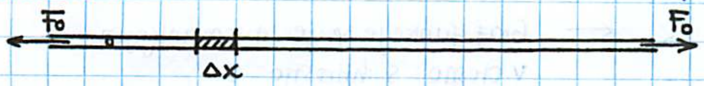
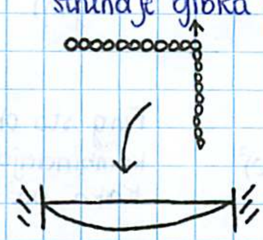
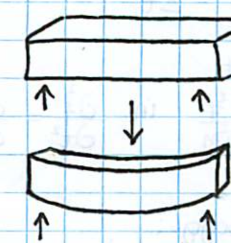
STRUNA

struno napnemo

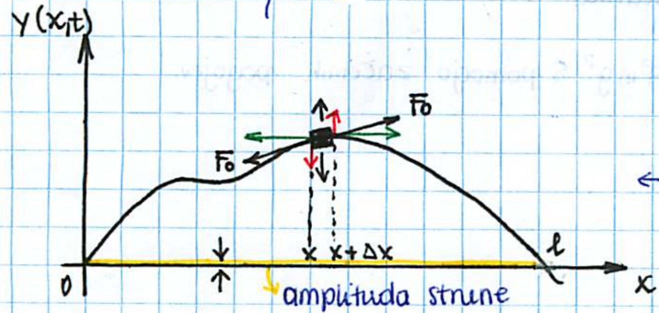


Struna je gibka vrvica (ne pa tista struna na kitari)





$\Delta m = \rho S \Delta x$



← ni matematična struna (gibanje naše strune ↕)

Začetni pogoji: $y(x,0) = y_0(x)$

$\Delta m \ddot{y} = \Delta F_y + g\Delta m$

razlika med rdečima puščicama (vodoravne sile nas ne zanimajo)

$g = -|g|$

↳ poves zaradi lastne teže je skoraj zanemarljiv, ker je sila F_y veliko večja

desna stran: $F_y = F_0 \tan\varphi \sim F_0 \varphi \sim F_0 \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x+\Delta x} + \mathcal{O}\left(\frac{dy}{dx}\right)$ ← Po taylorju, vedar višje odvode zanemarimo!

leva stran: $F_y = F_0 \left.\frac{d}{dx}\right|_x$

Ali je leva stran enaka desni?

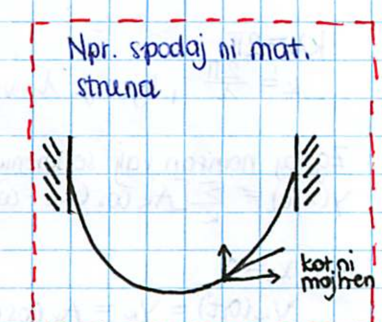
$$\rho S \Delta x \ddot{y} = F_0\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{dy}{dx}\right|_x\right) \quad /:\Delta x$$

$$\rho S \ddot{y} = F_0 \frac{\left(\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{dy}{dx}\right|_x\right)}{\Delta x} = F_0 y'' = F_0 \frac{d^2y}{dx^2}$$

Končna enačba:

$$\boxed{\text{Enačba strune} - \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + g + (\dots)}$$

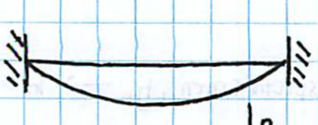
D'Alembert (1717 - 1783)



$c^2 = \frac{F_0}{\rho S}$ hitrost valovanja

prava struna (upoštevati moramo še dolžino l)

(a) Poves strune (Struna se povesi zaradi svoje teže. Miruje.)



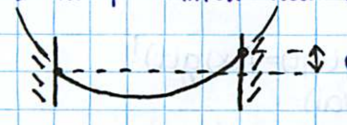
$\ddot{y} = 0$

$c^2 \frac{d^2y}{dx^2} = g$

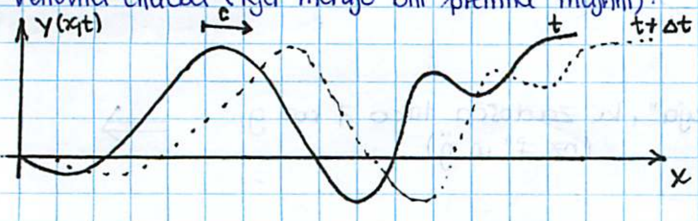
$y = ax^2 + bx + d$ (parabola je oblika povešene strune)

Robni pogoj, tj. odmik = 0. $\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \to 0$

Lahko pa bi imeli tudi odmik:



Valovna enačba (kjer morajo biti premiki majhni):



D'Alembert:

$y'' = \frac{1}{c^2}\ddot{y}$ oz. $\underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}_{\text{odvod po kraju}} = \frac{1}{c^2}\underbrace{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}_{\text{odvod po času}}$

Rešitev za neskončno struno, kjer torej ni robnih pogojev:

$y = f(x-ct) + g(x+ct)$ $\quad \eta = x \pm ct$; $f(\eta)$, $g(\eta)$

$\Delta x = c\Delta t$

$c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$

← Graf funkcije y je premaknjen v desno s hitrostjo c.

$\eta = x \pm ct$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \eta}$ in $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 \eta}(\pm c)^2$

F in g sta oba (kot linearna kombinacija) rešitev y! Kako pa določimo f in g? S pomočjo začetnih pogojev.

Začetni pogoji:

$y(x,0) = y_0(x)$

$\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{t=0} = v_0(x)$ ← hitrost v navpični smeri

$\Longrightarrow$ Določimo f in g! ....

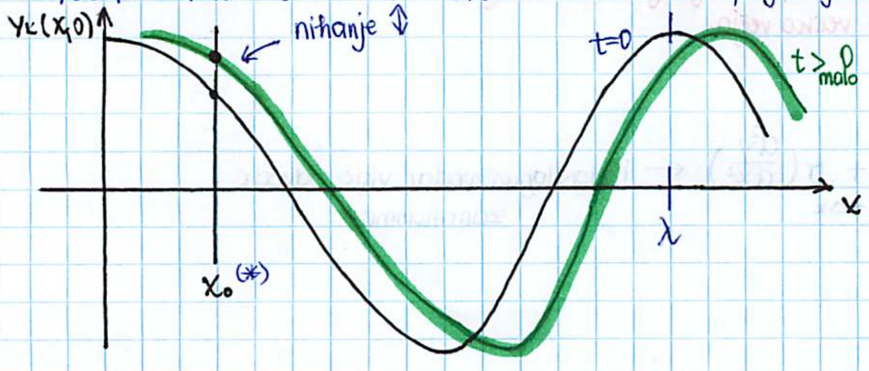
(b) sinusni val

(imamo podano - spodaj - standardno obliko $y(x,t)$ odvisno od ω)

$y_k(x,t) = A_k \cos(kx - \omega t) = A_k \cos\left(k\left(x - \frac{\omega}{k}t\right)\right)$, kjer je $\frac{\omega}{k} = c$ oz. $\omega = k \cdot c$.

k ~ valovni vektor (v našem primeru le število zaradi 1D).

A_k odvisen od zač. pogojev



$k\lambda = 2\pi$

$k = \frac{2\pi}{\lambda}$, kjer je λ valovna dolžina.

Zgoraj narisan val se imenuje potujoči val (če je $k<0$, potuje v levo)

$y(x,t) = \sum_k [A_k \cos(kx - \omega t) + B_k \sin(kx - \omega t)]$ ~ FOURIERJEVA ANALIZA

(*) $x_0 = 0$

$y_k(0,t) = y_k = A_k \cos \omega t$ (nihanje navzgor-navzdol)

KONČNA STRUNA (ROBNI POGOJI)

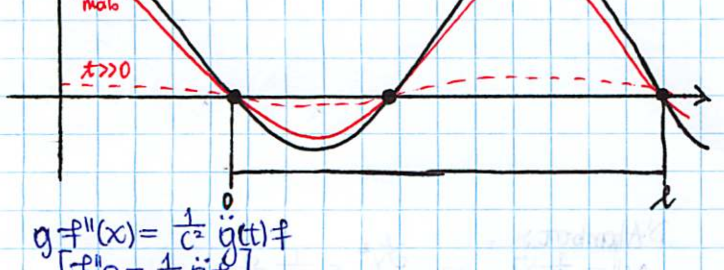
(c) stoječi sinusni val

$y(x,t) = A\cos(kx - \omega t) + B\cos(-kx - \omega t)$, npr. $A=B$:

$= 2A \cos \omega t \cos kx = \tilde{A}(t) \cos kx$, kjer $\tilde{A}(t) = 2A \cos \omega t$.

Tedaj $A\cos(kx - \omega t)$ in $B\cos(-kx + \omega t)$ predstavljata vala, ki se gibljeta v nasprotni smeri, tj. → in ←.

($\cos \omega t$ kontrolira obliko!)



Robni pogoji:

Togo vpeta struna:

$y(0,t) = 0$

$y(l,t) = 0$

$y'' = \frac{1}{c^2}\ddot{y}$

Iščemo lastno rešitev $y(x,t) = f(x)g(t)$!

(↑ očitno ni potujoči val)

$g f''(x) = \frac{1}{c^2}\ddot{g}(t) f$

$[f'' g = \frac{1}{c^2}\ddot{g} f]$

$\frac{f''}{f} = \frac{1}{c^2}\frac{\ddot{g}}{g} = K$

(... x) le funkcije kraja

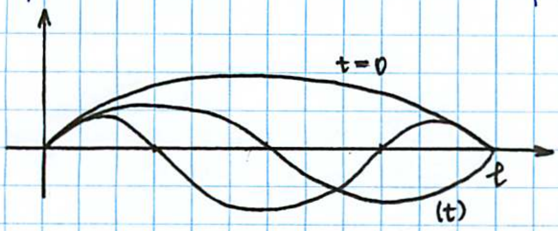
(... t) le funkcije časa

K... konstantna "funkcija", ki zadošča tako f kot g. (oz. f'' in $\ddot{g}$) $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow f'' = Kf$, če $K = -|K|$: $f = A\cos kx + B\sin kx$
$\ddot{g} = c^2 K g$ $\qquad g = \tilde{A}\cos\omega t + \tilde{B}\sin\omega t$

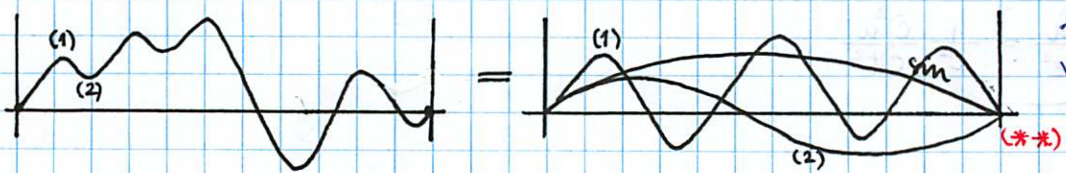
POZOR: Lahko imamo tudi hiperbolične rešitve.

$y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$
$y(l) = B\sin kl = 0 \Longrightarrow kl = \pi + M\cdot 2\pi$, $M \in \mathbb{Z}$



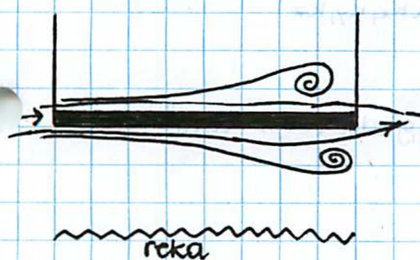
(t) Ob vsakem času, bo oblika krivulje f vedno enaka

struna



Val lahko zapišemo kot drugih vsoto valov.

Tacoma Narrows Bridge – 7. november 1940



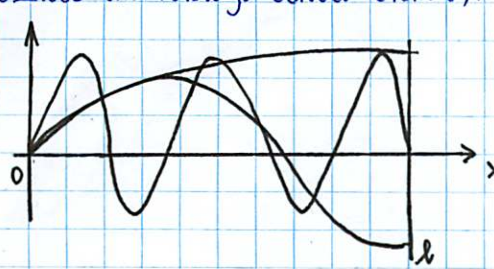
Most je ob vetru hitrost cca 70 km/h začel močno nihati, prešel v resonanco (slabo dušenje) in se porušil (vrtinci zraka pod in nad mostom).

popravili z!

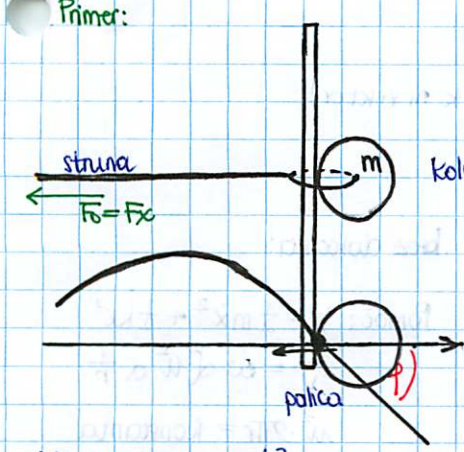
Youtube: Tacoma Narrows Bridge

(**) Robni pogoj: (odmik=0)
$y(0) = y(l) = 0$

Druga možnost (na robu je odvod enak 0):
$y(0) = 0$
$y'(l) = 0$



Primer:



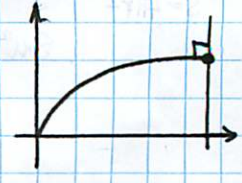
- v vodoravni smeri se sile uničijo
- odmik je lahko velik, paziti moramo le, da je naklon majhen.
- gibanje brez trenja
- $y'' = \frac{1}{c^2}\ddot{y}$
- • zbrana vsa masa ??

Kaj je robni pogoj?
$m\ddot{y}(l,t) = F_y(t) = -F_0 \tan f = -F_0 y'(l,t)$; npr.: $y(0) = 0$, $\ddot{y}(l,t) = K y'(l,t)$ in $m \to 0$ (m ... masa koleščka)

Bolj ukrivljena struna ima večji drugi odvod kraja po času, tj. pospešek.

Če je kolešček zelo majhen, tj. da gre njegova masa $\to 0$, potem ta „zelo rad" sledi struni. V navpični smeri torej ne bo sile, zato bo struna vedno — (glej sliko!). Struna ne more biti poševno, ker je kolešček prelahek, tj. odvod je enak 0.

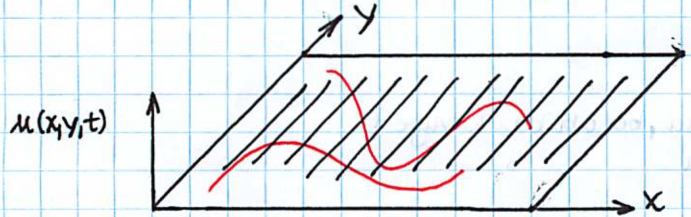
$\Longrightarrow y'(l,t) \to 0 \Longrightarrow$



VALOVANJE V VEČ DIMENZIJAH

2 dimenziji – opna.

Model: Na dan okvir napnemo lahko, gibko opno:



Valovna enačba:

$$\underbrace{\frac{\partial u^2(x,y,t)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}}_{\text{Forma: ukrivljenost}}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

• sinusni val na opni oz. ravni val

$$u(x,y,z,t)=A\cdot\cos(\underbrace{\vec{k}\cdot\vec{r}}_{d}-\omega t)$$

(tak primer je zvok)

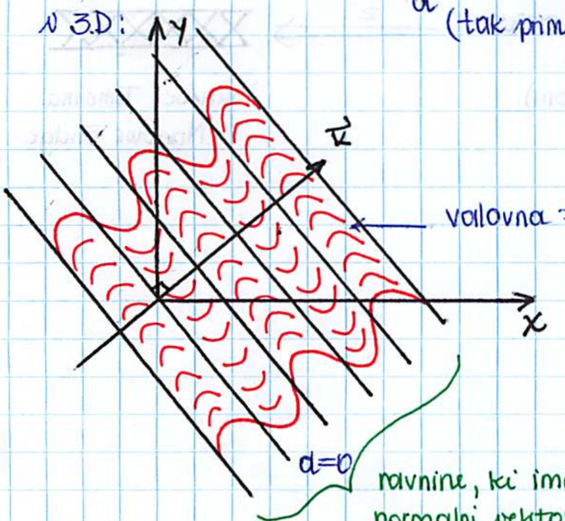
$\vec{k}$ ~ valovni vektor ; $\vec{k}=(k_x,k_y,k_z)$

$\vec{k}\cdot\vec{r}=d$

↓

normala na ravnino, ki „gleda ven iz lista"

v 3D:



ravnine, ki imajo enak $\vec{k}$ (oz. normalni vektor), različen je le d. Ko d teče, se ravnine „pretakajo" oz. „ravnine" se gibljejo v smeri $\vec{k}$.

•• 2D krožni val (seštejemo valovanja v vse možne smeri)

$$u(x,y,t)=\frac{A\cos(kr-\omega t)}{\sqrt{r}}$$

; k ni vektor!!

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

brez dokaza!

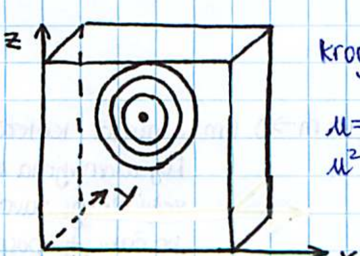
Val, ki mu s časom amplituda pada (voda + kamenček)

Pomoč: $W=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+\frac{1}{2}kx^2$

$\underline{W}=\omega\ \alpha\ u^2\ \alpha\ \frac{1}{r}$

$u^2\cdot 2\pi r=$ konstanta

∴ 3D



krogelni val (koncetrične krogle)

$$u=\frac{A}{r}\cos(kr-\omega t)$$

$$u^2\propto\frac{1}{r^2}$$

$S=4\pi r^2$

$Su^2\propto\frac{1}{r^2}\cdot r^2=$ konstanta

Pri krogelnem valu amplituda pada z korenom razdalje (r), tj. $\sqrt{r}$.