,\ N_2\pm1)$$

$$H_{-1,0} = \frac{E_D}{2}(N_1-1-\tilde{U}_{g1})^2 + \frac{E_D}{2}(N_2-\tilde{U}_{g2})^2 + E_{12}(N_1-1-\tilde{U}_{g1})(N_2-\tilde{U}_{g2})$$

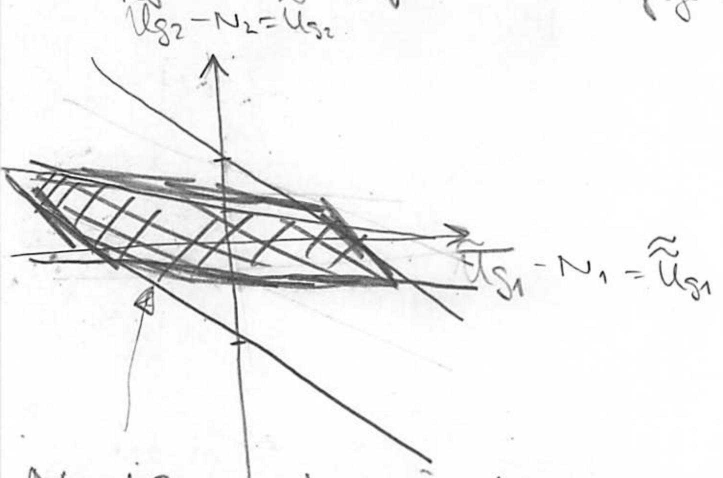
$$\Delta H_{-1,0} = H_{-1,0} - H_{0,0} = -E_D\left(N_1-\tilde{U}_{g1}-\frac{1}{2}\right)+E_{12}(N_2-\tilde{U}_{g2})$$

$$\Delta H_{1,0} = H_{1,0} - H_{0,0} = E_D\left(N_1-\tilde{U}_{g1}+\frac{1}{2}\right)+E_{12}(N_2-\tilde{U}_{g2})$$

$$\Delta H_{0,-1} = -E_D\left(N_2-\tilde{U}_{g2}-\frac{1}{2}\right)-E_{12}(N_1-\tilde{U}_{g1})$$

$$\Delta H_{0,1} = E_D\left(N_2-\tilde{U}_{g2}+\frac{1}{2}\right)+E_{12}(N_1-\tilde{U}_{g1})$$

Veljati mora $\Delta H_{-1,0}>0$, $\Delta H_{1,0}>0$, $\Delta H_{0,-1}>0$, $\Delta H_{0,1}>0$. Zato je meja območja stabilnosti, ko veljajo enakosti.



$$E_{12}\tilde{\tilde{U}}_{g2} + \frac{E_D}{2} + E_D\tilde{\tilde{U}}_{g1} = 0$$

$$-E_{12}\tilde{\tilde{U}}_{g2} + \frac{E_D}{2} - E_D\tilde{\tilde{U}}_{g1} = 0$$

$$\frac{E_D}{2} + E_D\tilde{\tilde{U}}_{g2} + E_{12}\tilde{\tilde{U}}_{g1} = 0$$

$$\frac{E_D}{2} - E_D\tilde{\tilde{U}}_{g2} - E_{12}\tilde{\tilde{U}}_{g1} = 0$$

$E_D > E_{12}$

$$\tilde{\tilde{U}}_{g2} = -\frac{E_D}{E_{12}}\tilde{\tilde{U}}_{g1} - \frac{E_D}{2E_{12}} = -\alpha\tilde{\tilde{U}}_{g1} - \frac{\alpha}{2}$$

$$\tilde{\tilde{U}}_{g2} = -\frac{E_D}{E_{12}}\tilde{\tilde{U}}_{g1} + \frac{E_D}{2E_{12}} = -\alpha\tilde{\tilde{U}}_{g1} + \frac{\alpha}{2}$$

$$\tilde{\tilde{U}}_{g2} = -\frac{E_{12}}{E_D}\tilde{\tilde{U}}_{g1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{\alpha}\tilde{\tilde{U}}_{g1} - \frac{1}{2}$$

$$\tilde{\tilde{U}}_{g2} = -\frac{E_{12}}{E_D}\tilde{\tilde{U}}_{g1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{\alpha}\tilde{\tilde{U}}_{g1} + \frac{1}{2}$$

Na tem območju imamo stabilno konfiguracijo. Izkaže se, da to niso edini; obstajata še dve konfiguraciji, ki dodatno omejita paralelogram.

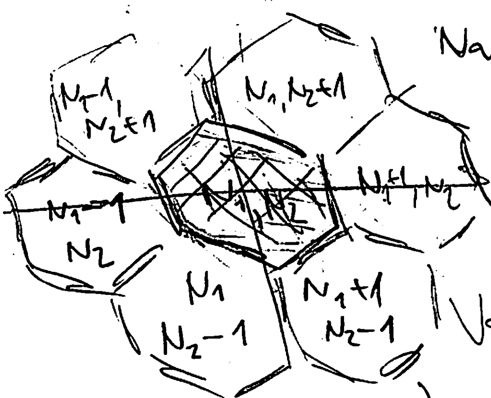
$$\Delta H_{-1,1} = -E_D\left(N_1-\tilde{U}_{g1}-\frac{1}{2}\right)+E_D\left(N_2-\tilde{U}_{g2}+\frac{1}{2}\right)+E_{12}\left(-(N_2-\tilde{U}_{g2})+(N_1-\tilde{U}_{g1})-1\right)$$

$$= E_D(N_2-N_1+\tilde{U}_{g1}-\tilde{U}_{g2}+1) - E_{12}(N_2-N_1+\tilde{U}_{g1}-\tilde{U}_{g2}+1) =$$

$$= (E_D-E_{12})(N_2-N_1+\tilde{U}_{g1}-\tilde{U}_{g2}) = (E_D-E_{12})(\tilde{\tilde{U}}_{g1}-\tilde{\tilde{U}}_{g2}+1)$$

$$\Delta H_{+1,-1} = (E_D-E_{12})(\tilde{\tilde{U}}_{g2}-\tilde{\tilde{U}}_{g1}+1)$$

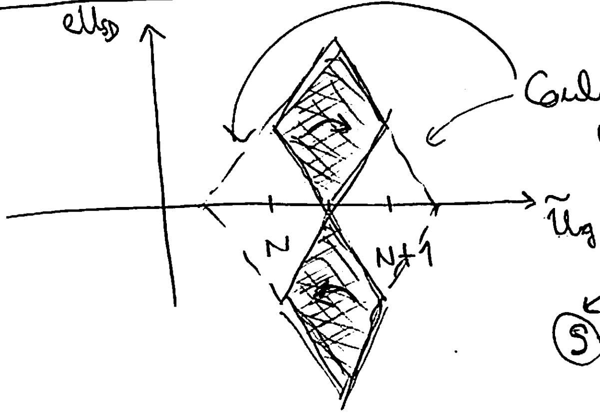
28) NANOFIZIKA → VAJE

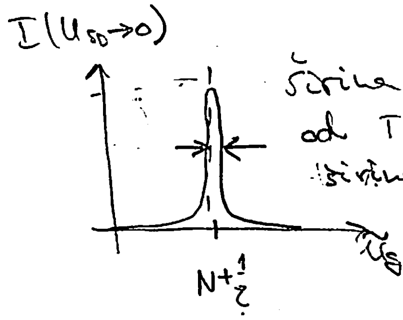


Na tem območju je konfiguracija stabilna.

To se periodično ponavlja!

Vsak trikotnik ustreza eni optimalni konfiguraciji





Širina je odvisna od T (pri T→0 je širina → 0).

S ⇄ QD ⇄ D

$$I = e\,\frac{\Gamma_N^{S\to QD}\,\Gamma_{N+1}^{QD\to D} - \Gamma_N^{D\to QD}\,\Gamma_{N+1}^{QD\to S}}{\Gamma_{N+1}^{QD\to} + \Gamma_N^{\to QD}}$$

$$\Gamma_N^{S\to QD} = \frac{G_S}{e^2}\int dE\, f_S(E)\left\{1 - f_{QD}(E)\right\} =$$ ← To smo zadnjič kar napisali, se pa zdi smiselno.

$$= \frac{G_S}{e^2}\,\frac{-\Delta\mu_S}{e^{-\beta\Delta\mu_S}-1} \qquad \Delta\mu_S = \mu_S - \mu_{QD}(N)$$

se izkaže (integral ni čisto trivialen)

Podobno to izračunamo za ostale prehode:

$$\Gamma_{N+1}^{QD\to D} = \frac{G_D}{e^2}\,\frac{-\Delta\mu_D}{e^{-\beta\Delta\mu_D}-1}$$

$\Delta\mu_D = \mu_{QD}(N) - \mu_D$ ← $\mu_{QD}(N) = H(N+1) - H(N)$ (od zadnjič enkrat)

$$\Gamma_N^{D\to QD} = \frac{G_D}{e^2}\,\frac{\Delta\mu_D}{e^{\beta\Delta\mu_D}-1}$$ ← $\Delta\mu_D = -(-\mu_D)$:)

$$\Gamma_{N+1}^{QD\to S} = \frac{G_S}{e^2}\,\frac{\Delta\mu_S}{e^{+\beta\Delta\mu_S}-1}$$ ← $\Delta\mu_S = -(-\Delta\mu_S)$:)

Ničlo energije tako izberemo, da bo veljalo $\mu_S = \frac{eU_{SD}}{2}$, $\mu_D = -\frac{eU_{SD}}{2}$.

Potem je $\boxed{\mu_{QD}(N) = E_D\,(N + \tfrac{1}{2} - \tilde{U}_g)}$ (tudi to smo že enkrat ugotovili).

Oglejmo si limito $T \to 0$ (in majhen U_{SD}?). Zaradi enostavnosti postavimo $G_S = G_D$ in vpeljimo $F(x) = \dfrac{x}{e^{\beta x}-1}$.

$\mu_{QD} \equiv \mu_{QD}(N)$

Potem je

$$\Gamma_N^{S\to QD} = \frac{G_D}{e^2} F(-\Delta\mu_S) = \frac{G_D}{e^2} F\left(-\frac{eU_{SD}}{2} + \mu_{QD}\right)$$

$$\Gamma_{N+1}^{QD\to D} = \frac{G_D}{e^2} F(-\Delta\mu_D) = \frac{G_D}{e^2} F\left(-\frac{eU_{SD}}{2} - \mu_{QD}\right)$$

$$\Gamma_{N+1}^{QD\to S} = \frac{G_D}{e^2} F(\Delta\mu_S) = \frac{G_D}{e^2} F\left(\frac{eU_{SD}}{2} - \mu_{QD}\right)$$

$$\Gamma_N^{D\to QD} = \frac{G_D}{e^2} F(\Delta\mu_D) = \frac{G_D}{e^2} F\left(+\frac{eU_{SD}}{2} + \mu_{QD}\right)$$

$$I = e\,\frac{\Gamma_N^{S\to QD}\,\Gamma_{N+1}^{QD\to D} - \Gamma_N^{D\to QD}\,\Gamma_{N+1}^{QD\to S}}{\Gamma_{N+1}^{QD\to} + \Gamma_N^{\to QD}} =$$

$\frac{eU_{SD}}{2}$ = majhen in razvijemo do prvega reda

ničti red je enak 0

$$= \frac{G_D}{e} \frac{\left[F'(\mu_{QD})\cdot F(-\mu_{QD})\left(-\frac{eU_{SD}}{2}\right) + F'(-\mu_{QD})F(\mu_{QD})\left(-\frac{eU_{SD}}{2}\right) - \left\{F(-\mu_{QD})F'(\mu_{QD})\cdot\frac{eU_{SD}}{2} + F'(-\mu_{QD})F(\mu_{QD})\cdot\frac{eU_{SD}}{2}\right\}\right]}{2F(-\mu_{QD}) + 2F(\mu_{QD})} =$$

zgoraj je 1. red, zato lahko spodaj pa ničti red

$$= \frac{G_D}{e}\frac{\{F'(\mu_{QD})F(-\mu_{QD}) + F(\mu_{QD})F'(-\mu_{QD})\}\left(-2\frac{eU_{SD}}{2}\right)}{2\left(F(-\mu_{QD}) + F(\mu_{QD})\right)} =$$

$$= -\frac{G_D U_{SD}}{2}\,\frac{F'(\mu_{QD})F(-\mu_{QD}) + F(\mu_{QD})F'(-\mu_{QD})}{F(-\mu_{QD}) + F(\mu_{QD})}$$

$$F'(x) = \frac{1}{e^{\beta x}-1} - \frac{\beta x e^{\beta x}}{(e^{\beta x}-1)^2} = \frac{F(x)}{x} - \frac{\beta x}{\left(e^{\frac{\beta x}{2}} - e^{-\frac{\beta x}{2}}\right)^2} =$$

$$= \frac{F(x)}{x} - \frac{\beta x}{4\sinh^2\left(\frac{\beta x}{2}\right)}$$

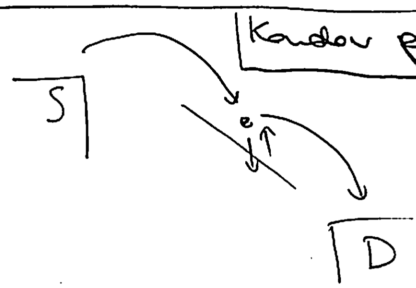
$$\Rightarrow I = -\frac{G_S U_{SD}}{2}\,\frac{\left(\cancel{\frac{F(\mu_{QD})}{\mu_{QD}}} - \frac{\mu_{QD}\beta}{4\,\mathrm{ch}^2(\frac{\beta\mu_{QD}}{2})}\right)F(-\mu_{QD}) + F(\mu_{QD})\left(\cancel{\frac{F(-\mu_{QD})}{-\mu_{QD}}} + \frac{\mu_{QD}\beta}{4\,\mathrm{ch}^2(\frac{\beta\mu_{QD}}{2})}\right)}{F(\mu_{QD}) + F(-\mu_{QD})} =$$

$$= -\frac{G_S U_{SD}}{2}\,\frac{\left(-F(-\mu_{QD}) + F(\mu_{QD})\right)\frac{\mu_{QD}\beta}{4\,\mathrm{ch}^2(\frac{\beta\mu_{QD}}{2})}}{F(\mu_{QD}) + F(-\mu_{QD})} =$$

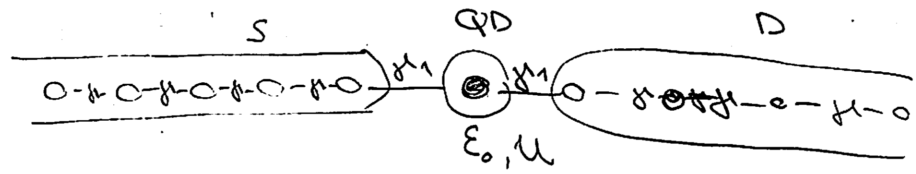
izkaže se

$$= \frac{G_S U_{SD}\,\mu_{QD}\beta}{8\,\mathrm{ch}^2(\frac{\beta\mu_{QD}}{2})}\,\underbrace{\frac{F(-\mu_{QD}) - F(\mu_{QD})}{F(-\mu_{QD}) + F(\mu_{QD})}}_{\mathrm{th}\,\frac{\beta\mu_{QD}}{2}} = \frac{G_S}{4}U_{SD}\,\frac{\beta\mu_{QD}}{\mathrm{sh}(\beta\mu_{QD})}$$

Kondov pojav



Dodamo člen $U n_\uparrow n_\downarrow$



$U n_\uparrow n_\downarrow$ – povečanje energije, ko sta dva e^- na kvantni piki

$\varepsilon_0 n + U n_\uparrow n_\downarrow$; $n_\uparrow = c_\uparrow^+ c_\uparrow$

$n_\downarrow = c_\downarrow^+ c_\downarrow$ $\quad n = n_\uparrow + n_\downarrow$

matrični elementi za skok S → QD in D → QD

$$\begin{cases} -\gamma_1\left(c_\uparrow^+ c_{S1\uparrow} + c_\downarrow^+ c_{S1\downarrow} + h.c.\right) \\ -\gamma_1\left(c_\uparrow^+ c_{D1\uparrow} + c_\downarrow^+ c_{D1\downarrow} + h.c.\right) \end{cases}$$

$$H_S = \sum_{i\sigma} -\gamma\, c^+_{Si\sigma}\, c_{S\,i+1\,\sigma} + h.c.$$

$H_D =$ podobno

$$H_{QD} = \varepsilon_0 \hat{n} + U \hat{n}_\uparrow \hat{n}_\downarrow$$

Če je $U n_\uparrow n_\downarrow = 0$, lahko poiščemo enoelektronsko valovno funkcijo in je problem enostaven (smo že rešili).

Ko smo računali naslov enačbo, smo člena H^{QDESD}, H^{QDESS} obravnali kot perturbacijo prvega reda, „~~cotunneling~~" je perturbacija drugega reda, Kondov pojav pa je „neskončno členov". Perturbacijsko zato tega ne bomo počeli. Zato gremo po drugi poti in upoštevamo člen $U n_\uparrow n_\downarrow$ kot perturbacijo prvega reda.

To se počne s formalizmom Feynmanovih diagramov, a tega ne znamo. Zato bomo člen $U n_\uparrow n_\downarrow$ upoštevali v približku povprečnega polja.

V analogiji z Isingovim modelom to zapišemo:

$$\Rightarrow U n_\uparrow n_\downarrow \approx U\langle n_\uparrow\rangle n_\downarrow + U n_\uparrow \langle n_\downarrow\rangle - U\langle n_\uparrow\rangle\langle n_\downarrow\rangle$$

V odsotnosti magnetnega polja sta obe smeri enakovredni, zato $\langle n_\uparrow\rangle = \langle n_\downarrow\rangle = \frac{\langle n\rangle}{2}$. To ni ~~edina~~ rešitev, je pa prava (tiste z $\langle n_\uparrow\rangle != \langle n_\downarrow\rangle$ ni prava). Člen $U\langle n_\uparrow\rangle\langle n_\downarrow\rangle$ izpustimo, ker gre le za ~~konstanten~~ premik energije) in dobimo

$$U n_\uparrow n_\downarrow \approx U \frac{\langle n\rangle}{2}(n_\downarrow + n_\uparrow) = U\frac{\langle n\rangle}{2}\hat{n}$$

in

$$\boxed{H^{QD} = \left(\varepsilon_0 + U\frac{\langle n\rangle}{2}\right)\hat{n}}$$

Ta nivo se postavi na ε_F, zato omogoči tok v prepovedanem območju.

Nimamo več interakcije, imamo le popravek k energiji (operator smo linearizirali).

Zdaj lahko kar prepišemo rešitev za kvantno piko brez interakcije (z začetka semestra),

$$T(E) = \frac{\frac{\Gamma^2}{4}}{(E-\varepsilon_0)^2 + \frac{\Gamma^2}{4}}; \quad \Gamma = \frac{4\gamma_1^2}{\gamma}$$

(2.2) NANOFIZIKA → VAJE

$$-\gamma_1\left(e^{-ika}+re^{ika}\right)-\gamma_1 t e^{ika}+\varepsilon_c\psi_c=E\psi_c$$

$$-\gamma t e^{2ika}-\gamma_1\psi_c=Et\,e^{ika}$$

$$-\gamma\left(e^{-2ika}+re^{2ika}\right)-\gamma_1\psi_c=E\left(e^{-ika}+re^{ika}\right)$$

to rešimo

$$\psi_c=-\frac{2i\gamma_1}{E-\varepsilon_c+i\frac{2\gamma_1^2}{\gamma}}=-\frac{2i\gamma_1}{(E-\varepsilon_c)+i\frac{\Gamma}{2}}\,;\quad \Gamma=\frac{4\gamma_1^2}{\gamma}$$

Vsa stanja dobimo tako da upoštevamo $E<0$. $E=\varepsilon_F$ je zadnje zasedeno stanje. Računati moramo tako, da integriramo od spodnjega roba pasu do fermijeve energije. ($\varepsilon_F=0$)

$$\langle n\rangle \overset{T=0}{=} 2\int_{-2\gamma}^{0} dE\,|\psi_0|^2\, g(E)$$

spin

spodnji rob pasu

gostota stanj

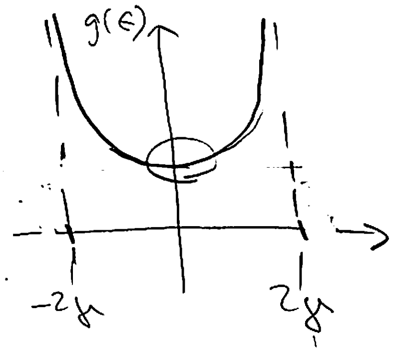
$$E=-2\gamma\cos(ka)$$

$$g(E)=2\frac{1}{L}\frac{dN}{dE}=\frac{1}{L}\,\frac{dk}{\frac{2\pi}{L}}\,\frac{1}{dE}=\frac{1}{2\pi}\frac{dk}{dE}$$

$$\frac{dE}{dk}=2\gamma a\sin(ka)$$

$$\Rightarrow \frac{dk}{dE}=\frac{1}{2\gamma a\sin(ka)}$$

Na obeh robovih pasu energije divergira!



Zanima nas obnašanje na sredini, zato razvijemo okoli $\underbrace{k=\frac{\pi}{2a}}_{\epsilon=0} \to \sin\frac{\pi}{2a}a \approx 1$

$$\underline{\underline{g(\epsilon)}} = \frac{1}{2\pi}\,\frac{2}{2a\gamma} = \underline{\underline{\frac{1}{2\pi a\gamma}}}$$

$$\Rightarrow \langle n\rangle = \frac{2}{2\pi a\gamma}\int_{-2\gamma}^{0} d\epsilon \left|-\frac{2i\gamma_1}{\epsilon-\epsilon_0+i\frac{\Gamma}{2}}\right|^2 = \frac{1}{\pi a\gamma}\int_{-2\gamma}^{0}\frac{4\gamma_1^2}{(\epsilon-\epsilon_0)^2+\frac{\Gamma^2}{4}}\,d\epsilon =$$

$$= \frac{2}{\pi a}\int_{-2\gamma}^{0}\frac{\frac{\Gamma}{2}}{(\epsilon-\epsilon_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}\,d\epsilon$$

Nekje smo se očitno zmotili ker enote niso ok $\left(\frac{1}{\text{dolžina}}\,\frac{\text{energija}^2}{\text{energija}^2} = \frac{1}{\text{dolžina}}\right)$, imamo en a preveč.

Enote se ne ujemajo, ker bi potrebovali $\frac{1}{\sqrt{L}}$ spredaj v nastavku ψ.

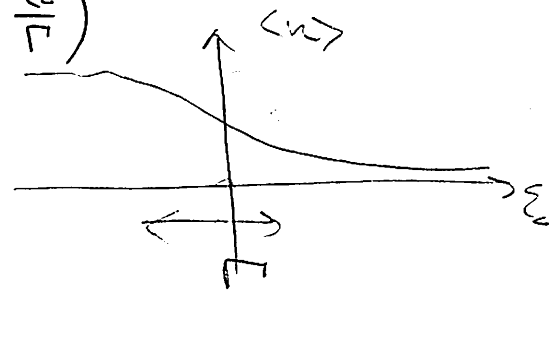
~~Zato~~

Izkaže se, da dobimo

$$\langle n\rangle = \frac{2}{\pi}\int_{-2\gamma}^{0}\frac{\frac{\Gamma}{2}}{(\epsilon-\epsilon_0)^2+\left(\frac{\Gamma}{2}\right)^2}\,d\epsilon$$

Predpostavimo: $\Gamma \ll \gamma$ (torej $\gamma_1 \ll \gamma$). To smo že prej implicitno predpostavili (sicer tudi razvoj ne bi deloval).

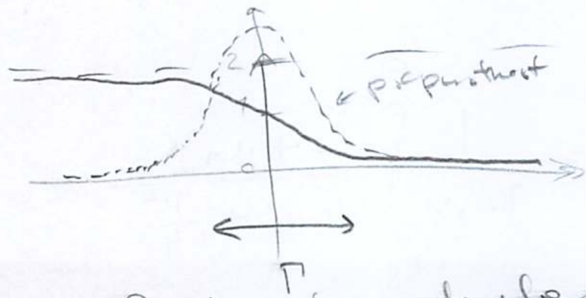
Izkaže se $\langle n\rangle = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\frac{\epsilon_0}{\Gamma}\right)$



34) NANOFIZIKA → VAJE

To je rezultat za kvantno piko brez interakcije; ε_0 je neodvisen od $\langle n \rangle$. Poglejmo, kaj se zgodi, če dodamo interakcijo. ε_0 kontroliramo z napetostjo U_g.

Če je $\varepsilon_F = 0$, je zasedenost polovična



$$T(\epsilon) = \frac{\frac{\Gamma^2}{4}}{(\epsilon-\varepsilon_0)^2+\frac{\Gamma}{4}}$$

Prvi red perturbacije:

$$\langle n \rangle = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \mathrm{arctg}\,\frac{\varepsilon_0 + U\overbrace{\frac{\langle n\rangle}{2}}^{\in[0,U)}}{\Gamma}\right)$$

Oglejmo si limitne primere

$\varepsilon_0 \to \infty$ $\qquad \langle n \rangle = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\varepsilon_0 \to -\infty$ $\qquad \langle n \rangle = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right) = 2$

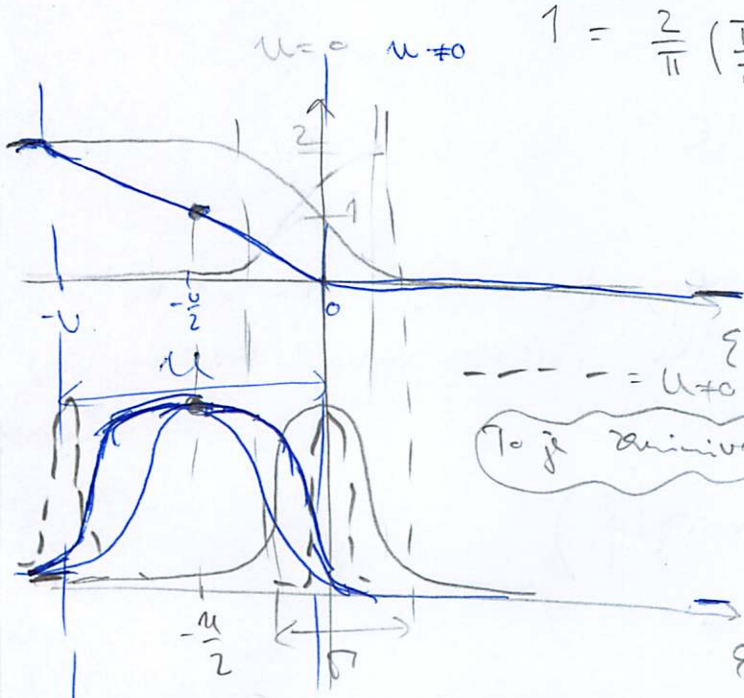
} je isto, kot brez člena $U\frac{\langle n \rangle}{2}$

Kdaj bo $\langle n \rangle = 1$?

$$1 = \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \underbrace{\mathrm{arctg}\,\frac{\varepsilon_0 + U\frac{1}{2}}{\Gamma}}_{=0}\right) \Rightarrow \mathrm{arctg}\,\frac{\varepsilon_0 + U\frac{1}{2}}{\Gamma} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon_0 = -\frac{U}{2} \Leftrightarrow \langle n \rangle = 1}$$

$T = $ maks., ko ve



- - - - = $U \neq 0$ + tuneliranje je 1. reda

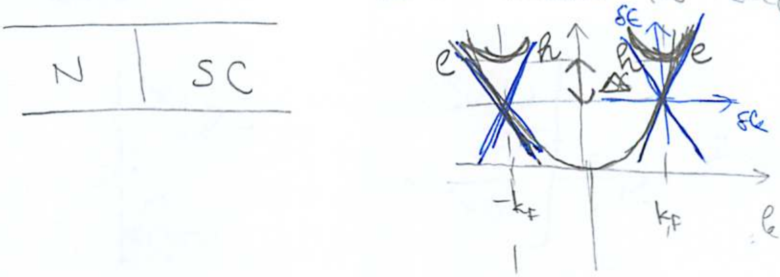
To je zanimivo le za $U \gg \Gamma$!

Zdaj bo prevodnost ne celotnem diamantu velika, ker se Ω razširi v Coulombsko blokado

QD N	E	
0	0	$\mu_0 = \varepsilon_0$
1	ε_0	
2	$2\varepsilon_0 + U$	$\mu_1 = \varepsilon_0 + U$

Ta vrh, ki je imel prej širino Γ, bo zdaj imel širino nU.

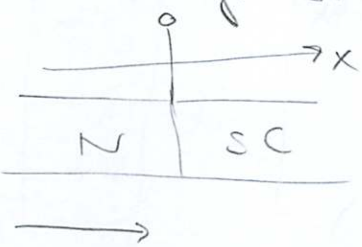
Stik med navadno kovino in superprevodnikom



— linearizirana disperzija

$\Delta \ll E_F$
↑
energijska reža zaradi superprevodnosti

Poglejmo, kaj se zgodi, če je $\delta E > \Delta$ (torej je energija vpadnega elektrona večja od energijske reže).



e^- z valovno funkcijo $\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} e^{i\delta k x}$

Odbije se vrzel z negativno disperzijo, zato je valovna funkcija odbite vrzeli enaka

$$r_{e\to h}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} e^{-i\delta k x}$$

Videli bomo, da je ta člen enak 0 (zadnjič smo to pa res prišli).

↓

V principu se elektron lahko odbije tudi kot elektron, $r_{e\to e}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} e^{-i\delta k x}$.

Celotna valovna funkcija za $x<0$ je torej enaka

$$\Psi(x<0) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} e^{i\delta k x} + r_{e\to h}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} e^{-i\delta k x} + r_{e\to e}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} e^{-i\delta k x}$$

V superprevodniku nimamo elektronov in vrzeli, temveč linearno kombinacijo obeh (zato vektorji niso $\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$; ampak nekaj drugega :)).

$$\Psi(x>0) = t_{e\to e}\begin{bmatrix}\psi_e^+\\ \psi_h^+\end{bmatrix} e^{i\delta k' x} + t_{e\to h}\begin{bmatrix}\psi_e^-\\ \psi_h^-\end{bmatrix} e^{i\delta k' x}$$

to ustreza stanju pri $+k_F$

↑ tale je bolj podobno e^- kot h

lastni vektor hamiltoniana pri $-k_F$

↑ ta je bolj podobno h kot e^-

(36) NANOFIZIKA – VAJE

$$H_{+k_F} = \begin{bmatrix} -i\hbar v_F \partial_x & \Delta e^{i\varphi} \\ \Delta e^{-i\varphi} & i\hbar v_F \partial_x \end{bmatrix}; \qquad H_{-k_F} = \begin{bmatrix} i\hbar v_F \partial_x & \Delta e^{i\varphi} \\ \Delta e^{-i\varphi} & -i\hbar v_F \partial_x \end{bmatrix}$$

$\delta E > \Delta$

Rešujeme Schrödingerjevo enačbo.

$x < 0$

$$\begin{bmatrix} -i\hbar v_F \partial_x & 0 \\ 0 & i\hbar v_F \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{i\delta k x} \\ 0 \end{bmatrix} = \delta E \begin{bmatrix} e^{i\delta k x} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad -i\hbar v_F \, i\delta k = \delta E$$

$$\delta E = \hbar v_F \delta k; \quad \delta k = \frac{\delta E}{\hbar v_F}$$

$\Leftarrow$ ~~to~~ je ekvivalentno rezultatu $k = \sqrt{\frac{2\epsilon E}{\hbar}}$ pri korakih 1, le da je tam izraz drugačen

To velja za vse ~~tri~~ člene pri $x < 0$.

Podobno pogledamo pri $x > 0$ (na superprevodni strani):

$$\begin{bmatrix} -i\hbar v_F \partial_x & \Delta e^{i\varphi} \\ \Delta e^{-i\varphi} & i\hbar v_F \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_e^+ \\ \psi_h^+ \end{bmatrix} e^{i\delta k' x} = \delta E \begin{bmatrix} \psi_e^+ \\ \psi_h^+ \end{bmatrix} e^{i\delta k' x}$$

$$\begin{bmatrix} \hbar v_F \delta k' - \delta E & \Delta e^{i\varphi} \\ \Delta e^{-i\varphi} & -\hbar v_F \delta k' - \delta E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_e^+ \\ \psi_h^+ \end{bmatrix} = 0$$

$$(\hbar v_F \delta k' - \delta E)(-\hbar v_F \delta k' - \delta E) - \Delta^2 = 0$$

$$-(\hbar v_F \delta k')^2 + \delta E^2 - \Delta^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hbar v_F \delta k' = \pm\sqrt{\delta E^2 - \Delta^2}$$

$$\boxed{\delta k' = \pm \frac{\sqrt{\delta E^2 - \Delta^2}}{\hbar v_F}}$$

Izkaže se, da ta dva naša nastavka ($\Psi(x>0)$, $\Psi(x<0)$) nista v redu. Rekli smo $\Psi(x) = e^{ik_Fx}\tilde{\Psi}(x)$. Na nekem stopnji smo e^{ik_Fx} „odstranili" in ga nismo „prišteli", zato smo dobili le prve odvode. Celotna funkcija bi morala biti $\Psi(x) = A\, e^{ik_Fx}\tilde{\Psi}_+(x) + B\, e^{-ik_Fx}\tilde{\Psi}_-(x)$. Celotna Schrödingerjeva enačba je torej enaka

$$\begin{bmatrix} H_{+k_F} & \\ & H_{-k_F} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_+(x) \\ \tilde{\Psi}_-(x) \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \tilde{\Psi}_+ \\ \tilde{\Psi}_- \end{bmatrix}.$$

Vsi naši vektorji iz prejšnje strani bi morali biti štiridimenzionalni

$$\Psi(x<0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\delta kx} + r_{e\to h} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\delta kx} + r_{e\to e} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-i\delta kx},$$

$$\Psi(x>0) = t_{e\to e} \begin{bmatrix} \psi_e^+ \\ \psi_h^+ \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} e^{i\delta k' x} + t_{e\to h} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \psi_e^- \\ \psi_h^- \end{bmatrix} e^{i\delta k' x}$$

Tega se moramo zavedati :) (tisti 2D vektorji niso mišljeni v istem vektorskem prostoru in jih ne moremo kar seštevati!).

Robni pogoj: $\tilde{\Psi}(-0) = \tilde{\Psi}(+0) \implies 1 = t_{e\to e}\, \psi_e^+$

$$r_{e\to h} = t_{e\to e}\, \psi_h^+$$

$$r_{e\to e} = t_{e\to h}\, \psi_e^-$$

$$0 = t_{e\to h}\, \psi_h^-$$

Zdaj hitro vidimo $t_{e\to h} = 0$, zato tudi $r_{e\to e} = 0$. To je bilo pričakovano, saj v hamiltonianu nimamo členov, ki bi sklapljali e,h pri $+k_F$ in $-k_F$ (to pa ne bi veljalo, če stik ne bi bil idealen in bi bila umes sipalna matrika).

Zdaj izračunajmo še lastne vektorje (prej smo le lastne vrednosti).

$$(\hbar v_F \delta k^2 - \delta E)\,\psi_e^+ + \Delta e^{i\varphi}\psi_h^+ = 0$$

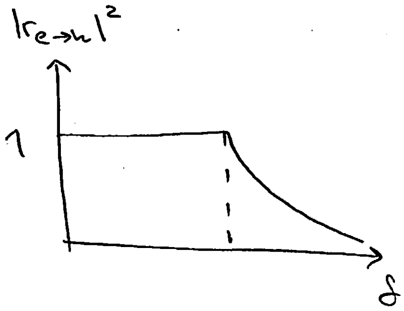
"+":

$$(\sqrt{\delta E^2-\Delta^2} - \delta E)\,\psi_e^+ + \Delta e^{i\varphi}\psi_h^+ = 0 \qquad \frac{\psi_h^+}{\psi_e^-} = \frac{\delta E - \sqrt{\delta E^2-\Delta^2}}{\Delta e^{i\varphi}}$$

Vpeljemo $\frac{\delta E}{\Delta} = \mathrm{ch}\,\beta$ (podobno smo že na predavanjih).

$$\sqrt{\left(\frac{\delta E}{\Delta}\right)^2 - 1} = \mathrm{sh}\,\beta \ ; \quad \mathrm{ch}\,\beta - \mathrm{sh}\,\beta = e^{-\beta}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\psi_h^+}{\psi_e^-} = e^{-\beta - i\varphi}} \qquad r_{e\to h} = \overset{\text{iz R.P.}}{\frac{\psi_h^+}{\psi_e^-}} \Rightarrow \underline{\underline{|r_{e\to h}|^2}} = e^{-2\beta} = \underline{\underline{e^{-2\,\mathrm{arch}\frac{\delta E}{\Delta}}}}$$



Primer CNOT operacije

$\varepsilon_1 \quad \gamma \quad \varepsilon_2$

U U

U = dodatna energija za dva elektrona.

$\varepsilon_{1,2}$ = energija, ki jo čuti vsak elektron

$$H = \underbrace{U(n_{1\uparrow}n_{1\downarrow} + n_{2\uparrow}n_{2\downarrow})}_{\text{dodatna energija zaradi 2 } e^- \text{ na piki}} + \underbrace{\varepsilon_1(n_{1\uparrow}+n_{1\downarrow}) + \varepsilon_2(n_{2\uparrow}+n_{2\downarrow})}_{\text{energija, ki jo čuti vsak } e^-} - \gamma\sum_{\sigma=\{\uparrow,\downarrow\}}(c_{1\sigma}^+c_{2\sigma} + c_{2\sigma}^+c_{1\sigma})$$

Dimenzija Hilbertovega prostora za 1 piko je 4, za dve piki pa 16.

n_1	n_2
0	0
1	0
0	1
1	1
1	2
2	1
2	2

Obstajajo konfiguracije napetosti, za katere je $(n_1,n_2)=(1,1)$ optimalna.

Konfiguracija (1,1) ima 4-kratno degeneracijo, ↑↑, ↑↓, ↓↑, ↓↓

Predpostavimo $\varepsilon_1=\varepsilon_2$ in $\gamma=0$. Vse 4 konfiguracije imajo enako energijo. Če postavimo $\gamma\neq 0$, ne bomo imeli več enake energij, saj skokov v stanju ↑↑ in ↓↓ ne bo, v ↑↓, ↓↑ pa bo. Energiji stanj ↑↑ in ↓↓ bosta višji, ker imata elektrona manj „prostora" za gibanje kot takrat ko so skoki dovoljeni (energija neskončne potencialne jame $\overset{a}{\longleftrightarrow}$ je $E_1=\frac{\hbar^2\pi^2}{2ma^2}$ => več kot je prostora, nižja bo energija).

$$\uparrow\ \ \downarrow\ \longrightarrow\ \uparrow\downarrow\ \ \bigcirc\ \longrightarrow\ \downarrow\ \ \uparrow$$

To je proces drugega reda in ga bomo obravnavamo kot perturbacijo (perturbacija hamiltoniana, ko skokov ni). Izkaže se, da je to efektivno spinska interakcija, $H=+\frac{4\gamma^2}{U}\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2$ ← antiferomagnetni Heisenbergov hamiltonian.

to velja le za podprostor $(N_1,N_2)=(1,1)$

To je degenerirana perturbacija, zato moramo računati determinanto 16×16 matrike. Moteči člen

$$V=-\gamma\sum_{\sigma=\{\uparrow,\downarrow\}}\left(c^\dagger_{1\sigma}c_{2\sigma}+c^\dagger_{2\sigma}c_{1\sigma}\right)$$

$$V|\uparrow,\downarrow\rangle=-\gamma|\uparrow\downarrow,\ \rangle-\gamma|\ ,\uparrow\downarrow\rangle$$ ← v prvem redu perturbacije je tak matrični element enak 0

Vsi matrični elementi so v 1. redu perturbacije enaki 0. Delati moramo degenerirano perturbacijo 2. reda.

$|m\rangle \quad m=1\ldots M$

1. red $\langle m|V|m'\rangle$ + diagonalizacija matrike

2. red $$\sum_{n\neq m}\frac{\langle m|V|n\rangle\langle n|V|m'\rangle}{E_m^0-E_n^0}$$ + diagonalizacija matrike

(40) NANOFIZIKA → VAJE

Za vsa vmesna stanja je $E_m^0 - E_n^0 = -U$. Za matrične elemente potrebujemo II. kvantizacijo.

$$|\uparrow,\downarrow\rangle = c_{1\uparrow}^+ c_{2\downarrow}^+ \underset{\text{Fockov vakuum}}{|0\rangle}$$

$$|\uparrow\downarrow,\ \rangle = c_{1\uparrow}^+ c_{1\downarrow}^+ |0\rangle$$

$$V|\uparrow\downarrow\rangle = -\gamma \sum_\sigma \left(c_{1\sigma}^+ c_{2\sigma} + c_{2\sigma}^+ c_{1\sigma}\right) c_{1\uparrow}^+ c_{2\downarrow}^+ |0\rangle =$$

$$\{c_{1\downarrow}, c_{1\uparrow}\} = 0;\ \{c_{2\uparrow}, c_{2\downarrow}^+\} = 0$$

$$= -\gamma \left(c_{1\downarrow}^+ c_{2\downarrow} + c_{2\uparrow}^+ c_{1\uparrow}\right) c_{1\uparrow}^+ c_{2\downarrow}^+ |0\rangle =$$

$$= -\gamma c_{1\downarrow}^+ c_{2\downarrow} c_{1\uparrow}^+ c_{2\downarrow}^+ |0\rangle - \gamma c_{2\uparrow}^+ c_{1\uparrow} c_{1\uparrow}^+ c_{2\downarrow}^+ |0\rangle =$$

$$= -\gamma c_{1\uparrow}^+ c_{1\downarrow}^+ \underbrace{c_{2\downarrow} c_{2\downarrow}^+ |0\rangle}_{|0\rangle} - \gamma c_{2\uparrow}^+ c_{2\downarrow}^+ \underbrace{c_{1\uparrow} c_{1\uparrow}^+ |0\rangle}_{|0\rangle} =$$

$$= -\gamma c_{1\uparrow}^+ c_{1\downarrow}^+ |0\rangle - \gamma c_{2\uparrow}^+ c_{2\downarrow}^+ |0\rangle = -\gamma |\uparrow\downarrow, 0\rangle - \gamma |0, \uparrow\downarrow\rangle$$

Podobno dobimo $V|\downarrow\uparrow\rangle = -\gamma \left[c_{1\uparrow}^+ c_{2\uparrow} + c_{2\downarrow}^+ c_{1\downarrow}\right] c_{1\downarrow}^+ c_{2\uparrow}^+ |0\rangle =$

$$= +\gamma c_{1\uparrow}^+ c_{1\downarrow}^+ \underbrace{c_{2\uparrow} c_{2\uparrow}^+ |0\rangle}_{|0\rangle} - \gamma c_{2\downarrow}^+ c_{2\uparrow}^+ \underbrace{c_{1\downarrow} c_{1\downarrow}^+ |0\rangle}_{|0\rangle} = \gamma c_{1\uparrow}^+ c_{1\downarrow}^+ |0\rangle + \gamma c_{2\uparrow}^+ c_{2\downarrow}^+ |0\rangle =$$

$$= +\gamma |\uparrow\downarrow, 0\rangle + \gamma |0, \uparrow\downarrow\rangle$$

Obe možni vmesni stanji sta: $|\uparrow\downarrow, 0\rangle,\ |0, \uparrow\downarrow\rangle$

Stanji $|\uparrow,\uparrow\rangle$ in $|\downarrow,\downarrow\rangle$ sta lastni stanji H in se jim energija ne spremeni.

$\uparrow\uparrow$	0	0	0	0
$\uparrow\downarrow$	0	$-\frac{2\gamma^2}{U}$		0
$\downarrow\uparrow$	0			0
$\downarrow\downarrow$	0	0	0	0

$\uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow \rightarrow -\frac{2\gamma^2}{U}$

$\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow \rightarrow +\frac{2\gamma^2}{U}$

$\downarrow\uparrow, \uparrow\downarrow \rightarrow +\frac{2\gamma^2}{U}$

$\downarrow\uparrow, \downarrow\uparrow \rightarrow -\frac{2\gamma^2}{U}$

$$\Longrightarrow \frac{2\gamma^2}{U} \begin{array}{cc} \begin{matrix} \uparrow\downarrow & \downarrow\uparrow \end{matrix} & \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{matrix} \uparrow\downarrow \\ \downarrow\uparrow \end{matrix} \end{array}$$

$$(-1-\lambda)^2 = 1$$

$$1+\lambda = \pm 1 \rightarrow \lambda = 0,\quad \lambda = -2$$

$$E = 0$$

$$E = -\frac{4\gamma^2}{U}$$

→ lastni energiji

$E = 0 \rightarrow$ l.v. $\dfrac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$, $|\uparrow\uparrow\rangle$, $|\downarrow\downarrow\rangle$ ← 3x degenerirano stanje

$E = -\dfrac{4\mu^2}{U} \rightarrow$ l.v. $\dfrac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}$

Dobili smo razcep na singlet in triplet.

Efektivni hamiltonian za ta podprostor:

$$H = \frac{4\mu^2}{U}\left(\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 - \frac{1}{4}\right) \qquad \vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 = \frac{S^2 - S_1^2 - S_2^2}{2} = \begin{cases} -\frac{3}{4}; & S=0 \\ \frac{1}{4}; & S=1 \end{cases}$$

Če damo na vsako piko svoje magnetno polje, dobimo

$(G_1)\,(G_{12})\,(G_2)$ hamiltonian $H = \underset{\frac{4\mu^2}{U}}{\underset{\shortparallel}{J}}\left(\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2 - \frac{1}{4}\right) + \mu\vec{S}_1\cdot\vec{B}_1 + \mu\vec{S}_2\cdot\vec{B}_2$

1 2

Če dodamo vmes še eno elektrodo, lahko spreminjamo sklopitev J med pikama ($G_{12} < 0 \rightarrow \mu$ se zmanjša).

Poglejmo časovni razvoj za $\vec{B}_1 = \vec{B}_2 = 0$:

<u>$t=0$</u> l.s.

$|\uparrow\uparrow\rangle = |\uparrow\uparrow\rangle$

$|\uparrow\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}\right)$

$|\downarrow\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}}\right)$

$|\downarrow\downarrow\rangle = |\downarrow\downarrow\rangle$

$t > 0$

$|\uparrow\uparrow\rangle$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} + \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} e^{+i\frac{4\mu^2}{U\hbar}t}\right)$

$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} - \frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} e^{+i\frac{4\mu^2}{U\hbar}t}\right)$

$|\downarrow\downarrow\rangle$

$$\boxed{\begin{aligned}
e^{\frac{iHt}{\hbar}}|\uparrow\uparrow\rangle &= |\uparrow\uparrow\rangle \\
e^{\frac{iHt}{\hbar}}|\uparrow\downarrow\rangle &= \frac{1}{2}\left(1 + e^{+\frac{i4\mu^2}{\hbar U}t}\right)|\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{2}\left(1 - e^{+\frac{i4\mu^2}{U\hbar}t}\right)|\downarrow\uparrow\rangle \\
e^{\frac{iHt}{\hbar}}|\downarrow\uparrow\rangle &= \frac{1}{2}\left(1 - e^{+\frac{i4\mu^2}{\hbar U}t}\right)|\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{2}\left(1 + e^{\frac{i4\mu^2}{\hbar U}t}\right)|\downarrow\uparrow\rangle \\
e^{\frac{iHt}{\hbar}}|\downarrow\downarrow\rangle &= |\downarrow\downarrow\rangle
\end{aligned}}$$

(42) NANOFIZIKA → VAJE

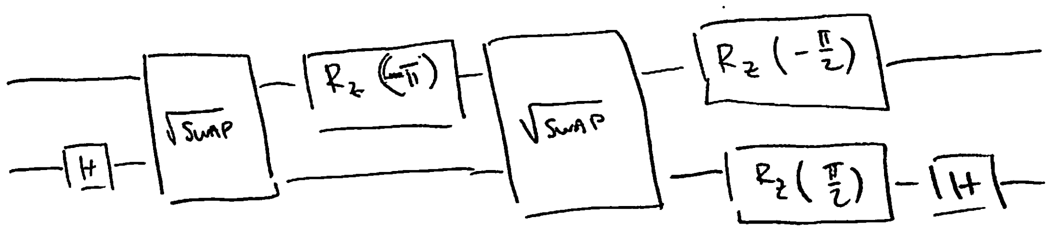
Časovni razvoj lahko predstavimo kot unitarno transformacijo:

$$U = e^{\frac{iHt}{\hbar}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(1+e^{\frac{iJt}{\hbar}}\right) & \frac{1}{2}\left(1-e^{\frac{iJt}{\hbar}}\right) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\left(1-e^{\frac{iJt}{\hbar}}\right) & \frac{1}{2}\left(1+e^{\frac{iJt}{\hbar}}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Če postavimo $\frac{Jt}{\hbar} = \pi$, je ta matrika enaka $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. To so SWAP vrata.

V primeru $\frac{Jt}{\hbar} = \sqrt{\pi}$ pa $\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) & \\ & \frac{1}{2}(1-i) & \frac{1}{2}(1+i) & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$. Temu pravimo $\sqrt{SWAP}$, ker $\sqrt{SWAP}\sqrt{SWAP} = SWAP$.

CNOT vrata lahko predstavimo kot



$$\sqrt{SWAP} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \\ & \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$R_{\hat{n}}(\varphi) = e^{i\frac{\varphi}{2}\vec{\sigma}\cdot\hat{n}}$$

$$R_z(-\pi) = e^{-i\frac{\pi}{2}\sigma_z} = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$R_z\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} e^{\mp i\frac{\pi}{4}} & 0 \\ 0 & e^{\pm i\frac{\pi}{4}} \end{bmatrix}$$

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_z(-\pi) \otimes \mathbb{1}_2 = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\pi}{2}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\pi}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{+i\frac{\pi}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{1}_2 \otimes H = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$R_z\left(-\frac{\pi}{2}\right) \otimes R_z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & e^{-i\frac{\pi}{2}} & & \\ & & e^{+i\frac{\pi}{2}} & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

$$A: \sqrt{SWAP}\,\left(R_z(-\pi) \otimes \mathbb{1}\right) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \\ & \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\pi}{2}} & & & \\ & e^{-i\frac{\pi}{2}} & & \\ & & e^{i\frac{\pi}{2}} & \\ & & & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-i\frac{\pi}{2}} & & & \\ & \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \\ & \frac{e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{i\frac{3\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \\ & & & e^{i\frac{\pi}{2}} \end{bmatrix}$$

$$B: \sqrt{SWAP}\,\left(R_z\left(-\frac{\pi}{2}\right) \otimes R_z\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \\ & \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & e^{-i\frac{\pi}{2}} & & \\ & & e^{+i\frac{\pi}{2}} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \frac{e^{-i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{+i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \\ & \frac{e^{-3i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \frac{e^{+3i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}} & \\ & & & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A \cdot B = e^{-i\frac{\pi}{2}} \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

Zdaj to pomnožimo še s Hadamardom $\quad H^2 = \mathbb{1}_2$

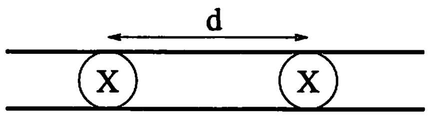
$$\left(\mathbb{1}_2 \otimes H\right) A \cdot B \left(\mathbb{1}_2 \otimes H\right) = \ldots = \begin{bmatrix} \mathbb{1}_2 & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{bmatrix} e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

Faze se znebimo z nekim ~~pt~~ el. potencialom, sicer so pa to CNOT vrata.

1. KOLOKVIJ IZ NANOFIZIKE

15. april 2014

1. Obravnavaj prevodnost kvantne žice s sipalcema na razdalji d.



V kvantni žici je odprt en sam kanal. Sipalna matrika vsakega od sipalcev je

$$S = \begin{pmatrix} i\sqrt{1-\tau}, & \sqrt{\tau} \\ \sqrt{\tau}, & i\sqrt{1-\tau} \end{pmatrix},$$

kjer je $0 \leq \tau \leq 1$.

(a) Kako je prevodnost take žice odvisna od Fermijeve energije pri temperaturi $T = 0$?

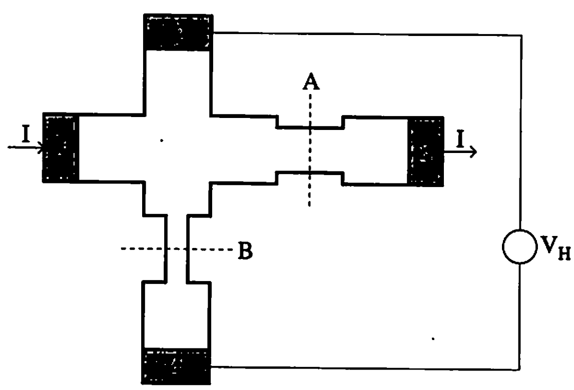
(b) Pri katerih vrednostih Fermijeve energije je prevodnost največja in pri katerih najmanjša? Kolikšni sta obe ekstremni vrednosti prevodnosti?

(c) Kolikšna je širina vrhov v prevodnosti? Predpostavi, da je $\tau \ll 1$.

(d) Kolikšna je prevodnost žice, če je temperatura dovolj visoka, da se faze izpovprečijo?

(e) Oceni, pri kateri temperaturi se faze izpovprečijo, če je Fermijeva energija v bližini tretjega vrha v prevodnosti pri $T = 0$.

2. Obravnavaj celoštevilski kvantni Hallov pojav v dvodimenzionalnem elektronskem plinu v sistemu, prikazanem na sliki. V zožitvi A je Fermijeva energija med drugim in tretjim Landauovim nivojem, v zožitvi B med prvim in drugim Landauovim nivojem, povsod drugod pa med tretjim in četrtim Landauovim nivojem. Med kontaktoma 1 in 3 teče električni tok I. Kolikšno Hallovo napetost V_H pokaže voltmeter, priklopljen med kontaktoma 2 in 4? Obravnavaj obe orientaciji magnetnega polja pravokotno na dvodimenzionalni elektronski plin.

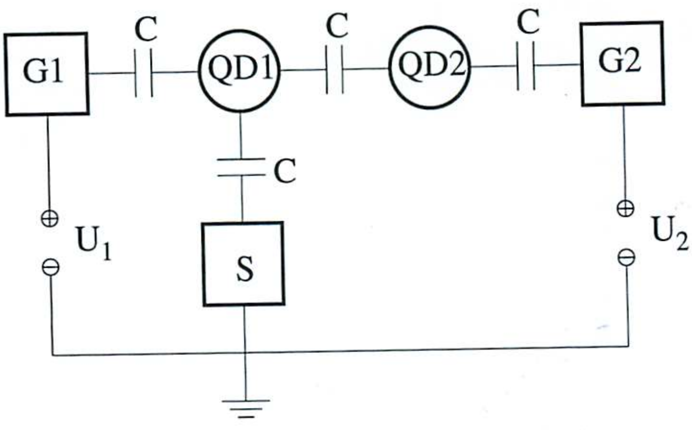


$$S_{13} = \frac{\tau e^{ikd}}{1+(1-\tau)e^{2ikd}}$$

2. KOLOKVIJ IZ NANOFIZIKE

29. maj 2014

1. Obravnavaj diagram stabilnosti dvojne kvantne pike, QD1 in QD2, prikazane na sliki. Napetosti na vratih G1 in G2 glede na izvor S sta U_1 in U_2. Kapacitivne sklopitve med elementi vezja so C, elektroni pa lahko tunelirajo le med S in QD1 ter med QD1 in QD2.



   (a) Zapiši "entalpijo" sistema v odvisnosti od števila elektronov na kvantnih pikah N_1 in N_2, ter napetosti na vratih U_1 in U_2.

   (b) Določi in nariši območje v prostoru napetosti na vratih U_1 in U_2, kjer ima minimalno "entalpijo" konfiguracija $(N_1, N_2) = (0, 0)$.

   (c) Sistem naj bo v konfiguraciji z najnižjo "entalpijo" pri $U_1 = U_2 = 0$. Nato napetost U_2 povečujemo. Pri kateri vrednosti U_2 pride do spremembe konfiguracije? Pozor: upoštevaj, da direkten prehod elektrona iz elektrod v QD2 ni mogoč.

2. V osnovnem stanju je na kvantni piki sodo število elektronov (slika a). Z master enačbo izračunaj električni tok, ki ga pri temperaturi $T = 0$ skozi kvantno piko poganja napetost med izvorom in ponorom, če

   (a) pri transportu sodelujeta samo elektronski konfiguraciji kvantne pike, prikazani na slikah a in b.

   (b) pri transportu sodelujejo elektronske konfiguracije kvantne pike, prikazane na slikah a, b in c. V konfiguraciji c sta elektrona v zadnjih dveh zasedenih enoelektronskih nivojih sklopljena v spinski triplet. Namig: vpelji verjetnosti za vsako od konfiguracij a, b in c ter jih izračunaj z master enačbo.

Število prehodov na časovno enoto elektrona med enoelektronskim nivojem na kvantni piki in elektrodo naj bo za vse prehode enako Γ. V Γ še ni upoštevana morebitna spinska degeneracija stanj in popravki zaradi zasedenosti nivojev v elektrodah.