

# NANOFIZIKA

19.2.

## Nanoračunalništvo in nanoelektronika.

Mooreov zakon pravi, da se zmogljivosti računalnikov vsako leto podvojijo. To je posledica vedno manjših tranzistorjev.

Zdaj smo pri velikosti  $\sim 100$  atomov.

Kaj dosti manjše se ne bo dalo, do neke meje pač pridemo. In Mooreov zakon se bo moral ustaviti.

Za razumevanje atomov, iz katerih so tranzistorji, potrebujemo kvantno, FTS.

Za opis procesov, tokov, pa je zameknt dovolj klasična fizika. Ko bomo še manjšali dimenzije, bo potrebna tudi za razumevanje delovanja kvantna mehanika.

In o tem nas uči nanofizika, o tem prehodu med klasično in kvantno.

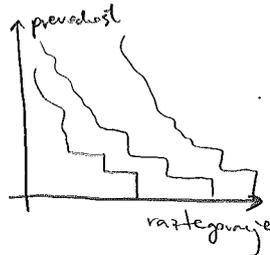
Cilj je narediti enoatomne tranzistorje, ali pa vsaj iz najmanj molekul.

Ko raztegujemo žičko (zlata), da je vedno tanjša, prevodnost pada. Ampak kako?

Ne linearno. Prevodnost je za debelino par atomov diskretizirana.

Obzorna kvantizirana.

Za opis sededa potrebujemo kvantno fiziko.



$$G_0 = \frac{e^2}{h} = (26 \text{ k}\Omega)^{-1}$$

Kvantizacija se pojavi tudi pri ogljikovih nanocerkah. Najlepše se stopnice vidi pri 2D elektronskem plinu.

Negativno nabijejo prepreke in dobijo režo, potem priljubijo napetost in spreminjajo kvantizacijo toka.



Pri kvantnih pikah se morajo energije v pikah dovolj ujemati z energijsko režo, energijami v obeh elektrodah. V pikah je obrog 100 elektronov, potem pa dodatni pridejo, pregradnja je odvisna od energijskih staj

Zanimiv je še Aharonov-Bohmov pojav, prevodnost slabe z magnetnim poljem.

Odkriva se nivoji, skali, ujemajo pri kvantnem Hallaremu pojavu, kjer je kvantizirana prečna napetost.

Kvantno računalništvo: informacije so spravljene v kubitih,  $|\alpha\rangle + \beta|\downarrow\rangle$ .

Informacija izluščimo z meritvijo.

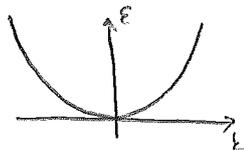
Hočemo čimboljše kontrole kubitov, ampak čim manj motenj iz okolice.

Najbolje je s superprevodnimi kubitih, Cooperjevi pari.

Obnavljamo idealizirano 1D verigo atomov, oz. elektronov. Preprosta verzija.

Tok je  $I = -e_0 n v$ .

Lastne funkcije za elektron so ravni valovi. Disperzija je zato kvadratna,  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ .

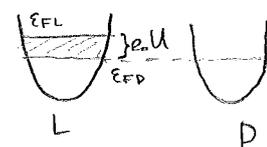


Elektrode priklapimo na napetost in Fermijeva energija se na obeh straneh spremeni.



Naj bo  $E_{FL} > E_{FD}$ .

Zaradi Paulija elektroni ne smejo iz desne na levo, lahko pa obratno.



V 1D je gostota stanj  $n \propto \frac{1}{\sqrt{E}}$ .

In hitrost  $v = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k} = \frac{\hbar k}{m} = \frac{\hbar}{m} \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}}$

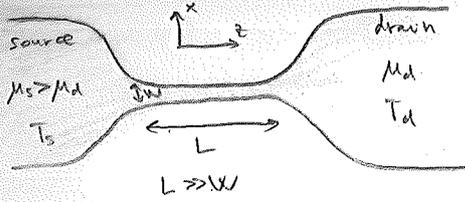
Število stanj bo  $n \propto \frac{1}{\sqrt{E}} e_0 U$

Energijska odvisnost se pokrajša in

dobimo  $I = C \cdot U$ , kjer je  $C = \frac{2e_0^2}{h}$ .

Dvojka pride zaradi spina. Spin izničimo, če damo atom v močno magnetno polje.

# Kvantizacija prevodnosti.



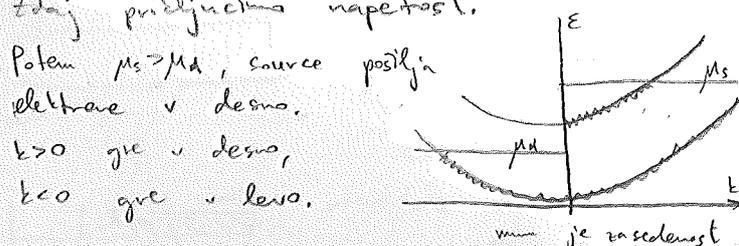
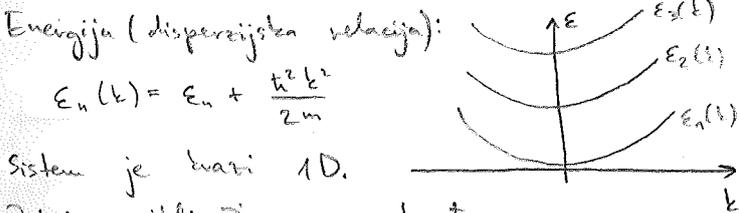
Dimenzija  $y$  ni bistvena.

Območje, kjer se  $e^-$  gibljejo, omejuje nek potencial  $V(x, z)$ . Mislimo si, da je zunaj potencial  $\infty$ , tako elektroni ne morejo pobegniti.

V osrednjem območju je  $V(x, z) = V(x)$ , ni odvisna od  $z$ , ker se širina  $w$  tem območju ne spreminja.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x, z) + V(x) \psi(x, z) = E \psi(x, z)$$

Separacija:  $\psi(x, z) = \chi_n(x) \frac{e^{ikz}}{\sqrt{L}}$   
 nestacionarna potencialna jama v  $x$  smeri  
 normalizacija glede na dolžino tega območja.



Sistem je kvazi 1D.  
 Zdaj priključimo napetost.  
 Potem  $\mu_s > \mu_d$ , source pošilja elektrone v desno.  
 $k > 0$  gre v desno,  
 $k < 0$  gre v levo.

Stanji s  $+k$  in  $-k$  bosta dati tok v eni/druzi smeri in se prispelka odstejeta.  
 Zato so pomembni le tisti, ki jih na drugi strani ni.

Tak lahko pogojamo na različne načine, lahko z napetostjo, lahko pa termoelektromi, Seebeckov pojav, tok teče zaradi  $\Delta T$ .

Gostoto toka izračunamo kot smo izpeljali pri KMI,  

$$\vec{j}(x, z) = \frac{e\hbar}{2\pi i} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*)$$
  
 in potem celoten tok  $I(z) = \int \vec{j}(z) dx$

Ker nas zanima stacionarni problem, tok ne bo odvisen od  $z$ , saj velja kontinuitetna enačba.

Gradient  $\psi$  ima  $x$  in  $z$  komponento, ampak  $x$  smeri splah ne gledamo, ker se izpopelji in v  $x$  smeri ni toka, sken bi elektroni ušli gor/dol, ven.

$$\vec{j}(z) = \frac{e\hbar}{2\pi i} \left( \chi_n^* e^{-ikz} \frac{1}{\sqrt{L}} \chi_n \frac{ik}{\sqrt{L}} e^{ikz} - c.c. \right)$$

in dobimo 
$$j(z) = \frac{e\hbar}{2\pi i} |\chi_n|^2 \frac{2ik}{L} = \frac{e\hbar k}{mL} |\chi_n|^2$$

ko se integriramo,  $I_{nl} = \frac{e\hbar k}{mL}$  (res ni odvisna od  $z$ )

Zdaj moramo sečeti po vseh zasedenih  $k$ , to zgoraj je prispelka le za enega.

$$I = \sum_n \sum_k \frac{e\hbar k}{mL} P_{nk}$$

kjer je  $P_{nk}$  verjetnost, da je stanje  $n, k$  zasedeno.

V igri sta dve Fermijevi funkciji, na levi in na desni strani.

$$I = \sum_n \sum_{k>0} \frac{e\hbar k}{mL} f_s(E_{nk}) + \sum_n \sum_{k<0} \frac{e\hbar k}{mL} f_d(E_{nk})$$

kjer je  $f_s(\epsilon) = \frac{1}{1 + e^{\frac{\epsilon - \mu_s}{k_B T_s}}}$ , podobno d.

Vsoto spreminimo v integral, da lahko izračunamo.

$$I = \sum_n \left( \int_0^{\infty} dk \frac{e\hbar k}{mL} f_s(E_{nk}) + \int_{-\infty}^0 dk \frac{e\hbar k}{mL} f_d(E_{nk}) \right) \frac{L}{2\pi} = \sum_n \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} dk \frac{e\hbar k}{m} (f_s(E_{nk}) - f_d(E_{nk}))$$

ko  $E_n(k)$  vemo  $\frac{1}{\hbar} \frac{dE_n(k)}{dk} = \frac{\hbar k}{m}$ , to upoštevamo,

$$I = \sum_n \frac{e}{2\pi \hbar} \int_0^{\infty} dE \frac{dE_n(k)}{dk} (f_s(E_{nk}) - f_d(E_{nk}))$$

Integracijska spremenljivka je enaka,  $k \rightarrow E$ .

Formula  $I = G U$  velja za majhne  $U$ , kar velja linearna zveza v Fermi. Zato računamo za majhne  $U$ .  
 (Za velike  $U$  in tokove dnevno račun ne velja)

Koliko energije elektron dobi/izgubi pri preobrtu od  $\uparrow$  k  $\downarrow$ ? ell. Zato tudi

$$M_s = M_d + e\ell.$$

Predpostavimo se enakost temperatur,

$$T_d = T_s = T.$$

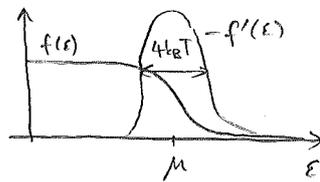
$$f_d(\epsilon) = \frac{1}{e \frac{e^{-(\epsilon + e\ell)} + 1}} = f_s(\epsilon + e\ell) = f_s(\epsilon) + e\ell f_s'(\epsilon)$$

ell mora biti majhen. Dovolj majhen, da bo račun v redu. To bomo videli pri primerih, kaj to pomeni.

$$I = \sum_n \frac{e}{h} \int_{\epsilon_n}^{\infty} d\epsilon (-e\ell f_s'(\epsilon)) = \left( \sum_n \frac{e^2}{h} \int_{\epsilon_n}^{\infty} (-f_s'(\epsilon)) d\epsilon \right) \cdot U$$

Začnemo sprecitati indeks  $s$ , za majhe ell je  $f_s \approx f_d$ .

V limiti  $T \rightarrow 0$  je  $-f'$  delta funkcija.



Če se kanal začne pod  $\mu$ , bo integral 1, če se nad, bo nič. To je v limiti  $T \rightarrow 0$ .

$$G \xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{e^2}{h} M, \quad M \text{ označuje število odprtih kanalov, } \epsilon_n < \mu.$$

V nekem kanal moramo šteti dvakrat, ker do zdaj še nismo upoštevali spinov.

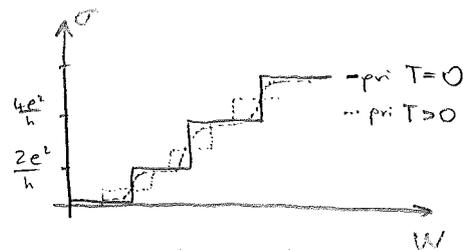
Ko daljšans  $L$ , bodo energije namščale, kot pri neskončni potencialni jami.

Zato je vedno manj pasov odprtih in prevodnost se diskretno spreminja.

$$\epsilon_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mW^2}, \quad \text{za } \infty \text{-pot. jama}$$

Pri  $k_B T \gg \Delta \epsilon$

je širina  $-f'$  tako velika, da stikov ne opazimo več, odvisnost  $G$  je praktično linearna, oz. zelo gladka.

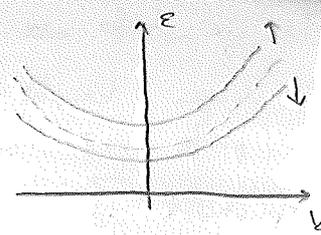


Narisano je, kot da so stoki enakomerno porazdeljeni. To pri neskončni jami ni res, pri harmoničnem potencialu pa je že v redu.

...

Kako je, ko vključimo magnetno polje?

Hamiltonijan dobi Zeemanov člen,  $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ .



Stanje s spinom gor se  $\epsilon$  poveča, s spinom dol pa zmanjša. In potem se kanal za  $\uparrow, \downarrow$  ne odpre hkrati.

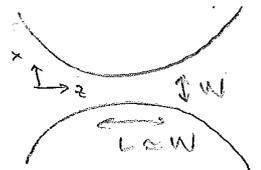
Pojavijo se dodatni stoki, jih je dvakrat več, označeno s pleticami.

Zdaj se lotimo novega problema, in sicer:

Spet bomo vpeljali prečne valovne funkcije. Ampak

bajo zdaj odvisne od  $z$ ,

saj bo pri sredini  $\uparrow$ , na robu  $\downarrow$ .



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi(x,z) + V(x,z) \psi(x,z) = \epsilon \psi(x,z)$$

Funkcije  $\chi_n$  definiramo prek enačbe

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \chi_n(x,z) + V(x,z) \chi_n(x,z) = \epsilon(z) \chi_n(x,z)$$

Potem rešujemo z nastankom

$$\psi(x,z) = \sum_n \chi_n(x,z) \varphi_n(z).$$

S tem se da natančno rešiti, a na koncu dobimo sklopjen sistem dif. enač.

Tisto je treba reševati numerično, zato raje že takoj približek.

Adiabatični približek:

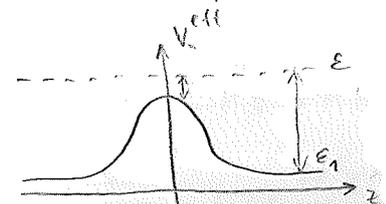
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dz^2} \varphi_n(z) + V_n^{eff}(z) \varphi_n(z) = \epsilon \varphi_n(z)$$

Prej smo imeli ravne valove za  $\varphi_n$ , ni bilo člena  $V_n^{eff}$ . Zdaj imamo pri se to.

Tu ne bomo naredili vseh korakov, več v knjigi.

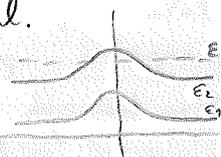
Še vedno bo podobno ravniin valovcem, samo da se k s krajem spreminja.

Pri  $z=0$ , na vrhu krba, majhen k, raven energija, drugje pa večja.



To je bilo za prvi kanal.

Pri drugem kanalu pa poteka ve pride več nujno slabši.



Preprostost in odbojnost tudi znamo izračunati.

Na levi:  $e^{ikz} + r e^{-ikz}$

na desni:  $t e^{ikz}$

Kaj se dogaja vmes je za tak grši potencial težko izračunati. Samo pa naredili pri kvantni za pravokotno oviro.

Posljens se val v levo sver,

levo:  $t' e^{-ikz}$

desno:  $e^{ikz} + r' e^{-ikz}$

$t'$  in  $r'$  sta lahko (in sta) drugačna kot  $t$  in  $r$ .

$$\begin{array}{l} \text{Skupaj levo: } A_L e^{ikz} + B_L e^{-ikz} \\ \text{Skupaj desno: } A_D e^{ikz} + B_D e^{-ikz} \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} \xrightarrow{A_L} \xleftarrow{A_D} \\ \xleftarrow{B_L} \xrightarrow{B_D} \end{array} \right.$$

Če pomans obnašanje v vmesnem območju, lahko izračunamo  $t, r$ . Zdaj samo malo v splošnem, kaj mora veljati.

$$\begin{bmatrix} B_L \\ B_D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & t' \\ t & r' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_L \\ A_D \end{bmatrix}$$

Za posebna primera [13] in [14] posledna zgoraj in kvantna je itak linearna.

Krajše:  $B = S \cdot A$ ,

kjer je  $S$  sipalna matrika.

Konjugiranje in nastajanje elektronov v vmesnem območju ni (še) dovoljeno.

$$I_{vp} = |A_L|^2 \frac{\hbar k}{m} + |A_D|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

$$I_{iz} = |B_L|^2 \frac{\hbar k}{m} + |B_D|^2 \frac{\hbar k}{m}$$

in mora veljati  $|A_L|^2 + |A_D|^2 = |B_L|^2 + |B_D|^2$

krajše  $A^T A = B^T B$  in zato  $S^T S = I$ , matrika  $S$  je unitarna.

Potrebavali bomo še eno lastnost.

$$H \psi = E \psi \quad /^* \implies H^* \psi^* = E \psi^*$$

$H = H^*$  (potencial je realen, kinetična tudi)

To ni res, če  $\vec{A} \neq 0$ , ker imamo v  $(\vec{p} - e\vec{A})^2$  eni in poteka ni avto,

Zato obravnavamo  $\vec{B} = 0$ .

$H \psi^* = E \psi^*$ ,  $\psi^*$  je tudi rešitev.

Če konjugiramo, imamo

$$A_L^* e^{-ikz} + B_L^* e^{ikz}, \quad A_D^* e^{ikz} + B_D^* e^{-ikz}$$

Zato  $\begin{bmatrix} A_L^* \\ A_D^* \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} B_L^* \\ B_D^* \end{bmatrix}$ , oz.  $A^* = S B^*$

$$\implies S^T A^* = B^*, \quad S^T A = B.$$

Za  $\vec{B} = 0$  je torej  $S^T = S$ .

In naprej. Prej smo imeli konstantne prispevke za  $k, -k$ . Zdaj pri tleh dodatno se verjetnost, da je sel nek elektron (z valovnim vektorjem  $k$ ) skozi.

To je transmisivnost,  $T_n(\epsilon) = |t_n(\epsilon)|^2$

to moramo dodati v enačbo za  $G$ ,

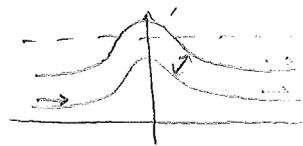
$$G = \sum_n \frac{e^2}{h} \int_{\epsilon_n}^{\infty} (-f'(\epsilon)) T_n(\epsilon) d\epsilon \stackrel{T=0}{=} \sum_n \frac{e^2}{h} T_n(\mu)$$

Landauer - Büttikerjeva formula

To je osnovna formula tega področja.

Znati je torej treba rešiti sipalni problem.

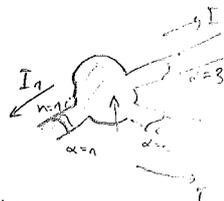
Ker so v hamiltonijanu členi, ki povezujeta  $\psi_1(z)$  in  $\psi_2(z)$ , in jih sklopimo, moramo se dodatno posplošitev. Tega pri rešitvi približem mi.



$T_n(\epsilon)$  moramo nadomestiti z

$$\sum_m T_{nm}(\epsilon), \quad \text{npr. } T_{11}(\epsilon) + T_{12}(\epsilon).$$

Zdaj bomo se posplošili in imeli dve elektrod. Parčeta moramo označevati z indisi. Elektrode z  $\alpha$ . Kanale, prečne valovne funkcije z  $n$ . Ti n-ji naj označujajo tudi spin.



Vedatiz kanala naj kaže os  $z$ .

Energija je  $E_{dn} + \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

namost. št.  $n$

$T = \text{konst.}$

Vsak kanal ima še  $\mu_\alpha = \mu + eU_\alpha$

V eni od žiček je valovna funkcija:

$$\Psi(x_\alpha, z_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{L}} \sum_n \chi_n(x_\alpha) \left( A_{\alpha n} \frac{e^{ik_\alpha z_\alpha}}{\sqrt{k_\alpha}} + B_{\alpha n} \frac{e^{-ik_\alpha z_\alpha}}{\sqrt{k_\alpha}} \right)$$

Če dodamo te koeficiente  $\sqrt{k_\alpha}$ , nam ni treba pri preprostosti določiti členov, kot pri stopnici  $\frac{Ae^{ikz} + Be^{-ikz}}{Ce^{ikz}}$

$$T = \left| \frac{C}{A} \right|^2 \frac{k'}{k}$$

No pri tem nastartku je pter presena med Aji in Bji lepša.

$$B_{\alpha n} = \sum_{\beta m} S_{\alpha n, \beta m} A_{\beta m} \quad (\text{posplošitev sipalne matrice.})$$

Kako izračunati sipalno matriko, je že drug problem. Na vajah smo to naredili za Andersonov model. Sicer pa samo vemo, da sipalna matrika obstaja.

$$S^\dagger S = I \quad \text{in} \quad S^T = S, \quad \text{če} \quad \vec{B} = 0$$

Izpeljava je podobna. Za rezultat dobimo

$$I_\alpha = -\frac{e}{h} \int d\varepsilon \sum_n \left( f_\alpha(\varepsilon) - \sum_{\beta m} f_\beta(\varepsilon) |S_{\alpha n, \beta m}|^2 \right)$$

↑  
nvoji, ki so v  $\alpha$

Dvojke ni, ker je spin že v n-juh. Prvi člen  $f_\alpha(\varepsilon)$  so tisti, ki tečejo noter.  $\sum_{\beta m}$  pa so tisti, ki so iz  $\alpha$  in se odbijajo, ali pa so iz  $\beta \neq \alpha$  in so prepisani v  $\alpha$ .

Ali velja Kirchoffov zakon?

$$\sum_\alpha I_\alpha = -\frac{e}{h} \int d\varepsilon \sum_{\alpha n} \left( f_\alpha(\varepsilon) - \sum_{\beta m} f_\beta(\varepsilon) |S_{\alpha n, \beta m}|^2 \right)$$

Zaradi unitarnosti velja  $\sum_{\alpha n} |S_{\alpha n, \beta m}|^2 = 1$

$$= -\frac{e}{h} \int d\varepsilon \left( \sum_{\alpha n} f_\alpha(\varepsilon) - \sum_{\beta m} f_\beta(\varepsilon) \right) = 0 \quad \checkmark$$

(primanjeno indekse, je enako)

Če je  $U_\alpha = 0$  za vsak  $\alpha$ , mora biti v ravnovesju tok enak nič, preverimo.

$U_\alpha = 0$ , potem  $f_\alpha = f$ , vse enake.

$$I_\alpha = -\frac{e}{h} \int d\varepsilon \sum_n \left( 1 - \sum_{\beta m} |S_{\alpha n, \beta m}|^2 \right) f(\varepsilon) = 0$$

spet je to 1.

Dajmo napetost na eno žičko, ne drugo.

$$U_\alpha \neq 0 \quad \text{in} \quad U_{\alpha \neq \alpha} = 0.$$

$$I_\alpha = -\frac{e}{h} \int d\varepsilon \sum_n \left( (f_\alpha(\varepsilon) - f(\varepsilon)) - \sum_{\beta m} (f_\beta(\varepsilon) - f(\varepsilon)) |S_{\alpha n, \beta m}|^2 \right)$$

Odsteli smo  $f(\varepsilon)$  povsod, to lahko, ker smo že preverili, da je nič. Odsteli smo ničlo.

$$f_\alpha(\varepsilon) - f(\varepsilon) = \delta_{\alpha\alpha} (f_\alpha(\varepsilon) - f(\varepsilon))$$

$$f_\beta(\varepsilon) - f(\varepsilon) = \delta_{\beta\beta} (f_\beta(\varepsilon) - f(\varepsilon))$$

$$I_\alpha = -\frac{e}{h} \int d\varepsilon (f_\alpha(\varepsilon) - f(\varepsilon)) \underbrace{\sum_n \delta_{\alpha\alpha}}_{eU_\alpha \cdot (-f'(\varepsilon))} - \underbrace{\sum_{\beta m} \delta_{\beta\beta} |S_{\alpha n, \beta m}|^2}_{\sum_m |S_{\alpha n, \beta m}|^2} =$$

$$= -\frac{e^2}{h} \int d\varepsilon (-f'(\varepsilon)) \underbrace{\sum_{m, n} (\delta_{\alpha\alpha} \delta_{m n} - |S_{\alpha n, \beta m}|^2)}_{G_{\alpha\alpha}, \text{ prehodnost}} U_\alpha$$

Sama izpeljava ni tako pomembna, pomembno je, da imamo linearno zvezo med  $I, U$ .

Če damo več napetosti pa  $I_\alpha = \sum_{\alpha} G_{\alpha\alpha} U_\alpha$

$G$  poznamo, če imamo dan  $S$  oz. če ga znamo izračunati.

Ker nam veljati  $\sum_\alpha I_\alpha = \sum_{\alpha} G_{\alpha\alpha} U_\alpha = 0$

za vse  $U_\alpha$ , nam biti  $\sum_\alpha G_{\alpha\alpha} = 0$ .

Podobno  $\sum_\alpha G_{\alpha\alpha} = 0$ , ker če so vse

$U_\alpha = U$ , dobimo to, ker vemo, da je nič.

Za  $\vec{B} = 0$  je  $S$  simetrična in  $G_{\alpha\beta} = G_{\beta\alpha}$ .

To smo izpeljali iz  $H^\dagger = E\Psi$ ,  $H^*\Psi = E\Psi$  in za  $\vec{B} = 0$  je  $H^* = H$ .

Če  $\vec{B} \neq 0$  pa  $H = \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{2m} + \dots$

in  $\vec{p} = -i\hbar \vec{\nabla}$ , zato  $H$  ni realen.

Ampak se vedno pa  $H^*(-\vec{B}) = H(\vec{B})$

zato za sipalno matriko  $S^T(-\vec{B}) = S$

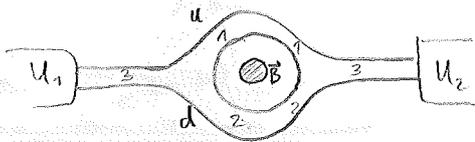
in zato tudi  $G_{\alpha\beta}(-\vec{B}) = G_{\beta\alpha}(\vec{B})$

### Aharonov - Bohm

Dolga časa le teoretiko, v neenosistemih pa so tudi videli eksperimenti.

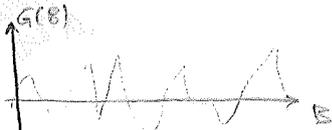
Na rajah 7 verilcan nisno hoteli natiti taka, zdaj zelimo, da je prepustnost spodaj enaka.  $E = \frac{1}{2}$

$$T_S = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & c & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}$$



Čeprav v žici, kjer tečejo elektroni, ni mogoče polja, pride do valov v žici, saj nima vpliva  $\vec{A}$ , kjer  $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ . Pri neujanjenu prevodnosti pride do oscilacij.

Aharonov-Bohmove oscilacije



Za spremembo faze imamo dva prispevka.

$$e^{i\vec{p}\vec{r}_u} = e^{i(\chi_u + \phi_u)} \quad \chi_u \text{ pridobi v vsakem primeru, } \chi_u = k d u$$

$$\text{Magnetna faza: } \phi_u = \frac{e}{\hbar} \int_{u \rightarrow} \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

$$e^{i\vec{p}\vec{r}_d} = e^{i(\chi_d - \phi_d)} \quad \phi_d = \frac{e}{\hbar} \int_d \vec{A} \cdot d\vec{r}$$

Rabili bomo tudi faze, ki bi jih pridobili, če bi šli v drugo smer.

$$e^{i\vec{p}\vec{r}_u} = e^{i(\chi_u - \phi_u)} \quad e^{i\vec{p}\vec{r}_d} = e^{i(\chi_d + \phi_d)}$$

Prispevkom  $\chi_u, \chi_d$  se udeležuje dinamična faza, (ine pride iz dinamike,  $e^{i\vec{p}\vec{r}}$ ...)

Prispevkom  $\phi_u, \phi_d$  se udeležuje magnetna faza. Ti dve vrsti prispevkov sta različni.

Če varenčimo cel krog, dobimo fazo  $\varphi_0$

$$e^{i\varphi_0} = e^{i(\chi_u + \chi_d + \phi_u + \phi_d)}$$

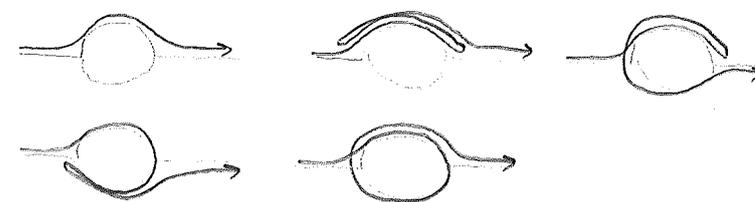
$$\text{In seveda } \phi_u + \phi_d = \frac{e}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = \frac{e}{\hbar} \int \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{(Po Stokesu) in to je } \phi_u + \phi_d = \frac{e}{\hbar} \Phi_m = \pi \frac{\Phi_m}{\Phi_0}$$

kjer je  $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$  kvant magnetnega polja.

$$\text{Prehodnost dobimo kot } G = \frac{2e^2}{h} |t|^2$$

kar velja za  $T=0$  (za  $T>0$  spet popraviš)



Poleg pa je prispevek, kar zame spodaj in vse kombinacije...

Po vrsti gredo prispevki:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(\chi_u + \phi_u)} \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i(3\chi_u + \phi_u)} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$e^{i(2\chi_u + \chi_d - \phi_d)} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e^{i(\chi_u + 2\chi_d + \phi_u)} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$e^{i(2\chi_u + \chi_d + 2\phi_u + \phi_d)} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Vse te prispevke in se druga smer je treba dati na kvadrat, in dobimo  $|t|^2$ .

Razmimo le za osnovne prispevke. Tudi vse se da točno, je v knjigah.

in

$$\left| \frac{1}{2} e^{i(\chi_u + \phi_u)} + \frac{1}{2} e^{i(\chi_d - \phi_d)} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{4} \left( 1 + 1 + e^{i(\chi_u + \phi_u + \chi_d - \phi_d)} + c.c. \right) =$$

$$= \frac{1}{4} \left( 2 + 2 \cos(\chi_u - \chi_d + \phi_u + \phi_d) \right) = d \cdot \cos\left(\chi_u - \chi_d + \pi \frac{\Phi_m}{\Phi_0}\right)$$

in res dobimo neke oscilacije. Perioda je  $2\Phi_0 = \frac{h}{e}$ . To so Aharonov-Bohmove oscilacije.

Ker tu nastopa še dinamična faza  $\chi_u - \chi_d$ , in ta se hitro izpopreči, dolga časa niso opazili pojave. Veliko stvari gre lahko narobe.

Zdaj si poglejmo še dva prispevka in vidimo druge periode.



$$\left| -\frac{1}{8} e^{i(2\chi_u + \chi_d - \phi_d)} + \frac{1}{8} e^{i(2\chi_u + \chi_d + 2\phi_u + \phi_d)} \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{64} \left( 1 + 1 - e^{i(-2\phi_u - 2\phi_d)} + c.c. \right) =$$

$$= \dots \cos(2(\phi_u + \phi_d)) = \cos\left(2\pi \frac{\Phi_m}{\Phi_0}\right)$$

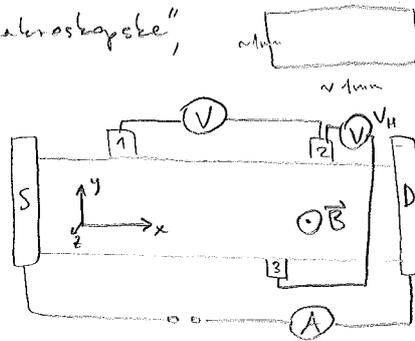
(Dinamična faza se odšteje.)

Tem oscilacijam rečemo Altschuler-Aronov-Spivakove oscilacije. Imajo periodo  $\Phi_0 = \frac{h}{2e}$ .

Te so najprej opazili, so manj občutljive na težave.

# Kvantni Hallov pojav,

Velikesti so sicer „makroskopske“, nekaj milimetrov.



Pojav je znan že dolgo. V 80ih pa so opazovali pri večjih poljih in opazili, da se obnaša čudno.

Klasično bi izmerili:

Drugi Newtonov zakon je za elektron

$$e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\vec{F}}{\tau} = m\vec{a} = 0 \quad (\text{v poravnaji})$$

se odteje, ker se pri tleh zgublja hitrost,  $\tau$  je povprečen čas med tleh.

$$\begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_y B \\ -v_x B \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} eE_x + ev_y B - \frac{mv_x}{\tau} = 0 \\ eE_y - ev_x B - \frac{mv_y}{\tau} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \vec{j} &= ne\vec{v} \\ \vec{j} &= \sigma \vec{E} \\ \vec{E} &= S \vec{j} \end{aligned}$$

$\sigma$  tensor  
preodnosti  
 $S$  tensor  
specifične  
upornosti

$$\begin{cases} eE_x + \frac{j_y B}{n} - \frac{m j_x}{ne\tau} = 0 \\ eE_y - \frac{j_x B}{n} - \frac{m j_y}{ne\tau} = 0 \end{cases}$$



$$\begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{m}{ne^2\tau} & -\frac{B}{ne} \\ \frac{B}{ne} & \frac{m}{ne^2\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} j_x \\ j_y \end{bmatrix}$$

V ravnovesju, v stacionarnem stanju tok teče le v x smeri in  $j_y = 0$ .

$$E_x = \frac{m}{ne^2\tau} j_x \implies E_x L_x = U = \frac{m}{ne^2\tau} j_x L_x$$

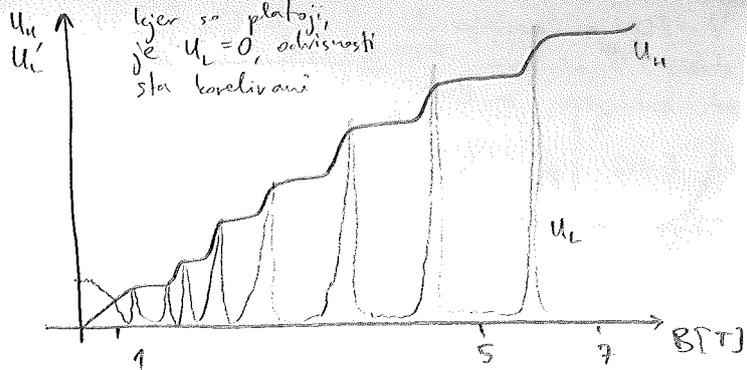
$$U = \frac{m}{ne^2\tau} \frac{j_y L_y L_x L_z}{L_y L_z} = \frac{m}{ne^2\tau} \frac{L_x}{L_y L_z} I = \frac{m}{ne^2\tau} \frac{L_x}{S} I$$

$R$

tu dobimo kot pri klasični fiziki, Ohmov zakon. Ni odvisna od  $B$ . Hallova napetost pri

$$E_y L_y = U_H = \frac{B}{ne} \frac{j_x L_y L_z}{L_z} = \frac{B}{ne\tau} I$$

$U$  omejeno +  $U_L$ , longitudinalna napetost.



Platoje pri  $U_H$  se nece kvantni Hallov pojav, oscilacijam  $U_L$  pa Shubnikov-de Hassove oscilacije.

$$U_H = R_H I, \quad R_H = \frac{h}{2e^2 M}, \quad G_H = \frac{1}{R_H} = \frac{2e^2}{h} M$$

prevodnost je kvantizirana, kvant je enak kot pri prevodnosti žic, Landauer-butlicker.

V praksi se kvanta prevodnosti ne da natančno izmeriti prek prevodnosti, saj vedno odstopa zaradi napak pri izdelavi žic,  $Q = \frac{2e^2}{h} (G)$

Pri  $G_H$  pa je natančnost za  $\frac{2e^2}{h}$  je  $10^{-8}$ . Zato s tem umerjajo razmerje  $\frac{e^2}{h}$ , ki nastopa v  $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}$ , konstanti fine strukture.

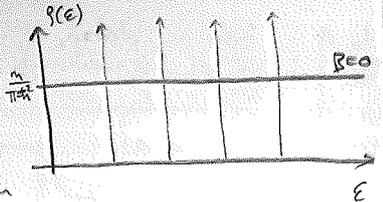
To je bil celostni kvantni Hallov pojav. Pri se večjih poljih pa pride do ulonjanevega kvantnega Hallovega pojava, ko se platoje pojavijo tudi za večere  $M$ .

Zakaj je to zanimivo? V običajni teoriji za celostni pojav ne ustreva razloži

Osnovne eksitacije pri tem ulonjanevem pojavu so elektroni, ki s seboj nosijo majhne flukse magnetnega polja. Pri  $M = \frac{1}{3}$  elektron nosi  $\frac{1}{3}$  fluksa, v vsakem je kvant mag. pretoka  $h$  se zdelava obnaša, kot da je naboj  $\frac{e_0}{3}$ , kar je precej čudno.

Zanimivo je tudi pri statistiki, to niso fermioni ali bosoni. So anyoni in se obnašajo nekako  $\frac{1}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}$  (za  $\varphi = 0$  fermioni, za  $\varphi = \pi$  bosoni)

V 2D je gostota stanj neodvisna od energije, za  $B=0$ .



Ko  $B \neq 0$  pa elektron krozi,  $\omega_c = \frac{e|B|}{m}$ .

Naredimo kvantilasično. Elektron pri enem obhodu pridela  $h \cdot 2\pi R$  dinamične in  $\frac{e}{h} \oint \vec{A} \cdot d\vec{r}$  magnetne faze. Da je valovna funkcija periodična, mora biti to večkratnik  $2\pi$ . Kot Bohr za vodikov atom,

$$L \cdot 2\pi R + \frac{e}{h} \oint \vec{A} \cdot d\vec{r} = 2\pi N \quad (\text{torej poljnina } \pi)$$

$$v = \omega_c R, \quad \hbar k = p = mv, \quad \text{torej skupaj}$$

$$\frac{mv}{h} \cdot 2 \frac{v}{\omega_c} + \frac{e}{h} B \frac{v^2}{\omega_c^2} = \frac{mv^2}{\hbar \omega_c} \cdot 2 + \frac{eBv^2 m}{\hbar \omega_c |e| B} =$$

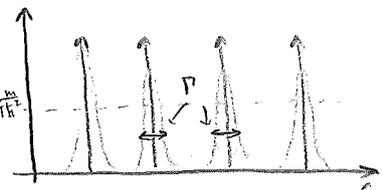
In ker  $\frac{e}{|e|} = -1$ , je to naprej

$$= mv^2 \left( \frac{2}{\hbar \omega_c} - \frac{1}{\hbar \omega_c} \right) = \frac{mv^2}{2} \frac{2}{\hbar \omega_c} = 2N$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{mv^2}{2} = N \hbar \omega_c} \quad \text{torej so energije dovoljene}$$

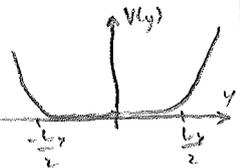
le veljavne in  $\delta$  je vsota  $\delta$  funkcij.

Ker imamo je  $\hbar k$ , in je  $\tau \cdot p = \hbar$ , so  $\delta$ -funkcija širine  $p = \frac{\hbar}{L}$ . Za vsaka polja se prekrivajo in so ves prevlede na kvant.



Zdaj zapisemo Schrödingerjevo enačbo.

Dodati uvereno potencial  $V(y)$ , da elektroni ne pobegnjejo.



$$\left( \frac{\vec{p} - e\vec{A}}{2m} + V(y) \right) \Psi(x,y) = E \Psi(x,y)$$

$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$ , izberemo Landauovo uveritev,

$$\vec{A} = -y B \hat{e}_x \quad (\vec{B} = B \hat{e}_z)$$

$$\left( \frac{(p_x + eyB)^2}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + V(y) \right) \Psi(x,y) = E \Psi(x,y)$$

Čeprav niso posem ločene spremenljivke, lahko naredimo separacijo,

$$\Psi(x,y) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{L}} \Psi(y)$$

Dobimo

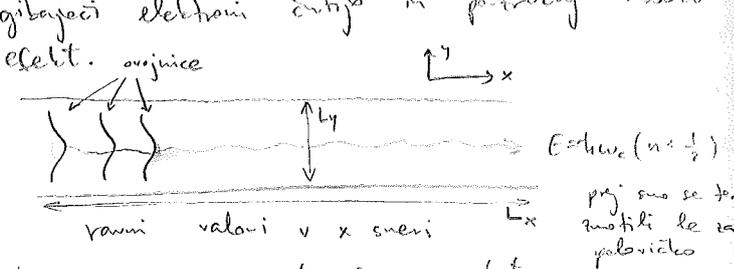
$$\left( \frac{\hbar^2 k_x^2 + eyB}{2m} + \frac{p_y^2}{2m} + V(y) \right) \Psi(y) = E \Psi(y)$$

$$\left( \frac{e^2 B^2}{2m} \left( y + \frac{\hbar k_x}{eB} \right)^2 + \frac{p_y^2}{2m} + V(y) \right) \Psi(y) = E \Psi(y)$$

$$\left( \frac{1}{2} m \omega_c^2 (y - y_0)^2 + \frac{p_y^2}{2m} + V(y) \right) \Psi(y) = E \Psi(y), \quad \text{odj } V=0$$

To je harmonični oscilator, premakljen za

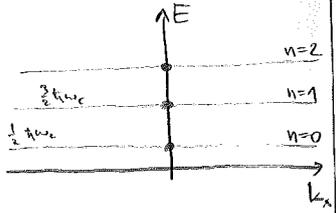
$$y_0 = -\frac{\hbar k_x}{eB}. \quad \text{To je premik gor/dol, ki ga gibajo elektroni čitijo in poročajo Hallov elekt. ovojnice}$$



v y smeri pa nek Gaussov paket.

Širina ovojnice je  $\sqrt{\frac{\hbar}{m \omega_c}} = \sqrt{\frac{\hbar}{|e| B}}$ , to smo izračunali za harmonski oscilator (kar tu imamo) že pri kvantni 1.

Ker energija ni odvisna od  $k_x$ , je disperzija konstantna.



Pred magnetnim poljem smo imeli  $E = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + E_n$  in člana  $k_x^2$  ni več odj.

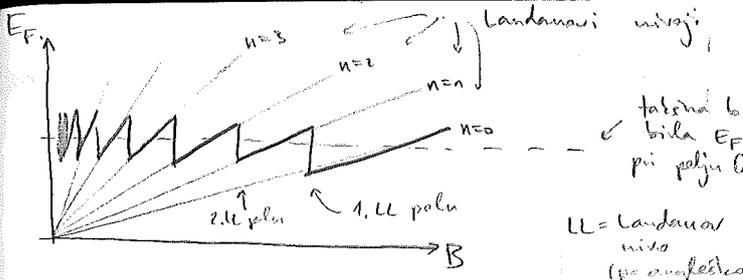
Število vseh možnih stanj je

$$N = 2 \cdot \frac{L_y}{\Delta y_k} = 2 \frac{L_y}{\frac{\hbar}{|e| B} \Delta k_x}$$

Pomembje  $\frac{L_y}{\Delta y_k}$  pa kolikor različnih  $k_x$  imamo, da stanje ostane v sistemu

$$N = \frac{2L_y}{\frac{\hbar}{|e| B} \frac{2\pi}{L_x}} = \frac{2L_x L_y |e| B}{h} = \int \frac{2|e| B}{h}$$

toliko stanj je v vsaki delta funkciji. Ko B večamo, je v vsaki  $\delta$  funkciji več stanj, med seboj pa se razmikajo. Število vseh stanj se zato z B ne spremenijo (to pomeni nič, ki ga ne bomo videli). To so Landauovi nivoji. Več elektronov imamo, višja bo Fermijeva energija,  $N_{\text{elektron}}$ . Zberemo si nek fiksen  $N_e$  in razpisemo  $E_F(B)$ .



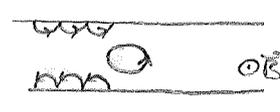
Pri ogramnem B to v prvem Landauar nivoju dasj staja, da bodo (pri T=0 so vsi v najnižjem stanju) vsi v tem 1. nivoju. Ko narjans B pa rabimo dodatne nivoje in  $E_F$  staae kot kaže graf.

V magnetnem polju elektroni v teh stanjih nima toka,  $v_x = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k_x} = 0$  (ker E=konst, ni odvisn od  $k_x$ )

Seveda se na dolgi rok ne prenačnega, saj kerirajo. Pri večjem polju je rody se manjši in se se bolj izposprei vse.

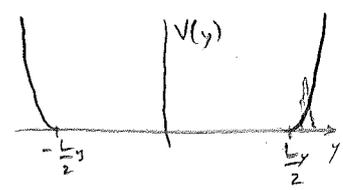
Ampak v eksperimentu pa tok teče. Dovolj za to je predpostaviti Drudejev približek, elektroni se zletavajo, in se potem lahko vravnata tok. Ampak to na visja polja ni dobro (ni dober model), zato ne bomo s tem nič delali.

Najprej klasično. Krožecemu elektronu dodamo steno in na robu lahko teče tok.



V kvantni mehaniki se rob narodi tako, da dodamo potencial.

Do zdaj smo imeli  $V(y)=0$ , zdaj pa imejno tale

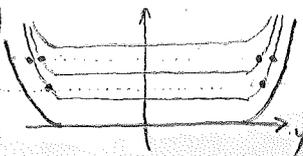


$$\left( \frac{1}{2} m v_c^2 (y - y_c)^2 + \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + V(y) \right) \psi(y) = E \psi(y)$$

V y smeri imejno se vedno ozrojava in ta naj ima je vedno enako širino,  $\sqrt{\frac{\hbar^2}{mE}}$ . To je narisano zgoraj, predpostavimo, da je vsaka valovna funkcija in je notraj valovne funkcije potencial leav konstanten,  $V(y_c)$ .

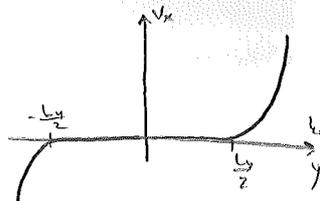


$E = \hbar \omega_c (n + \frac{1}{2}) + V(y_c)$   
Landauovi nivoji se zdaj zavikajo na robu



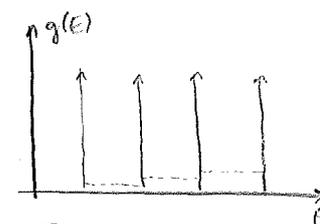
$$v_x = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial E}{\partial k_x} = \frac{1}{\hbar} \frac{\partial V(y_c)}{\partial k_x} = \frac{1}{|e|B} V'(y_c), \quad y_c = \frac{\hbar k_x}{|e|B}$$

Na robu imajo tudi pri kvantni mehaniki elektroni hitrost.

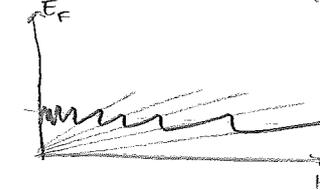


Zdaj, ko se Landauar nivoji utvirijo, stanja niso več posebn distriktan.

Nekaj stanj je na valjo tudi med Landauarini nivoji. (Glej stilo spodaj levo.)



Spremeni se tudi  $E_F$ , zdaj so stohi zvezni.



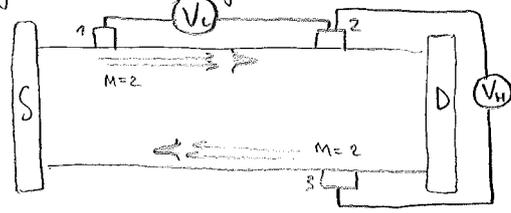
Kljub temu, da so rezni, so se vedno zelo ostri.

Obravnavamo z Landauer-Buttikerjevimi formulami

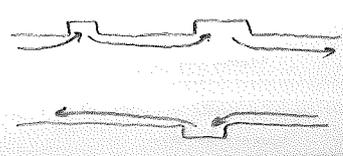
$$\begin{bmatrix} I_5 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_0 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{2e^2}{h} \begin{bmatrix} -M & 0 & 0 & 0 & M \\ M & -M & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & -M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M & -M & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M & -M \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_5 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_0 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

za pojasnilo beri spodaj.

Matrica je pri kvantnem Hallovem pojavu preprosta. Valovne funkcije so v prostoru smeri zelo lokalizirane. Kot smo že izračunali, grejo ob zgornjem robu elektroni v desno, ob spodnjem pa v levo. Zato se elektroni ne odbijajo! Ker bi sli lahko v drugo smer le ob drugem robu tega pa zaradi izjemne lokalitiranosti ne morejo. je prenatlo verjetno.



Za stevilo kanalov pretežno velja  $\omega_c$  (koliko Landauarinih nivojev) saka  $E_F$  na stili levo. Na robu je veliko kanalov, kolikor je Landauarinih nivojev polnih. Zdaj upoštevamo matrico. Zaradi lokalitiranosti je možnih le malo prehodov. Tako dobimo M in nile. -M je pa dobimo ker mora biti vsota v vrsticah (sklepaj) enaka nič.



Iz matrične enačbe dobimo:

(2)  $MV_3 - MV_1 = 0$  (ker  $I_1 = 0$ )  $\Rightarrow V_1 = V_3$

(3)  $MV_1 - MV_2 = 0$  (ker  $I_2 = 0$ )  $\Rightarrow V_2 = V_1$

(5)  $MV_0 - MV_3 = 0$  (ker  $I_3 = 0$ )  $\Rightarrow V_3 = V_0$

(1)  $-I = (-MV_3 + MV_3) \frac{2e^2}{h} = \frac{2e^2}{h} (V_0 - V_3) M$

(4)  $I = \frac{2e^2}{h} (V_2 - V_0) M = \frac{2e^2}{h} (V_1 - V_0) M$

sta  
erati  
enačbi  
zadostiti  
moramo  
torej le eni

$V_L = V_1 - V_2 = 0$  (longitudinalna napetost res pada na nič.)

$V_H = V_2 - V_3 = V_1 - V_0 = \frac{I}{\frac{2e^2}{h} M} \Rightarrow I = \frac{2e^2}{h} M V_H$

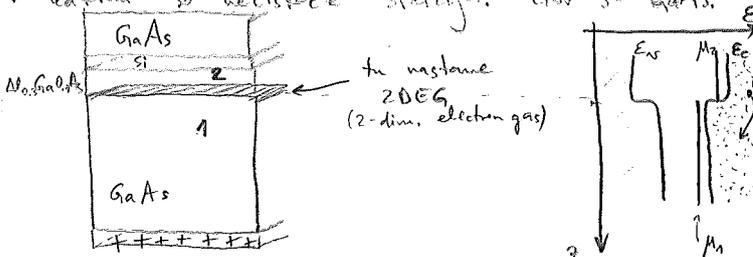
tu ta druga enačba pove o diskretizirani Hallovi prevodnosti. S ta obravnavo nisimo upoštevali, da je  $E_F$  lahko tudi ravna energija Landauovega nivoja. Takrat  $V_L \neq 0$  in prevodnost (ovarna) skoči. Takrat elektron lahko preskoči in se odbije, gre naraj, saj so Landauovi nivoji stiski, ni tako lokalizirani.

V praksi (s čimer smo predali do zdaj) ne bi mogli opaziti kvantnega Hallovega pojava, saj bi bili platoji preozki, ker so skoki Fermijeva energije preostri (ko spreminjamo B).

Zato morajo biti "skoki" dovolj široki. Za to postorbijo pri eksperimentu, ogledamo si kako ta 2D plin nastane.

Začnemo s 3D kosom galijevnega arsenida, GaAs. Gor se postavi elitino  $Al_{0.3}Ga_{0.7}As$ .

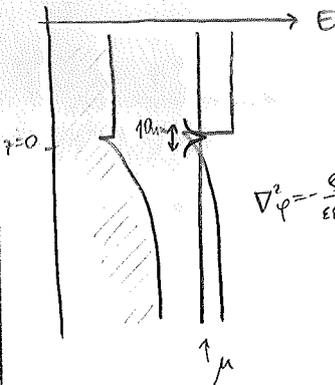
GaAs potopijo v nekak tekočo fazo te elitine in GaAs se raztopi. Gor se ena plast popravihila v kateri so nečistoče selicija. Gor je GaAs.



tu nastane 2DEG (2-dim. electron gas)

Temperatura mora biti nizka,  $< 4K$ .

Ko se snovi stabilizira, ko imamo ravnovesje, se kemijska potenciala uravnovesita, mora biti enaka. Nekaj elektronov gre na nižji potencial električno polje pa vse uravnovesi.

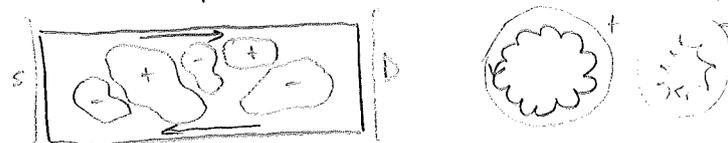


Dobimo vmes novo območje, kjer se lahko nahajajo elektroni. Vendar so v navpični smeri omejeni. Sicer valovne funkcije segajo čezla v težjo dimenzijo (z-smer), ampak eksponentno pada.

V vertikalni smeri se lahko elektron premika le 10nm, v drugih dveh smereh pa dosti več, gibanje je dvodimenzionalno.

V praksi je teh elektronov preveliko za poskuse, zato je na vrhu še si, ki prispeva elektrone. Sploh se daje poskus spodaj se pozitivno elektrodno, ki dodatno privlači elektrone.

To je skoraj idealen elektronski plin, elektroni se prevajajo nekaj um preden se zaklepijo. Važno je, da so tiste nečistoče prostorsko ločene od 2DEG. Nečistoče so valjčasto razporejene, zato potencial spodaj fluktuira. Če vrnemo spet od zgoraj to 2D ravnino, je

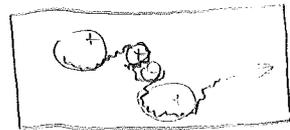


To se obravnava z numeričnimi simulacijami. Sicer pa: klasično se elektron, ki kreni v B, odbija od "hrbčka".

Zdaj je stanje vmes med d-funkcijami več. In platoji se razširijo.

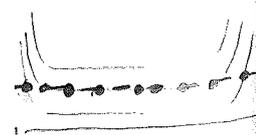
Ko pridemo v vmesno območje med platoji (ko napetost  $V_H$  raste), te klasične orbite se bodo več lokalizirane, saj bo  $E_F$  ravna črta. Sino v porprečni vrednosti, kar spreminja Landauove nivoje. (Zdaj imamo porprečno in adiabatično konstantno odvisnost, ki je ključna pri.)

Temu pojavu, ko se elektron zrušene čez, se reče perkolacija.

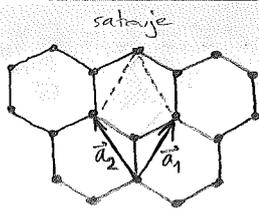


Še nekaj o Landauovih nivojih.

Ko je Fermijeva energija točno na Landauovem nivoju, smo na platoju. Dovolj so vse stanja po Fermijevi energiji, pojavi se longitudinalna upornost.



# Grafen.



Osnovna celica 7 barvi:

$$\vec{a}_1 = a \left( \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$\vec{a}_2 = a \left( -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

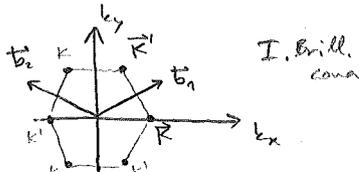
Recipročna mreža:

$$\vec{b}_1 = \frac{2\pi}{a} \left( 1, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\vec{b}_2 = \frac{2\pi}{a} \left( -1, \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\vec{r}_A = 0, \quad \vec{r}_B = \frac{1}{3}(\vec{a}_1 + \vec{a}_2)$$

$$\vec{K} = \frac{1}{3}(\vec{b}_1 - \vec{b}_2), \quad \vec{K}' = \frac{\vec{b}_2 - \vec{b}_1}{3}$$



I. Brill. zona

Stanja, ki se razlikujejo za vektor recipročne mreže, so ekvivalentna. Valovna funkcija:

$$\Psi(\vec{r}) = \sum_{\vec{K}} \left( \Psi_{KA} \phi_{p\sigma}(\vec{r} - \vec{R} - \vec{r}_A) + \Psi_{KB} \phi_{p\sigma}(\vec{r} - \vec{R} - \vec{r}_B) \right)$$

To je približek tesne vezi, smo ineli že lani pri FTS. Zanimiva so orbitale  $\phi_{p\sigma}$ , ki gledajo na prvi sili iz ravnine table.

$$-\gamma \Psi_{KA} - \gamma \Psi_{K-\vec{a}_1, B} - \gamma \Psi_{K-\vec{a}_2, B} = E \Psi_{KA} \quad \text{za stanje A}$$

$$-\gamma \Psi_{KA} - \gamma \Psi_{K+\vec{a}_1, A} - \gamma \Psi_{K+\vec{a}_2, A} = E \Psi_{KB} \quad \text{za stanje B}$$

B lahko skoči na energo od treh sosedov (A). Amplituda skoka je dolocena s prekrivalnim integralom,  $\gamma$ .

Nastanek:  $\Psi_{KA} = \Psi_A e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_A}$ ;  $\Psi_{KB} = \Psi_B e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}_B}$

$$-\gamma \Psi_B (1 + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}_1} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}_2}) = E \Psi_A$$

$$-\gamma \Psi_A (1 + e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_1} + e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_2}) = E \Psi_B$$

Z matrico:

$$\begin{pmatrix} -E & -\gamma(1 + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}_1} + e^{-i\vec{k} \cdot \vec{a}_2}) \\ -\gamma(1 + e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_1} + e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_2}) & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix} = 0$$

Determinanta = 0:  $E = \pm \gamma \left| 1 + e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_1} + e^{i\vec{k} \cdot \vec{a}_2} \right|$

V ogliščih A, B, C velja  $E = 0$  in tam se pozitivna in negativna stanja stikajo.

Zato  $E_F$  ravnina v ogliščih A, B, C. (če so stanja s  $E > 0$  prava in s  $E < 0$  leva).

Povsemba so stanja v bližini  $E_F$ . Ta prispevajo k prevodnosti. Zato razvijemo  $E$  v bližini oglišč, tam  $E = E_F$ .

$$\vec{k} = \vec{K} + \vec{q}, \quad \text{velja } \vec{K} \cdot \vec{a}_1 = \frac{2\pi}{3} \quad \text{in} \quad \vec{K} \cdot \vec{a}_2 = -\frac{2\pi}{3}$$

$$1 + e^{i(\vec{K} + \vec{q}) \cdot \vec{a}_1} + e^{i(\vec{K} + \vec{q}) \cdot \vec{a}_2} = 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{a}_1} + e^{-i\frac{2\pi}{3}} e^{i\vec{q} \cdot \vec{a}_2}$$

$$= \underbrace{1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{-i\frac{2\pi}{3}}}_{=0} + e^{i\frac{2\pi}{3}} i\vec{q} \cdot \vec{a}_1 + e^{-i\frac{2\pi}{3}} i\vec{q} \cdot \vec{a}_2$$

(za majhen  $|\vec{q}|$ ,  $e^x \approx 1 + x$ )

$$= \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \cdot i\vec{q} \cdot (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) i\vec{q} \cdot (\vec{a}_1 - \vec{a}_2)$$

$$= -\frac{1}{2} i q_y \sqrt{3} a - \frac{\sqrt{3}}{2} a q_x = -\frac{\sqrt{3}}{2} a (q_x + i q_y)$$

Če smo točno v  $\vec{K}$ , je res  $E = E_F = 0$ , saj  $\vec{q} = 0$ . Podobno v  $\vec{K}'$ .

Če razvoj vstavimo v matrico, dobimo

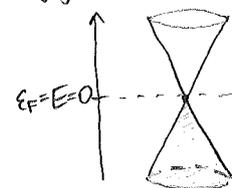
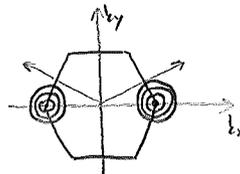
$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{3} a \gamma}{2} (q_x - i q_y) \\ \frac{\sqrt{3} a \gamma}{2} (q_x + i q_y) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} \Psi_A \\ \Psi_B \end{pmatrix} \quad (*)$$

To velja za majhne  $q_x, q_y$ , smo v bližini oglišča.

Iz determinante pa

$$E = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} a \gamma |\vec{q}| = \pm \hbar c^* q \quad (q = |\vec{q}|)$$

Črte konstantne energije so krugi.



prosta stanja  
sosedna stanja

Obstajajo velja  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ ,  $W_k = \frac{\hbar^2 p^2}{2m}$ ,  $E \propto p^2$

zdaj pa  $E \propto p$ , kar je relativistična disperzija. Res:  $E = \sqrt{(mc)^2 + p^2 c^2} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} cp$

Elektroni v grafenu se obnašajo, kot da bi bili relativistični delci brez mase.

Partika je, da  $c^*$  velika manjša od  $c_0$ , saj  $c^* \approx 10^6 \frac{m}{s}$ .

Fermion z zanemarljivo maso je nevtrino. Fizika elektronov v grafenu je praktično ekvivalentna fiziki nevtrinov.

Matrična enačba (\*) bomo prepisali v Diracovo enačbo, ki se sicer pojavlja pri delcih.

$$\hbar c^* (\hat{g}_x \sigma_x + \hat{g}_y \sigma_y) \Psi = E \Psi \quad \sigma_x \text{ in } \sigma_y \text{ sta spinorja}$$

$$\text{ozirama } \hbar c^* \hat{g} \cdot \hat{n} \Psi = E \Psi$$

se matematično obnaša kot spin angle, fizikalno pa ni spin, računamo mu pseudospin.

$\hat{n}$  je smer gibanja delca.  
 $\hat{n} \cdot \hat{\sigma}$  je sučnost in ima lastni vrednosti 1 in -1.  
 $\hat{n} \cdot \hat{\sigma} \Psi = \Psi$  desnosučni delec  
 $\hat{n} \cdot \hat{\sigma} \Psi = -\Psi$  levosučni delec

Pri neutrinih je namno obratno, +1, desnosučni so antineutrini; -1, levosučni so neutrini.

V okolici  $\vec{k}$ :  $\hbar c^* \hat{g} \cdot \vec{\sigma} \Psi = E \Psi$   
 V okolici  $\vec{k}'$ :  $\hbar c^* \hat{g} \cdot (-\vec{\sigma}^*) \Psi = E \Psi$

Skupen hamiltonijan je matrika

$$\hbar c^* \begin{bmatrix} -\vec{\sigma}^* \cdot \hat{g} & 0 \\ 0 & \vec{\sigma} \cdot \hat{g} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{k'} \\ \Psi_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Psi_{k'} \\ \Psi_k \end{bmatrix} E$$

To je pri kvantno 4x4

Imamo diagonalno matriko in to ni posebej zanimivo. Če imamo še magnetno polje,  $\vec{B}$ , dobimo tudi sklopitvene člene med  $\Psi_{k'}$  in  $\Psi_k$ , ki potem vodijo tudi v kvantni Hallov pojav.

$\Psi_k$  in  $\Psi_{k'}$  sta relevantni le v bližini  $E_F$ .

$$\Psi_k = \begin{bmatrix} \Psi_{kA} \\ \Psi_{kB} \end{bmatrix} \text{ za atome A} \quad \Psi_{k'} = \begin{bmatrix} \Psi_{k'A} \\ \Psi_{k'B} \end{bmatrix} \text{ za atome B}$$

$$\Psi_{k'z}(\vec{r}) = \sum_{\vec{R}} \Psi_{k'A} e^{i(\vec{k}' + \frac{1}{2}) \cdot \vec{R}} \phi_{k'}(\vec{r} - \vec{R} - \vec{r}_A) + \sum_{\vec{R}} \Psi_{k'B} e^{i(\vec{k}' + \frac{1}{2}) \cdot \vec{R}} \phi_{k'}(\vec{r} - \vec{R} - \vec{r}_B) = \sum_{\vec{R}} \underbrace{(\Psi_{k'A} e^{i\vec{k}' \cdot \vec{R}})}_{\Psi_{k'A}(\vec{R}), \text{ envelope function, ovojnica}} \phi_{k'}(\vec{r} - \vec{R} - \vec{r}_A) + \dots$$

Ker je  $\hat{g}$  najhen se ovojnica s krajem počasi spreminja.

V enačbe poskušajmo vnesti envelope function. To nam bo koristilo kasneje, ko bomo računali z  $\vec{B}$ .

$$\hbar c^* \vec{\sigma} \cdot \hat{g} \Psi_k = E \Psi_k \quad / \text{ množimo z } e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\hbar c^* \vec{\sigma} \cdot \hat{g} \Psi_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = E \Psi_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\hbar c^* \vec{\sigma} \cdot \frac{\vec{\nabla}}{i} \Psi_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} = E \Psi_k e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}$$

$$\boxed{c^* \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \Psi_k(\vec{r}) = E \Psi_k(\vec{r})}$$

in tu edaj nastopa ovojnica  $\Psi_k(\vec{r})$ .

Če dodamo v hamiltonijem krajerno odvisne člene (npr.  $\vec{A} = -yB\hat{e}_x$ ), ta enačba se vedno velja, če se le  $\vec{A}$  ne spreminja prehitro v primerjavi z velikostjo osnovne celice.

(Tu smo izpustili precej izpeljave, je v knjigah.)

Zdaj dodamo  $\vec{B}$ .

$$\vec{p} \mapsto \vec{p} - e\vec{A}, \text{ zgoraj enačba zapiseva:}$$

$$c^* \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} - e\vec{A}) \Psi_k(\vec{r}) = E \Psi_k(\vec{r})$$

Rešitve te enačba bodo Landauovi nivoji.

Vzamemo  $\vec{A} = -yB\hat{e}_x$ .

Zadnje je že delovalo  $\Psi_k(\vec{r}) = e^{ik_x x} \Psi_k(y)$ .

To vstavimo v  $c^* \vec{\sigma} \cdot (\vec{p} + eyB\hat{e}_x) \Psi_k(\vec{r}) = E \Psi_k(\vec{r})$

$$\vec{p} = p_x \hat{e}_x + p_y \hat{e}_y, \text{ zato dobimo}$$

$$c^* \vec{\sigma} \cdot (k_x \hat{e}_x + p_y \hat{e}_y + eyB\hat{e}_x) \Psi_k(y) = E \Psi_k(y)$$

$$c^* \left( (k_x - |e|yB) \sigma_x + p_y \sigma_y \right) \Psi_k(y) = E \Psi_k(y)$$

$$c^* \left( -|e|B \left( y - \frac{k_x}{|e|B} \right) \sigma_x + p_y \sigma_y \right) \Psi_k(y) = E \Psi_k(y)$$

$y - \frac{k_x}{|e|B}$  je premik  $\Psi$  v prosti smeri.

Kot običajno uvedemo

$$\sigma_+ = \sigma_x + i\sigma_y$$

$$\sigma_- = \sigma_x - i\sigma_y$$

in potem

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(\sigma_+ + \sigma_-)$$

$$\sigma_y = \frac{1}{2i}(\sigma_+ - \sigma_-)$$

Ta dva spreminjata z komponento (pocelo pro.) in računamo naprej.

$$c^* \left[ \left( -|e|B(y - y_0) - ip_y \right) \frac{\sigma_+}{2} + \left( -|e|B(y - y_0) + ip_y \right) \frac{\sigma_-}{2} \right] \Psi_k = E \Psi_k$$

Kot običajno za harmonski potencial uvedemo

• kretnijski:  $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{x}{x_0} + i \frac{p_x}{\hbar} \right)$

• amilacijski:  $a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{x}{x_0} - i \frac{p_x}{\hbar} \right)$

$$y_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{|e|B}}$$

$$-\frac{\hbar c^*}{\sqrt{2} y_0} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{y - y_0}{y_0} + i \frac{p_y}{\hbar} \right) \sigma_+ + \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{y - y_0}{y_0} - i \frac{p_y}{\hbar} \right) \sigma_- \right) \Psi_k = E \Psi_k$$

In to je premeščen harmonski oscilator.

Definiramo  $\tilde{y} = y - y_0$  in  $p_{\tilde{y}} = p_y$ .

Potem zapisemo  $z = a + a^\dagger$ ,

$$-\frac{\hbar c^*}{2\epsilon_0} (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) \Psi_K(y) = E \Psi_K(y)$$

in uvedemo  $\omega_c = \sqrt{\frac{2|e|Bc^*z}{\hbar}}$ , kar je precej drugače kot klasično, kjer smo imeli  $\omega_c = \frac{e|B|}{m}$

$$-\frac{\hbar c^*}{2} (a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-) \Psi_K(y) = E \Psi_K(y) \quad \sigma_+ = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$-\hbar\omega_c \begin{bmatrix} 0 & a \\ a^\dagger & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_{KA}(y) \\ \Psi_{KB}(y) \end{bmatrix} = E \begin{bmatrix} \Psi_{KA}(y) \\ \Psi_{KB}(y) \end{bmatrix} \quad \sigma_- = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Imamo dve enačbi, pisano krajše  $\Psi_{KA}(y) = \Psi_A$

$$\left. \begin{aligned} -\hbar\omega_c a \Psi_B &= E \Psi_A \\ -\hbar\omega_c a^\dagger \Psi_A &= E \Psi_B \end{aligned} \right\} -\hbar\omega_c a^\dagger \frac{-\hbar\omega_c a \Psi_B}{E} = E \Psi_B$$

Dobimo enačbo  $\hbar^2 \omega_c^2 a^\dagger a \Psi_B = E^2 \Psi_B$ ,

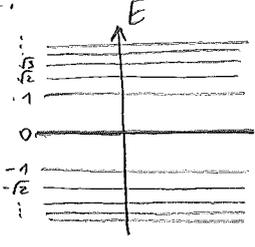
ki je skorajda enačba za običajen harmonski oscilator (malo kvadriran, brez  $\frac{1}{2}$ ).

$$E^2 = \hbar^2 \omega_c^2 N, \quad E = \hbar\omega_c \sqrt{N}$$

(pri kvantni  $N$  pa  $N + \frac{1}{2}$  namesto  $N$ ).

Ta relativistični oscilator nima več enakovredno razmaknjenih nivojev. Za večje  $N$  so nivoji zmeraj bližje.

$N$  ni število delcev, le pove nam katere energije so dovoljene.

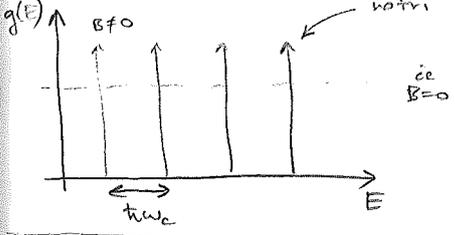


Pri harmonskem oscilatorju nikoli  $E=0$ .

Dovoljene so tudi  $E>0$ , tu pa

$E>0$  in  $E<0$ .

Spominimo se kvantnega Hallovega pojava. Notri je  $\frac{2|e|B\hbar}{h}$  elektronov



Kvantni Hallov pojav pri grafenu.

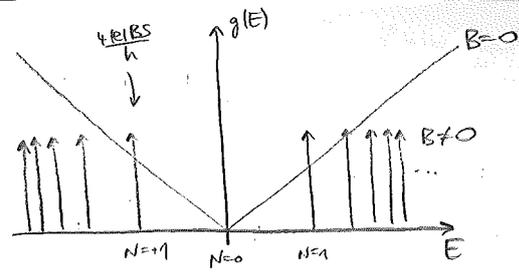
Najprej brez polja,  $B=0$ .

Potem je  $E = \pm \hbar c^* q$



$$g(E) = \frac{dN}{dE} = \frac{2\pi g dg}{(2\pi/L)^2 dE} \cdot 2 \cdot 2 = \frac{S}{\pi} \frac{g dg}{dE} = \frac{S}{\pi} \frac{E}{\hbar c^*} \frac{dE}{\hbar c^*}$$

Gostota stanj za grafen:  $g(E) = \frac{S \cdot 2|E|}{\pi \hbar^2 c^*{}^2}$



Sistemom s tako  $g(E)$  pri  $B=0$  rečemo polkovine, semimetals. (Niti kovina, niti polprevodnik!)

Pri  $B \neq 0$  bomo dobili  $\delta$ -funkcije, diskretna stanja. Koliko  $e^-$  je v vsakem takem stanju lahko?  $\tilde{y} = y - y_k, y_k = \frac{\hbar k}{\hbar B}, \Psi(\tilde{r}) = e^{i k x} \Psi(y)$

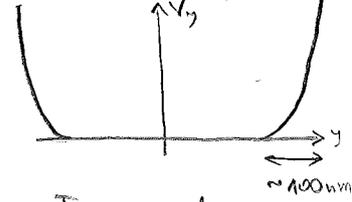
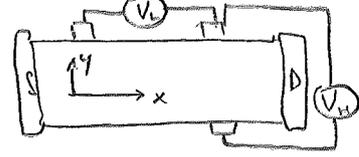
$y_k$  mora biti znotaj našega sistema.

Degeneracija ostane enaka kot pri kvantnem Hallu, le se pomnoži s 2 zaradi  $K, K'$ .

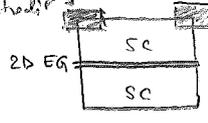
Zato v vsaki  $\delta$ -funkciji:  $\frac{4|e|B\hbar}{h}$ .

Pri FTS smo pokazali, da 1D kristal ni stabilen in podobno se da pokazati za 2D kristal. Ne obstaja popoln 2D kristal, pojavijo se veliki valovi, grafenska struktura je valovita. Zato (in še drugi razlogi) so se  $\delta$ -funkcije razširile. V limiti  $B \rightarrow \infty$  se razširjene  $\delta$ -funkcije res izprecejajo v  $\nabla \nabla$

Meritev izvedemo podobno kot prej, vendar,



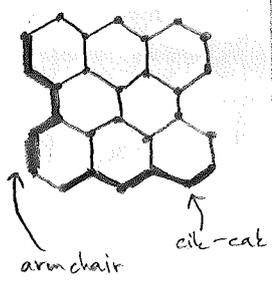
Tudi potencial podobno. To naredijo tako, da 2D elektronskemu plinu ( $E_G$ ) dodajo elektроди. Ti dve potem vplivata na 2D EG.



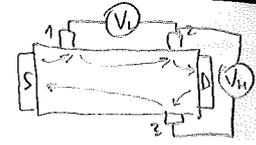
$$\varphi(\tilde{r}) = \int S(\tilde{r}') \frac{e}{4\pi\epsilon_0 |\tilde{r} - \tilde{r}'|} d^3\tilde{r}'$$

Potencial je koncentracija gostote naboja na elektrodah in na 100nm se  $\varphi(\tilde{r})$  razmaže. Dobimo blag prehod v potencial.

Ko izrežemo kos grafena, želimo, da ima enega od dveh robov, ki sta prikazana na desni. Ta dva se tudi najlažje "obkrožita", še vedno pa je vse skupaj relativno neurejeno.



Hallova napetost:

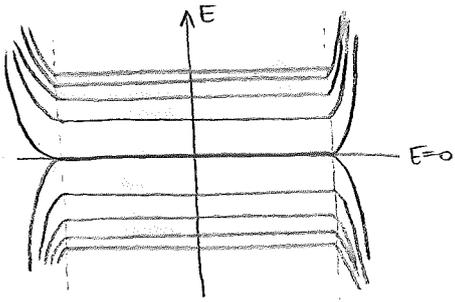


$$\begin{bmatrix} -I \\ 0 \\ 0 \\ I \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_3 \\ V_1 \\ V_2 \\ V_0 \\ V_3 \end{bmatrix} \cdot \frac{4e^2}{h} \left( M - \frac{1}{2} \right)$$

zardi presega karala. Pri  $E=0$  gre potencial slijdi

Enačbe moramo reševati ob prisotnosti roba. Zdaj je drugače kot prej, moramo se vrniti k približni tesni vezi. Upoštevamo še robni pogoj za potencial,  $V_y$ :

la dobimo  $G_H = \frac{4e^2}{h} \left( M - \frac{1}{2} \right)$

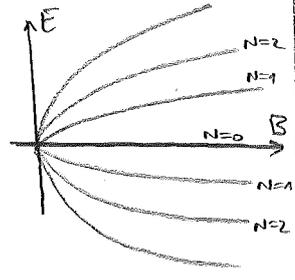


Srednje stanje,  $E=0$ , se na robu razcepi.

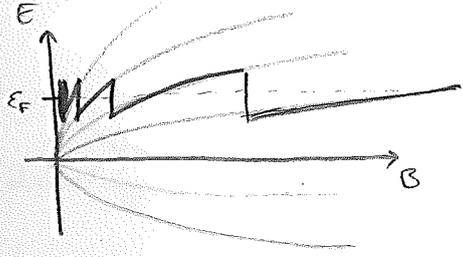
Zadnjič smo imeli pri 2DEG:



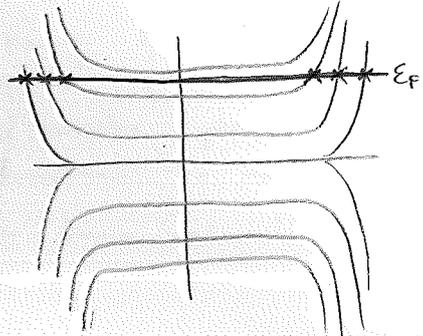
Pri grafenu je  $w_c \propto \sqrt{B}$  in  $E = \pm \hbar w_c \sqrt{N}$  zato so nivoji konusni.



Pri  $E_F = 0$  so nivoji  $E_{C0}$  polni, tisti nad 0 pa prazni. S spreminjanjem  $B$ -ja se nič ne spremeni, ni tistega preskakanja. Z elektrodo pa lahko tudi spreminjamo dosežemo  $E_F < 0$  ali  $> 0$ .



Zdaj dobimo preskakanje.

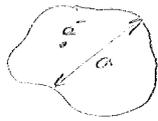


Potem spet pridemo do te situacije.

# KVANTNE PIKE QD (quantum dot)

Območje v prostoru, kjer so ujeti elektroni. Če hoče elektron zapustiti piko, mora tunelirati. Zato jim rečemo tudi umetni atomi. V atomu so stanja kvantizirana.

iz kvantne pismeno  $\Delta E = \frac{h^2}{2ma^2}$



(pri vodniku  $a=a_0$ , pri potencialni jami  $a=a_0$ , sicer pa nekakšna kvantna dolžina.)

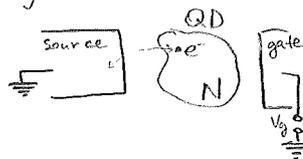
Če imamo več elektronov, se interakcija med elektroni,  $U = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a}$ . Ti dve energijski delci sta primanjljivi. Če je manjša pika, zmaga  $\Delta E$ .

Imamo kovinske ali polprevodne kvantne pike.  $\sim 10^6 e^-$   $\sim 1000 e^-$

Vseeno so polprevodne (po velikosti) reže.

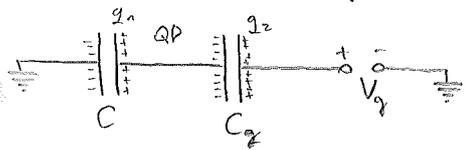
Najprej obravnavajmo le odboj med elektroni,  $\Delta E$  pa zanemarimo.

Imamo drain ampak gate. Sta na različnih napetostih.



Med source in QD elektroni prehajajo malo verjetno, a se vedno mnogi bolj verjetno kot v gate. Source je sicer sklopjen, gate pa se ziblje. Z  $N$  označimo število elektronov v QD. Imamo odvisnost  $N=N(V_g)$

Kvantni piki rečemo tudi enoelektronski tranzistor, ker se prehajajoči elektron tako obrne. Shematsko predstavimo:



Dva kondenzatorja je izbrani, ker pa malo bolj pisa.

Število elektronov v vsaki območju je  $q_2 - q_1 = N|e|$ , velja se  $V_1 + V_2 - V_g = 0$

Elektron hoče tja, kjer je nižja energija.

iz fizike 1:  $E_{es} = \frac{q_1^2}{2C} + \frac{q_2^2}{2C_g}$

Poiskati moramo vezan ekstrem, najmanjšo energijo pri konstantnem potencialu  $V_g$ .

Zato je treba dodati še člen  $-q_2 V_g$ .

To lahko vrnemo kot Legendreovo transformacijo.

Velja  $V_1 + V_2 = V_g$ ,  $\frac{q_1}{C} + \frac{q_2}{C_g} = V_g$ ,  $q_1 q_2 = e|N|$

Združimo vse skupaj,

$q_2 = q_1 + |e|N$ ,  $V_g = \frac{q_1}{C} + \frac{q_1 + |e|N}{C_g} \Rightarrow q_1 = \frac{V_g - |e|N}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}}$

in potem  $q_2 = \frac{V_g + \frac{|e|N}{C}}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}}$ , vstavimo v energijo.

$E_{es} = \left[ \frac{1}{2C} \left( V_g - \frac{|e|N}{C_g} \right)^2 + \frac{1}{2C_g} \left( V_g + \frac{|e|N}{C} \right)^2 \right] \frac{1}{\left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_g} \right)^2} - \left( V_g + \frac{|e|N}{C} \right) \frac{V_g}{\frac{1}{C} + \frac{1}{C_g}}$

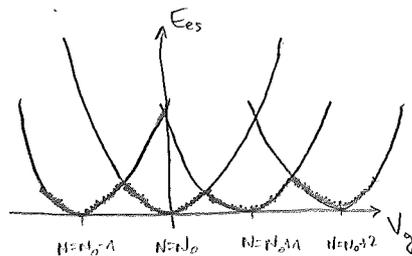
$= \frac{1}{2 \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_g} \right)^2} \left[ V_g^2 \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_g} \right) - 2|e|N V_g \left( \frac{1}{C_g} - \frac{1}{C} \right) + |e|^2 N^2 \left( \frac{1}{C_g^2} + \frac{1}{C^2} \right) - 2V_g^2 \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_g} \right) - 2|e|N V_g \frac{1}{C} \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_g} \right) \right]$

$= \frac{1}{2 \left( \frac{1}{C} + \frac{1}{C_g} \right)} \left[ -V_g^2 + \frac{|e|^2 N^2}{CC_g} - \frac{2|e|N V_g}{C} \right]$

$= \frac{|e|^2}{2(C+C_g)} \left( N^2 - 2N \frac{V_g C_g}{|e|} - \frac{V_g^2 C C_g}{|e|^2} \right)$

stariji pogled kvantit

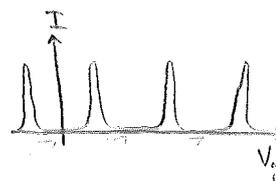
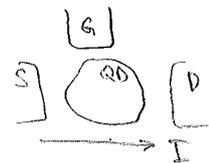
$= \frac{|e|^2}{2(C+C_g)} \left( N - \frac{V_g C_g}{|e|} \right)^2 + \dots$  to ni odvisno od  $N$ , nas re zamina



Minimalna energija je kvadratna z debeljšo orto. Od tu je jasno zakaj se število  $e^-$  spreminja.

Lahko tudi opazujemo tok:

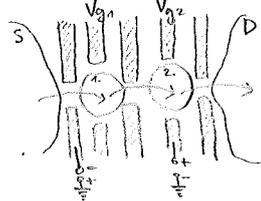
Pri tistih  $V_g$ , kjer se paraboli sekata, in je npr.  $N=N_0$  in  $N=N_0+1$ , tok re stane energijsko nič. Pri minimumih pa se število elektronov ne spreminja in tok je izredno majhen.



Vrhovi toka so enoelctronsko zamaknjeni. Temu pojavu rečemo Coulombska blokada. Sledom pa rečemo Coulombske oscilacije.

## Dvojna kvantna pika (DQD)

Z elektroni se omeji elektrone.



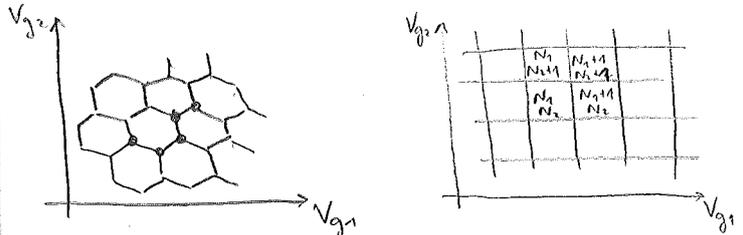
□ s elektroni, na nekem potencialu. Elektron tunelira, kol krajše piscoice.

Če duns k vrtalem pozitivni napetosti, bo e tja raje tuneliral.

Na vpliva le  $V_{g1}$  na 1. kvantno piko, ampak tudi  $V_{g2}$ . Kot pri elektrostatični, naboj na i-tem kondenzatorju:  $q_i = \sum_j C_{ij} V_j$

$$N_1 = N_1(V_{g1}, V_{g2}) \quad N_2 = N_2(V_{g1}, V_{g2})$$

Pri eni piki smo imeli doljice, kjer je  $N$  enak ničemu, tu imamo območja. In sicer šestkotniške. Trivialnejša verzija:

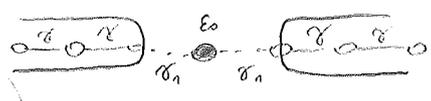


S pikami je označeno stičišče teh območij. Tam je tole stari sistem večji, nič ne stane, da stari teče tole. Izpoljen mora biti pogoj, da gre e<sup>-</sup> plavka na 1. OD, potem plavka na drugo in v druzini.

$$\begin{matrix} N_1 & N_1+1 & N_1 & N_1 & N_1+1 & N_1 & \dots & \text{tako} \\ N_2 & N_2 & N_1+1 & N_2 & N_2 & N_1+1 & \dots & \text{teče} \\ & & & & & & & \text{tako} \end{matrix}$$

Ko se viša temperatura, sistem prevaja tudi v obalici tistih točk.  $k_B T$  nam biti večji od  $\frac{kT}{2(C_1+C_2)}$  ...

Spominimo se:



Tu smo že izračunali tole z Landauerjevo formulo.

Ampak tu nisimo upoštevali interakcije med elektroni. Doda se člen  $U n_1 n_2$ . Zaradi spina in Paulija. Ta model opisuje le kvantne pike, ki dopuščajo  $N=0, 1, 2$ .

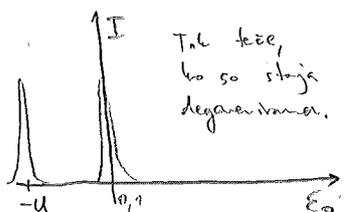
Ampak s tem že zadovoljivo opisujemo realistične kvantne pike (kjer  $N$  lahko tudi 100).

S tem modelom opisujemo le dva vrhova v odvisnosti  $I(V_g)$ . Eden ra 0 & 1 in eden ra 1 & 2.

$$H = U \hat{n}_1 \hat{n}_2 + E_0 (\hat{n}_1 + \hat{n}_2)$$

- ↑↑ 26-U
- ↑ E=E<sub>0</sub>
- ↑ E=E<sub>0</sub>
- E=0

Postavimo  $E_F = 0$ . Pri katerih  $E_0$  teče tok?



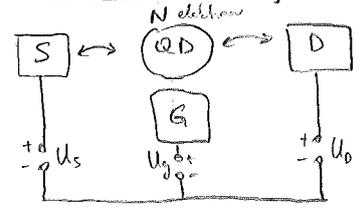
Tak teče, ko so staja degenerirana.

Pri  $E_0 = -U$  je  $E = E_0 = -U \} N=1$   
 $E = E_0 = -U \}$   
 $E = 26-U = -U \} N=2$

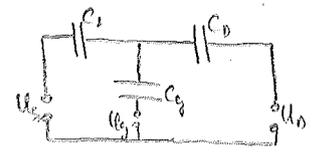
Pri  $E_0 = 0$  pa  $E$  ena pri  $N=0$  in  $N=1$ .

Merljive ledičine dobimo, če priključimo napetost. S tem spravimo sistem iz ravnovesja.

Neravnovesna stanja na kvantni piki.



kojins te smo kvantno piko, za dve smo na vajah videli, da je zelo komplikirano.



To spet naravnost bolj shematsko.

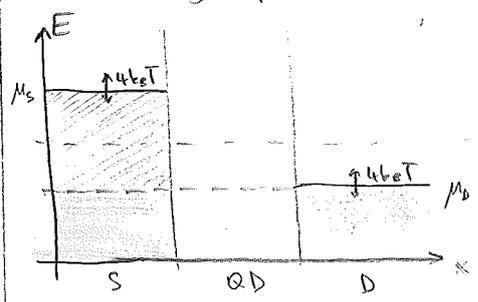
$$H = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C_{DD}} - \frac{q}{C_{DD}} \sum_{DE} V_E, \quad C_{DD} = C_S + C_D + C_G$$

$$H = \frac{kT}{2C_{DD}} N^2 - \frac{kT N}{C_{DD}} (U_g C_G + U_D C_D + U_S C_S)$$

$$E_D = \frac{kT}{C_{DD}}, \quad \tilde{U}_g = \frac{C_G U_g}{kT}, \quad \tilde{U}_S = \frac{C_S U_S}{kT}, \quad \tilde{U}_D = \frac{C_D U_D}{kT}$$

$$\Rightarrow H = \frac{E_D}{2} (N - \tilde{U}_g - \tilde{U}_S - \tilde{U}_D)^2$$

Izberimo  $U_S = \frac{U_{S0}}{2}, U_D = -\frac{U_{D0}}{2}$ , to je se vedno dovolj splošno, da bomo razumeli pranto.



$$\mu(U_{S0}=0)$$

$$\mu_S = \frac{e U_{S0}}{2}$$

$$\mu_D = -\frac{e U_{D0}}{2}$$

Pod  $\mu$  je zazodeno, označeni elektroni pa prispevajo k toku. Na kvantni piki naj bo  $N$  elektronov. Kemijski potencial je enak energiji, ki jo je potrebno dati, da povečamo število delcev za 1.

$$\mu(N) = H(N+1) - H(N)$$

(pri temem pa je to kar energija na rihu razpoložljivega pasu.)

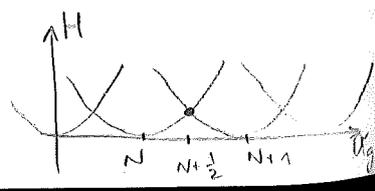
Ker smo napetosti obratni simetrični, je  $\tilde{U}_S + \tilde{U}_D = 0$  in  $H = \frac{E_D}{2} (N - \tilde{U}_g)^2$ . Zato

$$\mu(N) = E_D (N - \tilde{U}_g) + \frac{E_D}{2} = E_D \tilde{U}_g + \frac{E_D}{2}$$

kjer  $\tilde{U}_g = \tilde{U}_g - N$ .

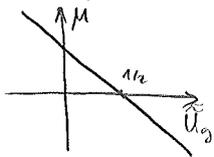
Ko  $\tilde{U}_g = \frac{1}{2}$ , je  $\mu = 0$ ,

talnat je  $\tilde{U}_g = N + \frac{1}{2}$



In to se ujema s sliko od vadnjic, kdaj prazna in kdaj ne.

Kemijski potencial se na kvantni piki spreminja kot kaže slika



In ta potencial mora biti ved  $\mu_0$  in  $\mu_s$ , če želimo da teče tok. To okna bo večje, če je napetost  $U_{so}$  večja.

$$\mu_s > \mu(N) > \mu_0 \quad (\text{to je pri } T=0)$$

Pri  $T > 0$  imamo še malo več svobode.

Če je  $U_g = N + \frac{1}{2}$ , bo pri poljubni majhni napetosti  $\mu(N)$  ravno prazen, ravno vmes in bo lahko tekel tok.

$$H = \frac{E_0}{2} (N - U_g)^2, \quad E_0 = \frac{K^2}{C_g + C_s + C_0}, \quad U_g = \frac{C_g U_{g0}}{e}$$

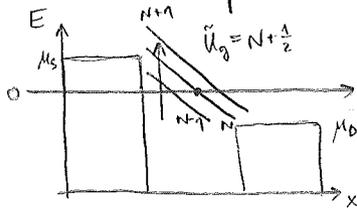
To je bilo za  $U_{so} = 0$ .

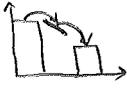
Kaj se zgodi, ko priljubimo napetost?

Važen bo kemijski potencial. Od visjega buda šli elektroni k nižjemu potencialu.

Elektroni prispevajo k transportu le, če je kemijski potencial na kvantni piki ustrešen.

$E_0$  so istega reda velikosti kot ostale energije v sistemu.

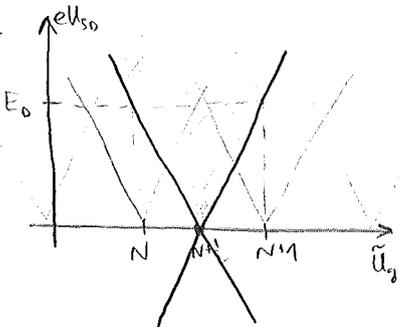


Elektron skozi , lahko je končna energija tudi več kot  $\mu_0$ , ampak ne more biti (pri  $T=0$ ) manjši to je nekaj primerov.

Zahtevamo  $\mu_s > \mu_0(N) > \mu_0$ , otirama

$$\frac{eU_{so}}{2} > E_0 (N + \frac{1}{2} - U_g) > -\frac{eU_{so}}{2}$$

To prikazimo na grafu.

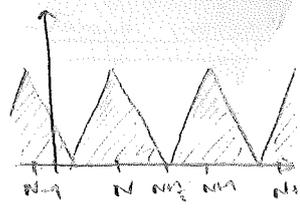


V sivem območju bo tok lahko tekel. Enako tudi za druge  $N$ -je.

V sivem območju:  
 $N \rightarrow N+1 \rightarrow N$   
 $\uparrow \quad \uparrow$   
 $S \rightarrow QD \quad QD \rightarrow D$

Vmes so območja, kjer tok ne teče. Temu rečemo Coulombska blokada in premagamo jo z ustrešno veliko napetostjo,

$$U_{so} = \frac{E_0}{e}$$

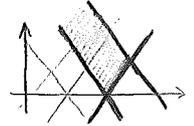


Pri dovolj veliki napetosti imamo na voljo dovolj energije, da preskočita dva (ali več) elektronov na QD, preden gresta naprej na D. Pogoj za to je  $\mu_s > \mu_{00}(N+1)$ .

Če to ni izpolnjeno, pa elektroni skacejo posamezno. To velja za

$$\mu_s < \mu_{00}(N+1), \quad \frac{eU_{so}}{2} < E_0 (N + \frac{3}{2} - U_g)$$

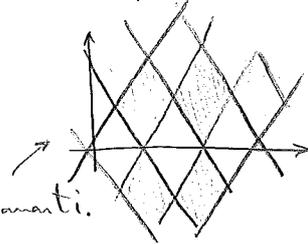
To je še vedno neskončno območje.



Končna območja dobimo z dodatno omejitvijo  $\mu_{00}(N+1) < \mu_0$  (Da ne skočita dva  $e^-$  na D zaporedoma)

Poten dobimo "karo".

To je območje, kjer je dovoljen le tok proces.



Temu rečemo Coulombski diamanti.

Kaj pa lahko pomeni o toku?

Kvantno mehaniko lahko obravnavamo tok kot tuneliranje, izračunamo lahko čas za prehode. Bariere naj bodo visoke, elektroni pa potem na nekem mestu obstane dlje časa.

V kvantni piki je več elektronov, z njimi bo novi elektron interagirjal, pri tem pa prebital na svojo mesto. Prehodi so potem nekoharentni in lahko obravnavamo del računa klasično, delamo le z amplituda

Če bi vse izračunali kvantno, bi ugotovili, da nekaj take vseeno lahko kaže tudi v preprostanjih območjih

za obravnavo zadostna zdaj Master enačba.



Ker mora biti za to  $\mu_s - \mu_D > 0$ , je dodana  $\Phi$ .

Za  $T \neq 0$  bi dobili  $\Delta\mu = \mu_s - \mu_D$

$$P_N^{S \rightarrow D} = \frac{G_s}{e^2} \cdot \frac{-\Delta\mu}{e^{-\beta\Delta\mu} - 1} \xrightarrow{T \rightarrow 0} \frac{G_s}{e^2} \Delta\mu \cdot \Theta(\Delta\mu)$$

To je npr. za STM, kjer kramche pike, le elektrod. Zdag se vrstimo k piki. Pri kovinskih pikah je elektronov več, stajaj več, so bolj na gosto, in lahko obravnavamo kot kontinuum. Pri polprevodniških je tudi kvantizacija.

Elektron gre lahko na katerikoli stanje nad kerijstnim potencialom  $\mu(N)$ .



Za  $P_N^{S \rightarrow D}$  nadarostimo  $\mu_D \rightarrow \mu_{D0}(N)$ . Delas se, kot da so stanja kontinuumsta.

$$\Delta\mu = \mu_s - \mu_{D0}(N) = \frac{eU_{SD}}{2} - E_0 \left( N + \frac{1}{2} - \langle \tilde{n}_D \rangle \right) = \frac{eU_{SD}}{2} + E_0 U_{D0}'$$

To je za  $S \rightarrow D$ .

Za  $S \xrightarrow{N+1} D$ :  $\Delta\mu = \mu_{D0}(N) - \mu_D = \frac{eU_{SD}}{2} - E_0 U_{D0}'$

Za  $S \xrightarrow{N} D$ :  $\Delta\mu = \mu_D - \mu_{D0}(N) = -\frac{eU_{SD}}{2} + E_0 U_{D0}'$

Za  $S \xleftarrow{N+1} D$ :  $\Delta\mu = \mu_{D0}(N) - \mu_s = -\frac{eU_{SD}}{2} - E_0 U_{D0}'$

Pri vseh je  $\mu_{D0}(N)$ , ko obravnavo elektronovina gledati kaj je potek.

Računajmo za zgornji diamant (za spodnjega je enaka/podobna).



Vse  $\Delta\mu$  vstavimo v  $P$  in to v tok.

Za  $T=0$  dobimo

$$I = e \cdot \frac{\frac{G_s}{e^2} \left( \frac{eU_{SD}}{2} + E_0 U_{D0}' \right) \frac{G_D}{e^2} \left( \frac{eU_{SD}}{2} - E_0 U_{D0}' \right)}{\frac{G_s}{e^2} \left( \frac{eU_{SD}}{2} + E_0 U_{D0}' \right) + \frac{G_D}{e^2} \left( \frac{eU_{SD}}{2} - E_0 U_{D0}' \right)}$$

Za  $G_D = G_s$  dobimo

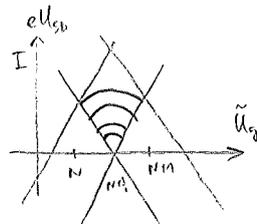
$$I = \frac{G_s}{e^2} \cdot \frac{1}{U_{SD}} \left( \left( \frac{eU_{SD}}{2} \right)^2 - (E_0 U_{D0}')^2 \right)$$

$$I = 0, \text{ ko } \frac{eU_{SD}}{2} = \pm E_0 U_{D0}'$$

Če je  $eU_{SD} > 0$  (zgornji diamant) sta zgornji dovoljena procesa 1 in 2, medtem ko sta 3 in 4 prepovedana.

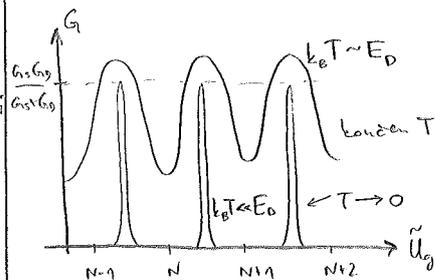
so tokovi v odvisnosti od  $U_{SD}$  pri različnih  $U_{SD}$

Tok je vedno največji v  $U_{SD} = \frac{1}{2}$



izpeljati se da:

$$G = \frac{G_s G_D}{G_s + G_D} \cdot \frac{\beta E_0 U_{D0}'}{2 \text{sh}(\beta E_0 U_{D0}')} = \frac{I}{U_{SD}} \quad \text{za } U_{SD}, |eU_{SD}| \ll E_D$$



Enako je pri vseh  $N$  je periodično. Vsaj v teoriji (v polprevodnikih že ni več tako)

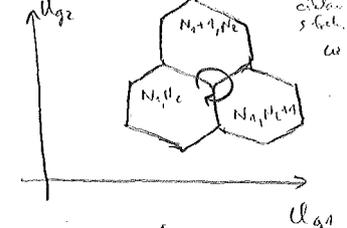
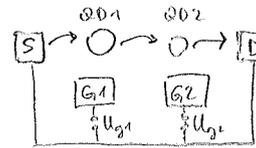
Ko  $T$  se nanaša se razlike se manjšajo, vrhovi se stržijo. Pri  $T \rightarrow \infty$  pa je  $G$  dvakrat višji kot  $\frac{G_s G_D}{G_s + G_D}$  in konstanten.

Ta pojav bi se v prihodnosti izkoristilo za tranzistor. Pri nizki  $T$  se pri najhujši spremeni napetosti na gate elektodi dobimo veliko spremembo toka. To je vse kar rabimo za tranzistor. Zaenkrat smo v  $\sim 100$  mK območju, kar je za splošno uporabo premajhno.

Te postope delajo tako, da naredijo ogrevano rezijo, potem pa gor vžrejo molekule / namenske in najdejo take, ki se se upr. primerno ujela. Ko bomo uspeli to narediti pri sobni temp. bo uporaba tudi zato, ker bo porabila veliko manj energije kot današnji sistemi.

Ker je prevodnost v minimumu močno odvisna od temperature, lahko to uporabimo tudi kot termometer za območje  $< 1K$ .

Zdag pa se k dvema kvantitima pikama, kjer se uporaba obeta že kar kmalu.

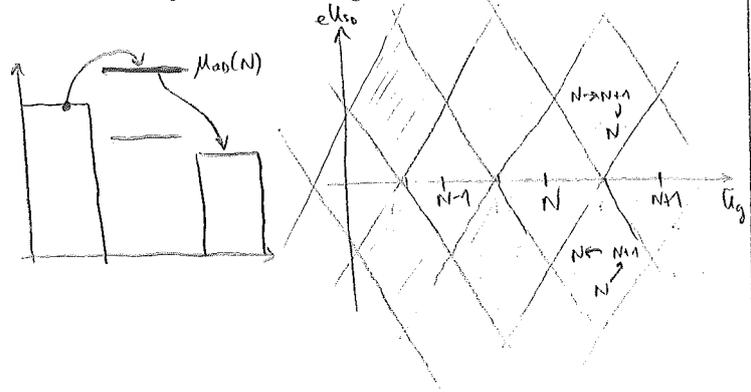


Greva po omejeni poti na grafu. Potem v evan ciklu ravno prevosimo elektron iz S na D. To je naravno tudi na shemi. Zato teže tol tudi, ko nimamo napetosti med S in D. Vendar pa se ne sčuna po ciklu vrteki prehitro! Elektron za prehod rabiti nekaj časa,  $\tau = (P_{N1}^{S \rightarrow D})^{-1}$  pri prehod. Zato mora biti  $\omega \ll \tau$ .

W pa tudi ne sme biti premajhna. V tem primeru bi pri nenicelni T elektron odditundiral lahko naraj.

Pri vsem tem smo zamemarili procese, kjer koherentno prehodita hkrati dva ali več elektronov.

S tem bi lahko bolj natančno definirali amper, saj lahko stojamo posamezne elektrone



Da bi skočili na višji nivo bi rabili dodatno energijo. To je "kvsiter energijskega zabave", ki pa je v kvantni mehaniki dovoljena! Važno je le, da smo v tistem stanju dovolj malo časa,  $\tau \approx \frac{\hbar}{E}$

Za proces na levi strani imamo

$$P \approx P_N^{s \rightarrow ds} \cdot \left( P_{N \pm 1}^{ds \rightarrow s} \frac{\hbar}{E_0} \right)$$

To je zelo približno. To je prehod višjega reda, koherenten prehod iz S na D direktno. Poteka prek virtualnega stanja.

Angleško temu procesu rečemo cotunneling.

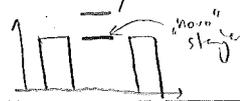
To obstaja tudi pri T=0, to nagaja pri tisti novi definiciji ampere (7 vaj).

Zato tam vrnemo več kvantnih pike, potem teh pojavov res praktično ni več.

Če je na najnižjem nivoju še en elektron na kvantni piki, lahko ta proces spin obrne:  $\downarrow \uparrow \rightarrow \uparrow \downarrow$  ali  $\uparrow \uparrow \rightarrow \uparrow \downarrow$  ali  $\downarrow \downarrow \rightarrow \downarrow \uparrow$

Ko vse upoštevamo, se spin manj hitro in imamo dva fermiona skupljiva v singlet, ni skupnega spina.

Do tega pojva pride, če sta  $\mu_0$  in  $\mu_1$  dovolj blizu.



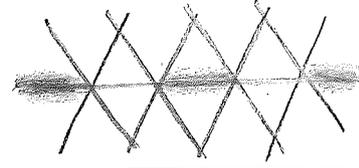
Cel proces potem nekoliko ustvari dodatno stanje na Fermijevem potencialu.

Kondena temperatura:  $k_B T_K = \frac{\sqrt{\mu}}{2} e \frac{E_d(E_d + \mu)}{\mu}$

Uv  $E_0$  in  $E_d$  v  $U_g$  so začetne energijske stane,  $T_K$  je neka nova energijska skala, ki jo dobimo s kombinacijo starih.

Ker je eksponent na desni ni perturbativen, zato se moramo reserati preostankljeno. Podobno kot superprevodnost.

Kondov pojav je pojavitev novega stanja na višini  $\mu$ . To dobimo le v primeru like zasedenosti, zgoraj nam še biti en  $\bar{e}$ . Zato se to pojavi le v vsakem drugem diametri. Veljati mora še  $E_k < k_B T_K$  in  $T < T_K$ .



SUPERPREVODNE ELEKTRODE

$H = \frac{p^2}{2m}$ ,  $\psi(x) = e^{ikx}$ ,  $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

Zanimivi sta le območji ob Fermijevi energiji. Le to je pomembno za fiziko, ki jo obravnavamo tu.

Razvijmo disperzijo do prvega reda okrog  $k_F$ .

$E_F + \delta E = \frac{\hbar^2}{2m} (k_F + \delta k)^2 = E_F + \frac{\hbar^2 k_F}{m} \delta k$

in če uporabimo Fermijev hitrost,  $v_F = \frac{\hbar k_F}{m}$ ,

$\delta E = \hbar v_F \delta k$ , linearno oblog tistih točk!

Če bi razvijali oblog  $-k_F$  bi dobili  $\delta E = -\hbar v_F \delta k$ , nič presentljivega.

Osnovno stanje našega sistema je Fermijeva morje, ki ga dobimo z  $N_A$  (condensatim) številom kreacijstih operatorjev iz Factorovega vakuumu. Fermijeva morje preglasišmo za nov vakuum, kamo delca in luknje. Če spredaj linearno luknje, se energija poveča, zato imamo disperzija oblike  $\sqrt{V}$ ,  $\sqrt{V}$ ,  $\sqrt{V}$ .

Za elektrone in luknje imamo operatorje

• elektroni:  $\hat{H}_e = \hat{H} - E_F$

• vrzeli:  $\hat{H}_h = -(\hat{H} - E_F)^*$

(ie se najbolj spreminjajo, namreč konjugirani, vrzeli imajo nasprotno energijo.)

Kakšni operatorji dajo isto disperzijo kot smo jo dobili v linearizaciji? To sta

$H_e = \mp i\hbar v_F \partial_x$

$H_e \tilde{\psi}_e = \pm \hbar v_F \partial_k \tilde{\psi}_e$

$H_h = \pm i\hbar v_F \partial_x$

$H_h \tilde{\psi}_h = \mp \hbar v_F \partial_k \tilde{\psi}_h$

To je vse in obliki  $\pm k_F + dk$ .

Ko obravnavamo, moramo spustiti resitve  $\pm$  negativno energijo. Tako ostane na  $\sqrt{V}$ .

Zakaj je vse to dobro? Ker lahko dodamo superprevodnost preprosto.

Zdaj imamo  $\begin{bmatrix} H_e & 0 \\ 0 & H_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e \\ \tilde{\psi}_h \end{bmatrix} = \delta E \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e \\ \tilde{\psi}_h \end{bmatrix}$

Superprevodnost dodamo tako:

$\begin{bmatrix} H_e & \Delta e^{i\varphi} \\ \Delta e^{-i\varphi} & H_h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e \\ \tilde{\psi}_h \end{bmatrix} = \delta E \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e \\ \tilde{\psi}_h \end{bmatrix}$

Za izpeljavo potrebujemo BCS. Tega ne bomo. Poglejmo, da s to  $\Delta$  dobimo gap, ki je značilen za superprevodnike.

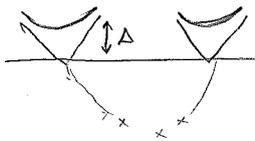
$+k_F: \begin{bmatrix} -i\hbar v_F \partial_x & \Delta e^{i\varphi} \\ \Delta e^{-i\varphi} & i\hbar v_F \partial_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e \\ \tilde{\psi}_h \end{bmatrix} e^{i\delta k x} = \delta E \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e \\ \tilde{\psi}_h \end{bmatrix} e^{i\delta k x}$

(vstavili smo nastanek  $\tilde{\psi}_h = \tilde{\psi}_e e^{i\delta k x}$ )

Determinanta mora biti nič in dobimo

$\delta E = \sqrt{\Delta^2 + (\hbar v_F \delta k)^2}$

In res je gap.



Ko dodamo nov delec v superprevodnik nam nihi energijo vsaj  $\Delta$ , kerati pa to ne bo več vrzel ali elektron. Pač pa bo to cela mešanica tega, to so kvazi delci, niso Cooperjevi pari.

To se zgodi zaradi ekvipitivnosti, zaradi izven diagonalnih členov.

Kračnjaj se namerje  $\frac{\tilde{\psi}_h}{\tilde{\psi}_e} = \frac{\hbar v_F \delta k}{\delta E}$

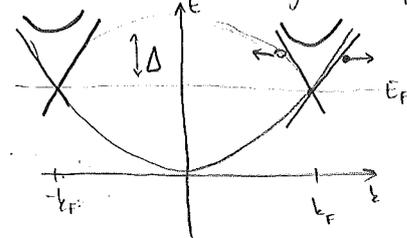
$\frac{\tilde{\psi}_h}{\tilde{\psi}_e} = -\frac{\hbar v_F \delta k - \delta E}{\Delta e^{i\varphi}} = e^{-i\varphi} \left( \frac{\delta E}{\Delta} - \frac{\sqrt{\delta E^2 - \Delta^2}}{\Delta} \right)$

Kako bomo to uporabili pri normalizaciji?

Stabilni bomo navadna kovina in superprevodnik

$\frac{\Delta=0}{\Delta \neq 0} \quad N \mid SP \quad \text{in} \quad p^n \quad N \otimes SP$

in računalni odbojnost, prevodnost, transmissivnost



Vrzel se giblje levo, čeprav je  $\delta k_F > 0$ . Elektron se giblje desno.

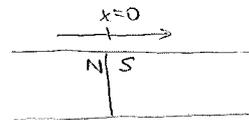
Bogoljubov-de Gennes

$H_{\pm k_F} = \begin{bmatrix} i\hbar v_F \partial_x & \Delta e^{i\varphi} \\ \Delta e^{-i\varphi} & -i\hbar v_F \partial_x \end{bmatrix}$

$H_{\pm k_F} \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e \\ \tilde{\psi}_h \end{bmatrix} = \delta E \begin{bmatrix} \tilde{\psi}_e \\ \tilde{\psi}_h \end{bmatrix}$

$H_{\mp k_F} = \begin{bmatrix} -i\hbar v_F \partial_x & \Delta e^{i\varphi} \\ \Delta e^{-i\varphi} & i\hbar v_F \partial_x \end{bmatrix}$

$\psi(x) = e^{\pm i k_F x} \tilde{\psi}(x)$



Če bi imeli problem rešeni v več dimenzijah,

bi dobili pročne valovne funkcije. Pri nizkih vrednostih  $E_F$  bi bil zasaden le prvi kanal in bi imeli spet 1D problem.

Kakšen je  $G$ ?  $\delta E > 0$

Ko vpadne elektron:  $\ominus \rightarrow$

$\begin{bmatrix} e^{i\delta k x} \\ 0 \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} 0 \\ e^{-i\delta k x} \end{bmatrix}$  se odlije vrzel.

To bo potrdil račun zaradi nobenih pogojev na meji S in N.

Ko vpadne luknja, se odlije elektron.

$\ominus \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ e^{i\delta k x} \end{bmatrix} + r \begin{bmatrix} e^{-i\delta k x} \\ 0 \end{bmatrix}$

Zanimivo bo tudi, ko  $\delta E < \Delta$ . Takrat:

iz disperzije  $\delta E = \sqrt{\Delta^2 + (\hbar v_F \delta k)^2}$  lahko izračunamo

$\delta k = \frac{\sqrt{\delta E^2 - \Delta^2}}{\hbar v_F} = i \frac{\sqrt{\Delta^2 - \delta E^2}}{\hbar v_F} \equiv i g$

zato je val. vektor par imaginarni, kar se pomeni...

Pr.  $x > 0$  je zato  $\begin{bmatrix} \psi_e^0 \\ \psi_h^0 \end{bmatrix} e^{-ix}$

Pobni pogoj: zahtevamo le nermnost. Na namena zahtevati zvesnosti odvoda, ker je enačba le prvostopenjska. Zato

$$\psi(0^-) = \psi(0^+)$$

$$\textcircled{e} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 \\ t_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_e^0 \\ \psi_h^0 \end{bmatrix}, \text{ zato } r_e = \frac{\psi_e^0}{\psi_h^0}$$

$$\textcircled{h} \rightarrow \begin{bmatrix} r_h \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \psi_e^0 \\ \psi_h^0 \end{bmatrix}, \text{ zato } r_h = \frac{\psi_e^0}{\psi_h^0}$$

$$r_e = \frac{\psi_h^0}{\psi_e^0} = e^{-i\varphi} \left( \frac{\Delta E}{\Delta} - i \frac{\sqrt{\Delta^2 - \Delta E^2}}{\Delta} \right) = e^{-i\varphi} e^{-i\alpha} = e^{-i(\varphi+\alpha)}$$

če vpeljamo  $\frac{\Delta E}{\Delta} = \cos \alpha$ , je torej  $r_e = e^{-i(\varphi+\alpha)}$ ,

kjer je  $\varphi_e = -\varphi - \arccos \frac{\Delta E}{\Delta}$ .

Podobno  $r_h = e^{i\varphi_h}$ , kjer  $\varphi_h = \varphi - \arccos \frac{\Delta E}{\Delta}$

$$R_e = |r_e|^2 = 1, \quad R_h = |r_h|^2 = 1$$

upoštevati namena  $H_{12}$  za vrzel, čeprav gre za desno

Elektron gre, odbije se vrzel. Kaj pa dimerizirani naboj? Manjkata dva elektrona, v bistvu sta šla v Cooperjev par. Tega v tej izpeljavi ne vidimo, ker se nismo natančno lotili teh eksitacij.

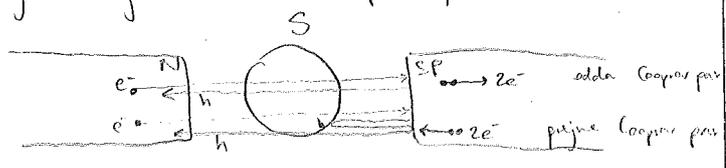
Temu odboju rečemo odboj Andrejeva.

Kvazidelci (eksitacije) ne prodrejo v SP stanje. Ampak saj se tam pojavijo Cooperjevi pari. Prevednost je potem vseeno nenulna.

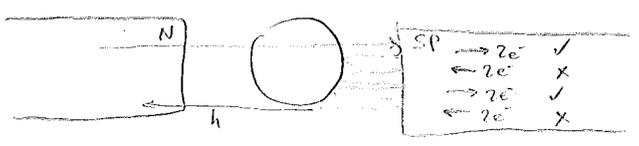
$$G = \frac{4e^2}{h}. \text{ Bred SP namo } \frac{2e^2}{h}, \text{ zaradi spina.}$$

Zdaj lahko vtrni posiljeno vrzeli ali elektrone, dojejo v druga merilna spina, v Cooperjevem paru pa je spin verzan.

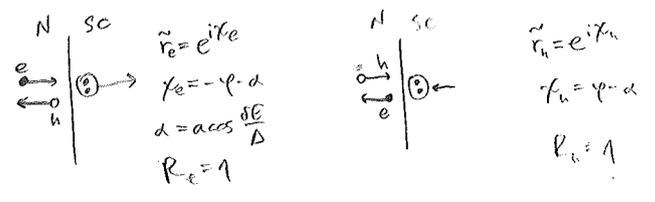
Zdaj inčino se sipalec, S.



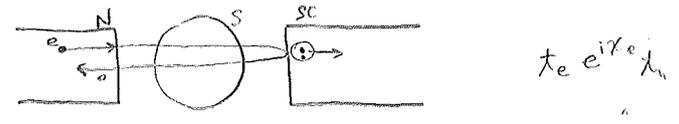
Vmes se lahko lahko se odbija.



Prevedna le vsaka druga opcija, pri sodih se pa nič ne dogaja, ne teče tok.  $\Delta E < \Delta$

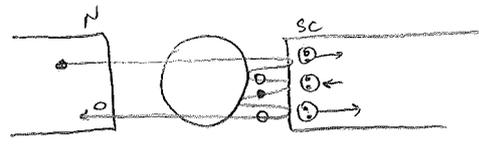


Če se elektron odbije na sipalec, se odteje kot elektron in ta ne prispeva k toku. Prvi člen, ki prispeva k toku, je



Kakšna je amplituda za to proces?

$$S_e = \begin{bmatrix} r_e & t_e \\ t_e & r_e' \end{bmatrix}, \quad S_h = \begin{bmatrix} r_h & t_h \\ t_h & r_h' \end{bmatrix}$$



Zdaj je amplituda  $t_e e^{i\varphi_e} r_h' e^{i\varphi_h} r_e' e^{i\varphi_e} t_h$  dodatok, ki ga dobimo v vsaki smeri.

Če sestavimo vse amplitude dobimo geometrijsko vrsto in vsota je

$$\tilde{r}_e = \frac{t_e e^{i\varphi_e} t_h}{1 - r_h' e^{i\varphi_h} r_e' e^{i\varphi_e}} \quad R_e = |\tilde{r}_e|^2$$

h prevednost  $G = \frac{4e^2}{h} R_e$ . Sicer v prevednosti običajno transmisivnost, ampak zdaj imamo tam se Cooperove pare, ki jih ne obravnavamo. Zato je pač  $R_e$ , se tako izide.

Hamiltonijan za vrzeli je

$$\begin{aligned} (H - E_F) \psi_e &= \Delta E \psi_e \\ -(H - E_F)^* \psi_h &= \Delta E \psi_h \end{aligned}$$

To se da v splošnem izpeljati za dvojje. Pri vsiji kvantni smo vrzeli dobili tako, da smo zamajali kreacijski in anihilacijski operator. Če gremo nazaj v prvo kvantno pa dobimo tak Hamiltonijan.

Spodnja enačba konjugiramo.

$$(H - E_F) \Psi_h^* = -\delta E \Psi_h^*$$

Prepostavimo si to je lahko odvisno od energije. Na tu je  $S$  (sipalna matrica) in vrstici so  $\Psi_h^*$  enaka kot  $S_e$  pri energiji  $-\delta E$ .

$$\Psi_h^* \begin{matrix} \xrightarrow{A_1} \\ \xleftarrow{B_1} \end{matrix} \square \begin{matrix} \xleftarrow{A_2} \\ \xrightarrow{B_2} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = S \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_h \begin{matrix} \xleftarrow{A_1^*} \\ \xrightarrow{B_1^*} \end{matrix} \square \begin{matrix} \xrightarrow{A_2^*} \\ \xleftarrow{B_2^*} \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} B_1^* \\ B_2^* \end{bmatrix} = S^* \begin{bmatrix} A_1^* \\ A_2^* \end{bmatrix}$$

Pri konjugirani se obrne tudi smer ravnih valov. Ampak spomnimo se, če ima vrzel pozitivni valovni vektor, se premika v negativno smer. Tako so  $A$ -ji spet vpadni,  $B$ -ji izhodni.

$$\text{Zato } S_h(\delta E) = S_e(-\delta E)^*$$

Cilj pri vsem tem je, da bi razumeli Josephsonov stik. Pri tem imamo nek. vrzeli ali izolator vmes.

Priznati bomo, da sipalna matrica ni odvisna od energij, pri tistih energijah, ki nas zanimajo. To je v redu, saj ne pričakujemo velikih resonančnih energij.

Od energije bi bilo odvisno pri kvantnih pihah, če bi imeli piko na sipalec.

(Tam je silno odvisno od levijskih potencialov.)

$$\tilde{r}_e = \frac{t t^* e^{i\phi}}{1 - r^* r e^{i(\phi_e + \phi_h)}} = \frac{T e^{i\phi}}{1 - R e^{2i\phi}} = \frac{T e^{i\phi}}{1 + R}$$

$$\text{za } \delta E \ll \Delta \text{ je } \alpha = \arccos \frac{\delta E}{\Delta} = \frac{\pi}{2}$$

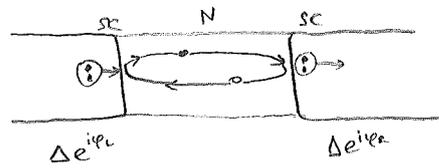
$$G_{N,SC} = \frac{4e^2}{h} \frac{T^2}{(1+R)^2} = \frac{4e^2}{h} \frac{T^2}{(2-T)^2}$$

To lahko primerjamo z  $G_{N,N} = \frac{2e^2}{h} T$ , kar je najenostavnejša (le en kanal) oblika Landauer-Buttikerjeve formule.

$$\text{V primeru } T=1: \frac{4e^2}{h} > \frac{2e^2}{h}$$

$$\text{V primeru } T \ll 1: \frac{e^2}{h} T^2 \ll \frac{2e^2}{h} T$$

Zdaj imajmo na obeh straneh superprevodnik, vmes navadno kovino (sipalec).



V vsakem takem cilju gre en Cooper par čez.

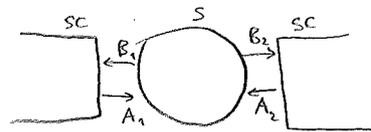
To je v bistvu kar Josephsonov stik.

Ta faza  $e^{i\phi}$  je valovna funkcija Cooperjeve para. To pride iz BCS, težko je potem povezati z makroskopsko valovno funkcijo, itd.

Josephsonov električni tok je odvisen od faze,  $I_2(\phi)$ ,  $\phi = \phi_L - \phi_R$ .

Valovna funkcija tega elektrona se v SC eksponentno zmanjšuje. Zato je to vrzelo stanje in imamo diskreten spekter.

V resnici imamo na sredini izolator, sipalec, ne le kovine kot smo imeli zdaj.



Priznamo  $S \neq S(\delta E)$

$S$  je  $2 \times 2$  matrica,  $B$  in  $A$  sta vektorji

$$\underline{B}_e = \underline{S} \underline{A}_e$$

$$\underline{B}_h = \underline{S}^* \underline{A}_h \quad \text{in} \quad \underline{A}_e = \underline{e}^{i\phi_h} \underline{B}_h$$

$$\underline{A}_h = \underline{e}^{i\phi_e} \underline{B}_e$$

Zakaj sta  $\underline{e}^{i\phi_h}$ ,  $\underline{e}^{i\phi_e}$  matrici:

$$A_{h2} = e^{i\phi_h} B_{e2}$$

$$A_{h1} = e^{i\phi_h} B_{e1}$$

$$\text{in} \quad \begin{bmatrix} A_{h1} \\ A_{h2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{i\phi_h} & 0 \\ 0 & e^{i\phi_h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_{e1} \\ B_{e2} \end{bmatrix}$$

Imamo sistem linearnih enačb, če vse združimo,  $B_e, B_h, A_e, A_h$ . Ta bo rešljiv, če je determinanta enaka nič. In to se zgodi pri diskretnih vrednostih energije. Je enostavno, a dolgo, ne bomo izpoljali.

Rezultat je 
$$\delta E = \pm \Delta \sqrt{1 - T \sin^2 \frac{\phi}{2}}$$

Le pri teh dveh energijah je možen prenos, ki je narisano na vrhu strani.

Do zdaj smo z negativnimi energijami vedno dobili stanja, ki so že zasedena, zato so "mrtva" stanja, jih ni treba upoštevati. To tu pa so dodatna stanja, in spet je stanje z negativno energijo zasedeno, s pozitivno pa ne. Ker je pri nas Fermijeva energija enaka nič.

Vakuum je najgledljivejši stanje, obravnava se v 2. kvantizaciji in tega ne bomo.

Tok skozi naš sistem bi lahko računali tako, da računamo tok skozi S, preč valovne funkcije lam. Potem je treba še normalizirati, itd. Kar zapleteno.

Bomo drugače.

Imejmo hamiltonijan, ki mu dodamo konstanto, +V<sub>0</sub>. Valovna funkcija se spreminja

$$\psi \rightarrow \psi e^{-i \frac{V_0}{\hbar} t} \quad V_0 = eV$$

To je v kvantni 1 gauge transformacija. Ampak superprevodnik ima to simetrijo klamfena. Sprememba potenciala se pozna.

$$\psi_{cp} \rightarrow \psi_{cp} e^{-2i \frac{V_0}{\hbar} t} = \psi_{cp} e^{-2i \frac{eV}{\hbar} t}$$

To je valovna funkcija Cooperovega para.

Brez dokaza: Ta faza je ravno izvendiagonalni element v  $\begin{bmatrix} H_0 & \Delta \\ \Delta^* & H_0 \end{bmatrix}$

Zato  $\varphi = -\frac{2eV}{\hbar} t = \frac{2|e|V}{\hbar} t$ , faza se linearno spreminja.

Kasneje bomo rabili  $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{2|e|V}{\hbar}$ ,

za račun toka v odvisnosti od faze...

Moč, ki se troši na stiku:

$$P = V \cdot I = \frac{dE}{dt} = \frac{dE}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dE}{d\varphi} \frac{2|e|V}{\hbar}$$

$$I = \frac{2|e|}{\hbar} \frac{dE}{d\varphi} = \frac{K \Delta}{2\hbar} \frac{T \sin \varphi}{\sqrt{1 - T \sin^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

Če napetost poganja tok, se pač troši moč.

ko ni napetosti, DC Josephsonov efekt, nesušen tok. Ko imamo napetost pa oscilira tok.

### OSNOVE KVANTNEGA RAČUNALNIŠTVA

Malo manjšano področje, da bomo potem predstavili realizacijo s superprevodnimi gradniki.

Če imamo valovno funkcijo  $|\psi\rangle$  se ta razvija z unitarno transformacijo  $|\psi\rangle \mapsto U|\psi\rangle$ ,

$$U = e^{-i \frac{H}{\hbar} t} \quad \text{za} \quad H \neq H(t), \quad \text{sicer} \quad U = T e^{-i \int H(t) dt}$$

(časovno urejen produkt)

z unitarno transformacijo izvedemo algoritem. In potem z meritvijo dobimo rezultat.

Pogledajmo si en algoritem, ga bomo na vajah implementirali.

Najmanjši zanimiv kvantni sistem je delec s spinom  $\frac{1}{2}$ , ki ima dve prostostni stopnji.

$$|1\rangle = |0\rangle \quad \text{in} \quad |b\rangle = |1\rangle,$$

$$|1\rangle = a|1\rangle + b|b\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle = \cos \frac{\vartheta}{2} |0\rangle + \sin \frac{\vartheta}{2} e^{i\varphi} |1\rangle$$

Stanje lahko izrazimo z dvema realnima konstantama,  $\vartheta$  in  $\varphi$ .

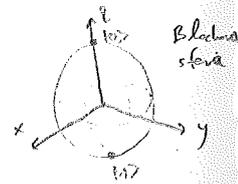
Če izmerimo spin,  $\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma}$ , dobimo

$$\langle \sigma_x \rangle = \sin \vartheta \cos \varphi$$

$$\langle \sigma_y \rangle = \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$\langle \sigma_z \rangle = \cos \vartheta$$

Klasični bit je lahko le v stanju 0 ali 1, tu smo pa kjeredi na sferi.



V kubitnu je ogromno informacij, a jih z meritvijo ne moremo kar pridobiti. Zato sta začetnik znana bolj kot ne dva uporabna algoritma. (Shorov in Groverjev.)

Dva kubita:  $|\psi\rangle = a|11\rangle + b|1b\rangle + c|b1\rangle + d|bb\rangle$

ker  $4 = 2^2$ , za N kubitov pa  $2^N$ .

Za praktično uporabo algoritmov bomo potrebovali ~1000 kubitov. Takrat je U matrica velikosti  $2^{1000} \times 2^{1000}$ . Stanjširati take transformacije je težko, sploh ker jih je tako veliko. Dovolj pa je, če imamo na voljo osnovne operacije. Izkaže se, da  $U = U_n U_{n-1} \dots U_1$ . V spletnem je teh sestavnih delov eksponentno. To ni uporabno za realizacijo. Omejiti se moramo le na algoritme, ki zahtevajo polinomsko število sestavnih delov. Kaj pa so te osnovne operacije?

o Enostavna enokubitna vrata:

$$H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} + V_0, \quad V_0 = \text{konst.}, \quad \vec{\mu} \cdot \vec{B} \approx \mu_B B \vec{\sigma} \cdot \hat{n}$$

$$e^{-i \frac{H}{\hbar} t} = e^{-i \frac{V_0}{\hbar} t} e^{-i \frac{\mu_B B}{\hbar} t \vec{\sigma} \cdot \hat{n}} = e^{i\varphi} e^{i \frac{\vartheta}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{n}} = \begin{bmatrix} e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\vartheta}{2} & i \sin \frac{\vartheta}{2} \hat{n} \cdot \vec{\sigma} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(ker komutirata)

uporabno  $\varphi, \vartheta/2$

skupna faza  $\varphi$

operacije  $\cos \frac{\vartheta}{2} \mathbb{1} + i \sin \frac{\vartheta}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{n}$

$R_{\hat{n}}(\vartheta)$ , S tem lahko kubit postavimo v poljubno stanje.

Če delamo le take operacije, potrebujemo zelo majhen prostor. Stanje je po teh operacijah še vedno produktivno (če na začetku  $100\dots0$ ), za kar rabimo  $2N$  parametrov. Namesto  $2^N$ .

Zato potrebujemo vrata, ki deloplojajo dva kubita. Dovolj je imeti CNOT vrata.

• CNOT (controlled-NOT) dvo-kubitna vrata.

$$\begin{aligned}
 |00\rangle &\mapsto |00\rangle \\
 |01\rangle &\mapsto |01\rangle \\
 |10\rangle &\mapsto |11\rangle \\
 |11\rangle &\mapsto |10\rangle
 \end{aligned}
 \quad U_{\text{CNOT}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

S to matrico prestavimo linearno superpozicijo v reko druge superpozicije.

Narodna evolucivna operacija

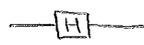


NOT bi bila  $\text{---} \text{---}$

$$\begin{aligned}
 |0\rangle &\mapsto |1\rangle \\
 |1\rangle &\mapsto |0\rangle
 \end{aligned}
 \quad \text{To dosežemo z } \hat{n} = (1, 0, 0), \text{ potem } \vec{\sigma} \cdot \hat{n} = \sigma_x, \text{ vzememo še } \phi_B = \pi, \phi_0 = -\frac{\pi}{2}$$

Hadamardova vrata pa dobimo za

$$\phi_B = \pi, \hat{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$



Potem je

$$\cos \frac{\phi_B}{2} + i \sin \frac{\phi_B}{2} \vec{\sigma} \cdot \hat{n} = i \vec{\sigma} \cdot \hat{n} = i \frac{\sigma_x + \sigma_z}{\sqrt{2}}$$

i-ja se znebimo s  $\phi_0 = -\frac{\pi}{2}$ , dobimo  $U_H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

CNOT naredimo preko Heisenbergove sklopitve, lahko  $H = -J \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$ , še boljše pa kar anizotropna sklopitve,  $H = -J S_{1z} S_{2z}$ , kar je Isingova sklopitve.

$$\text{CNOT} = e^{-i\frac{\pi}{4}} R_y^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right) R_z^{(1)}\left(\frac{\pi}{2}\right) U_{\text{Heis}}\left(\frac{\pi}{4}\right) R_z^{(2)}\left(-\frac{\pi}{2}\right) R_y^{(1)}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$$

↑  
to pomeni  $e^{\frac{i}{\hbar} J S_{1z} S_{2z} t}, \frac{J t}{\hbar} = \frac{\pi}{4}$

Zdaj opišimo Deutschov algoritem.

Imamo funkcijo  $f: \{0,1\} \rightarrow \{0,1\}$ , možne so

štiri različne:	$f_4$	$f_2$	$f_3$
	$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1$	$0 \mapsto 1, 1 \mapsto 0$	$0 \mapsto 0, 1 \mapsto 1$
	$1 \mapsto 0, 0 \mapsto 1$	$1 \mapsto 0, 0 \mapsto 1$	$1 \mapsto 1, 0 \mapsto 0$
	konstanti	uravnovešeni	

Ne vemo, katere funkcije se skrivajo v  $\boxed{f_3}$

Ugotoviti želim, ali je uravnovešena ali ne. Koliko izračunov moramo narediti, da ugotovimo kaj je notri? Dva, izračunano na 0 in 1, in ugotovimo.

Če imamo  $2^N$  vhodnih podatkov, imamo 2 konstantni in  $\binom{2^N}{2}$  uravnovešeni.

Klasično potrebujemo  $2^{N-1} + 1$  izračunov.

Kvantno bo zadostoval le en korak, da ugotovimo, ali imamo konstanto ali uravnovešeno.

Črna skatla naj bo taka (torej bo zadovoljena notri take):

$0 \oplus 0 = 0$
$0 \oplus 1 = 1$
$1 \oplus 0 = 1$
$1 \oplus 1 = 0$

$$|x\rangle|y\rangle \xrightarrow{U} |x\rangle|f(x) \oplus y\rangle$$

Kakšen bi bil  $U$ , če imamo  $f_1$ ?

$$\begin{aligned}
 |0\rangle|0\rangle &\mapsto |0\rangle|0\rangle \\
 |0\rangle|1\rangle &\mapsto |0\rangle|1\rangle \\
 |1\rangle|0\rangle &\mapsto |1\rangle|0\rangle \\
 |1\rangle|1\rangle &\mapsto |1\rangle|1\rangle
 \end{aligned}
 \quad \text{torej identiteta, } U = I_{4 \times 4}$$

Pri  $f_2$  pa:

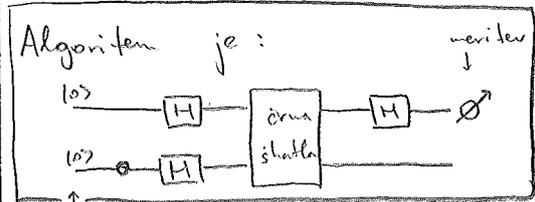
$$\begin{aligned}
 |0\rangle|0\rangle &\mapsto |0\rangle|1\rangle \\
 |0\rangle|1\rangle &\mapsto |0\rangle|0\rangle \\
 |1\rangle|0\rangle &\mapsto |1\rangle|0\rangle \\
 |1\rangle|1\rangle &\mapsto |1\rangle|1\rangle
 \end{aligned}
 \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Pri  $f_3$ :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pri  $f_4$ :

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



inicializacija, ki je običajno  $|00\rangle$  tudi pri drugih algoritmih. Začetek:  $|00\rangle$

Po NOT<sub>2</sub> imamo  $|01\rangle$ .

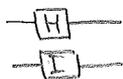
Po H imamo  $\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$  in  $\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$ .

Pred črno skatlo:  $\frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle)$

Po črni skatli:

$$\begin{aligned}
 f_1: \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) & \quad f_4: \frac{1}{2}(|01\rangle - |00\rangle + |10\rangle - |11\rangle) \\
 f_2: \frac{1}{2}(|01\rangle - |00\rangle + |10\rangle - |11\rangle) & \quad f_4 = -f_1 \\
 f_3: \frac{1}{2}(|00\rangle - |01\rangle + |10\rangle - |11\rangle) & \quad f_3 = -f_2
 \end{aligned}$$

Potem izvedemo



$$H \otimes I$$

in matrica te unitarne transformacije je  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Po  $f_1$  imamo  $\frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}$  in po  $f_2$  imamo

$\frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} \otimes \frac{-|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}$ . In  $f_3 = -f_2$ ,  $f_4 = -f_1$ . Na

ločeni stanji lahko razdelimo, ker nimamo prepletenega stanja. Za to pa je postrelbel algoritem. Ko na prvem kubitu naredimo

Hadamarda, dobimo  $H \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}} = |0\rangle$  in

$H \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}} = |1\rangle$ . To dobimo tako, da upoštevamo

$$H^2 = \mathbb{1}, \text{ oziroma } H = H^{-1}.$$

Tako nam predenitrijo  $\pm|0\rangle$  ali  $\pm|1\rangle$  na izmenjavo (prva) kubita.

Funkcija v prvi skatli je konstantna ( $f_1$  ali  $f_4$ ), če dobimo  $|0\rangle$  in uvarstevana ( $f_2$  ali  $f_3$ ), če dobimo  $|1\rangle$ .

V primeru dveh kubitar smo pokazali le dualnost, pri več kubitih bi bil napredek še večji.