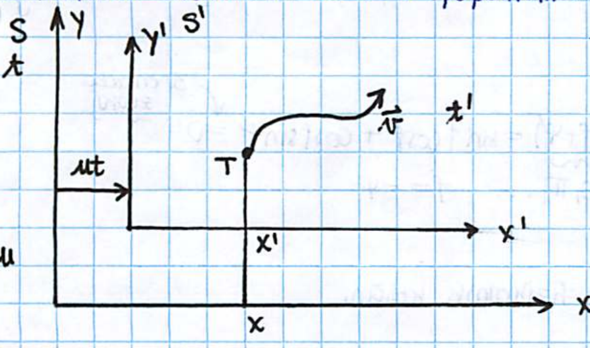
2. Galilejeva transformacija

Dan imamo koordinatni sistem S - laboratorijski koordinatni sistem (npr. sistem x,y pripet na učilnico) in koordinatni sistem S' (vozičeк s koordinatnim sistemom), ki se giblje glede na S.
Dani imamo tudi uri, ki sta sinhronizirani.
Koordinatna sistema se ob $t=0$ popolnoma pokrivata (voziček je v izhodišču koordinatnega sistema).



u... hitrost k. sistema S'
$t'=t$ (imamo uri, ki merita isti čas za S in S')

S: $\vec{r}=(x,y,z)$; t
S': $\vec{r}\,'=(x',y',z')$, $t'=t$

dogodek, četverec ^4r (beri: „r štiri")

Vprašanje ob četvercu je, kako so koordinate S in S' povezane med seboj?

$x=x'+ut'$ ← Pod pogojem, da se koordinatna sistema ob času $t=0$ pokrivata.
$y=y'$
$z=z'$
$t=t'$

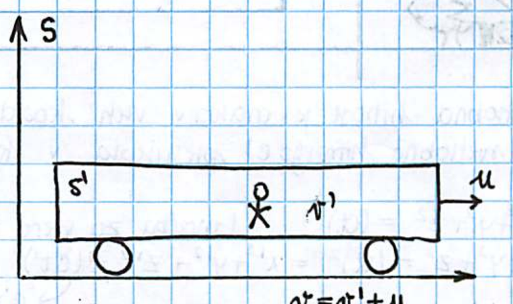
Koordinatna sistema nimata sistemskih sil (ali kakih drugih pospeškov).
$x'=x-ut$

Izkaže se, da transformacija koordinat napačna. Vendar, ali je kaj vseeno prav?
Isti dogodek transformiramo z neko matriko: $^4r' = G\,^4r$
↳ matrika

$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{u}{c} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Hitrosti: $v'=v-u$

$v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$ $\quad \frac{\partial x}{\partial t}$ odvisno, če je gibanje konstantno ali ne

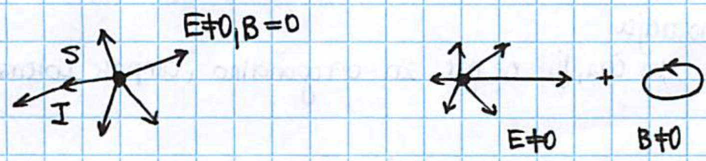


$v'=\frac{dx'}{dt'} = \frac{dx}{dt}' = \frac{d(x-ut)}{dt} = v-u$
ure kažeta enako

OPOMBA: Z svetlobo ni tako!
$c=c-\cancel{u}$ ← narobe

Pri svetlobi Galilejeve transformacije ne veljajo! Pogledamo Maxwellove enačbe.

Npr.



Če se gibljemo na minujoč sistem, vidimo tok (I), ki nam posledično da magnetno polje (silnice se pokvečijo).

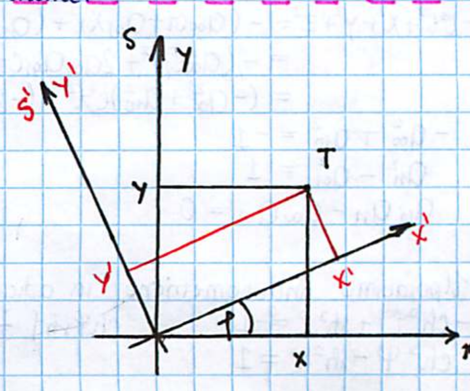
Pospeški: $a'=a$

$a'=\frac{dv'}{dt'} = \frac{dv'}{dt} = a$ (= hitrost je konstantna)
$F'=ma'$ $\quad F=ma$

⟹ Newtonove enačbe za gibanje so v obeh koordinatnih sistemih enake.

3. Rotacije

Sistem S zavrtimo v sistem S'.
$\vec{r}=(x,y,z)$
$\vec{r}\,'=(x',y',z')$
Iščemo transformacijo med $\vec{r}$ in $\vec{r}\,'$, tj. $\vec{r}=R\vec{r}$
↳ matrika



Ortogonalna transformacija:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{00} & C_{01} & 0 \\ C_{10} & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longrightarrow \begin{aligned} &\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{a}'\cdot\vec{b}' \\ &C_{00}^2 + C_{01}^2 = 1 \ \checkmark \\ &C_{10}^2 + C_{11}^2 = 1 \ \checkmark \\ &C_{00}\cdot C_{01} + C_{10}\cdot C_{11} = 0 \\ &C_{00}\cdot C_{10} + C_{01} C_{11} = 0 \end{aligned}$$

Trivialno res zaradi nastavka.

$\longleftarrow$ avtomatsko izpolnjena, či tretja enačba velja.

Nastavek:

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ \sin\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = R = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

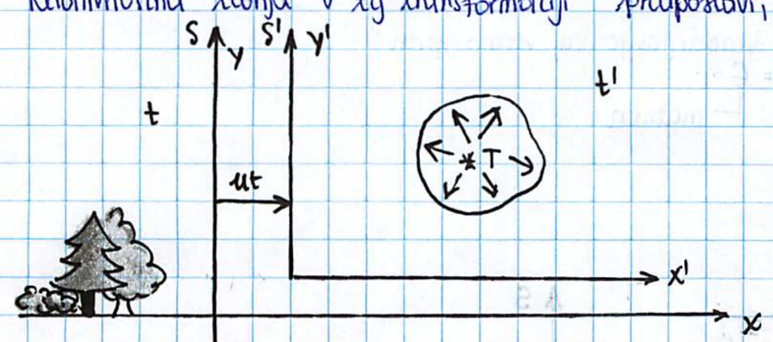
3. enačba zgoraj

$$\underbrace{\sin(\varphi+\psi)}_{0,\pi,\dots,\ \varphi=-\psi} = \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi = 0$$

$$\tfrac{1}{2} m \vec{v}\cdot\vec{v} = \tfrac{1}{2} m v'^2$$ Koordinatni sistem je neodvisen od fizikalnih količin.

Vsi koordinatni sistemi, ki se gibljejo drug na drugega konstantno, so si enakovredni.

4. Lorentzova transformacija
(1854–1912). Poimenoval jo je Poincaré 1905.
Ob času $t=0$ se koordinatna sistema S in S' pokrivata.
S' se premika s konstantno hitrostjo u.
Relativnostna teorija v tej transformaciji predpostavi, da smo dalč stran od gravitacijskega polja.



Pogled na raketo (petardo) od spodaj in iz letala!

Četverec ${}^4r = (ct, x, y, z)$
${}^4r' = (ct', x', y', z')$

Svetlobna hitrost je enaka v vseh koordinatnih sistemih. Torej iščemo transformacijo, ki bo kroglo iz S (s svetlobno hitrostjo c) preslikala v kroglo' (s svetlobno hitrostjo c) iz S'. Iščemo linearni operator.

$x^2+y^2+z^2 = (ct)^2$ (enačba za sfero v S)

$x^2+y^2+z^2-(ct)^2 = x'^2+y'^2+z'^2-(c't')^2 \quad \rightarrow c'=c$

$$\sum_{i=0}^{3}\sum_{j=0}^{3} g_{ij}\, x_i x_j = \sum_{\substack{i=0 \\ j=0}}^{3} g_{ij}\, x_i' x_j'$$

$$= \underbrace{g_{ij} x_i x_j = g_{ij} x'^i x'^j}_{\text{Einsteinova notacija}}$$

časovni del

$$g = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{aligned} x_0 &= ct \\ x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \end{aligned}$$

metrični tenzor

Hkrati pa se bo transformirala koordinata in čas, tj. ne gre za ortogonalno, ampak Lorentzovo transformacijo.

$$\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & 0 & 0 \\ a_{10} & a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} &-c^2t^2 + x^2+y^2+z^2 = -c^2t'^2 + x'^2+y'^2+z'^2 \\ &ct' = a_{00}ct + a_{01}x \\ &x' = a_{10}ct + a_{11}x \\ &y' = y \\ &z' = z \end{aligned}\right\} \text{Vstavimo v zgornjo enakost.}$$

$$\begin{aligned} -c^2t^2+x^2+y^2+z^2 &= -(a_{00}ct + a_{01}x)^2 + (a_{10}ct + a_{11}x)^2 + y^2 + z^2 = \\ &= -(a_{00}^2c^2t^2 + 2a_{00}a_{01}ctx + a_{01}^2x^2) + (a_{10}^2c^2t^2 + 2a_{10}a_{11}ctx + a_{11}^2x^2) + y^2 + z^2 \\ &= (-a_{00}^2 + a_{10}^2)c^2t^2 + (-2a_{00}a_{01} + 2a_{10}a_{11})tcx + (-a_{01}^2 + a_{11}^2)x^2 + y^2 + z^2 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &-a_{00}^2 + a_{10}^2 = -1 \\ &a_{11}^2 - a_{01}^2 = 1 \\ &a_{10}a_{11} - a_{00}a_{01} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} a_{00} &= (\pm)\operatorname{ch}\varphi \\ a_{10} &= (\pm)\operatorname{sh}\varphi \\ a_{11} &= \operatorname{ch}\psi = \operatorname{ch}\varphi \\ a_{01} &= -\operatorname{sh}\psi = -\operatorname{sh}\varphi \end{aligned}$$

Uporabimo trigonometrične in adicijske izraze za hiperbolične funkcije

$-\operatorname{ch}^2\varphi + \operatorname{sh}^2\varphi = -1$

$\operatorname{ch}^2\psi - \operatorname{sh}^2\psi = 1$

$\operatorname{ch}\psi\operatorname{sh}\varphi - \operatorname{ch}\varphi\operatorname{sh}\psi = \operatorname{sh}(\varphi-\psi) = 0 \Longrightarrow \varphi = \psi$

ker sh monotona funkcija

Zanima nas, koliko je φ. Pogledamo, kako se transformira x.

Hitrost sistema je natanko razmerje med koordinato x in časom t: $u = \frac{x}{t}$

$$x' = -\operatorname{sh}\varphi\, ct + \operatorname{ch}\varphi\, x$$
$$x' = 0 = -\operatorname{sh}\varphi \cdot ct + \operatorname{ch}\varphi\, x$$
$$\frac{x}{t} = u = c \operatorname{th}\varphi \implies \operatorname{th}\varphi = \frac{u}{c} \overset{\text{def.}}{=} \beta$$
$$\operatorname{ch}\varphi = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{th}^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \overset{\text{def.}}{=} \gamma \implies \operatorname{sh}\varphi = \beta\gamma$$

Tj. transformacija je odvisna od ene same količine - hitrosti u, s katero se koordinatni sistem giblje!

Kakšno zvezo ima Lorentzova transformacija z Galilejevo transformacijo?

$$L = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -u/c & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$t = t'$

Ker je v Galilejevi transformaciji $t = t'$, koordinata nima nobenega vpliva na čas, tj. čas je neodvisen od ostalih količin.

$x' = -u/c \cdot ct + x = -u \cdot t + x$, tj. koordinata x se je zmanjšala za toliko, kolikor se je vozišček premaknil naprej.

$$+ct' = \gamma ct - \beta\gamma x$$
$$x' = -\beta\gamma ct + \gamma x = -\gamma u t + \gamma x \text{ (, kjer } u = c\beta) \xrightarrow{u \to 0} -ut + x$$

Galilejeva transformacija koordinate x'

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2} x^2 + \binom{\alpha}{3} x^3 + \dots$$
$$\gamma = 1 + \tfrac{1}{2}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4) \xrightarrow[\beta \to 0]{} 1$$

Torej pri majhnih hitrost (glej izraz: $u \to 0$) iz Lorentzove matrike dobimo za x ravno Galilejevo transformacijo.

$$c = \frac{x}{t}\,; \quad c' = \frac{x'}{t'} = c$$

Tj. x in t se morata tako transformirati, da se razmerje ohranja.

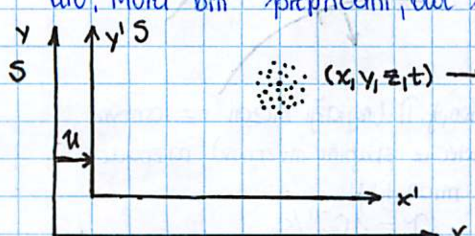
Glede časa: iz Lorentzove matrike za čas nikoli ne moremo dobiti Galilejeve transformacije ($t = t'$), saj se tudi čas transformira.

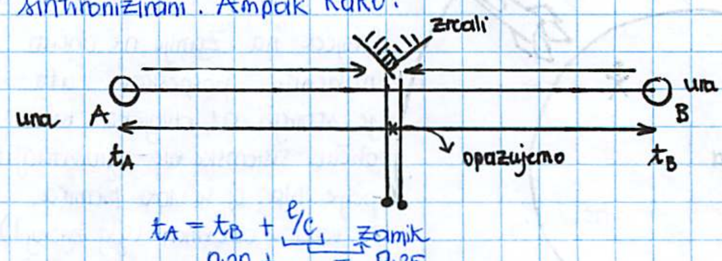
$$1 \sim \beta^2 = \left(\frac{300}{3 \cdot 10^8}\right)^2 = 10^{-12}$$

5. Kinematika

5.1. Sinhronizacija ur:

Dan imamo koordinatni sistem, ki mora imeti v vsaki točki prostora uro, tj. vsaka točka ima uro. Mora biti prepričani, da sta uri sinhronizirani. Ampak kako?

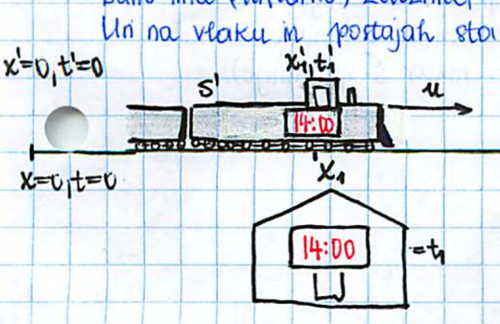




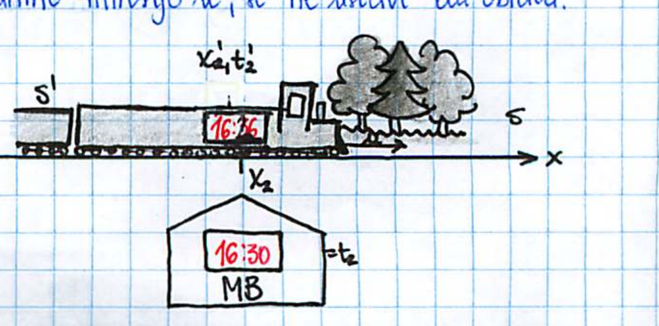
$$t_A = t_B + \underbrace{\ell/c}_{\text{zamik}}$$
$$9{:}20 + \dots = 9{:}25$$

5.2. Relativnost časa:

Dano ima (linearno) železnica po kateri vlak vozi s konstantno hitrostjo u, se ne ustavi ali obrača. Uri na vlaku in postajah sta zelo natančni.



$x'_1 = x'_2$, ker sta uri na vlaku pri miru.



$$\begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} ; \quad {}^4r' = L\,{}^4r, \quad {}^4r = L^{-1}\,{}^4r'$$

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}, \quad R_\varphi^{-1} = R_{-\varphi}$$

Izrazimo enote minjočega sistema z enotami gibajočega sistema:

$$ct_1 = \gamma\,(ct_1' + \beta x_1')$$
$$ct_2 = \gamma\,(ct_2' + \beta x_2')$$
$$x_1 = \gamma\,(x_1' + \beta ct_1')$$
$$x_2 = \gamma\,(x_2' + \beta ct_2')$$

Zanima nas razlika med tema dvema dogodkoma (tj. koliko časa mine med dogodkoma).

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma\,\underbrace{(t_2' - t_1')}_{\tau} + \frac{\gamma\beta}{c}\underbrace{(x_2' - x_1')}_{0,\ \text{či ura glede na vlak minije}}$$

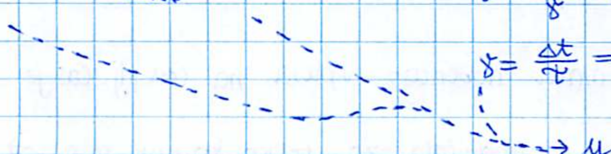
Δt: čas vožnje glede na vozni red 2:30

τ: oz. lastni čas, ki ga kaže ura, ki minije. 2:26

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{u}{c}\right)^2}}, \quad \beta = \frac{u}{c}$$

$$\tau = \frac{\Delta t}{\gamma} \leq \Delta t, \quad \text{saj } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \geq 1$$

$$\gamma = \frac{\Delta t}{\tau} = \frac{2:30}{2:26} = \frac{150}{146} > 1$$

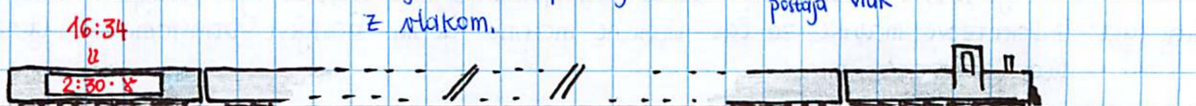


Kaj pa se zgodi, či rečemo, da vlak minije in se Zemlja "vozi", vrti nazaj?
Naredimo „eksperiment":
Vzamemo zelo dolg vlak – dolžina vlaka je ravno razdalja med LJ in MB.
Vlak se mimo LJ vozi s konstantno hitrostjo u.

se ne more zgoditi, ker je u konstanta (glej primer paradoks dvojčkov)

Či bi vlak vozil ⇄, bi bil potem dvojček na postaji starejši kot tisti, ki se je vozil z vlakom.

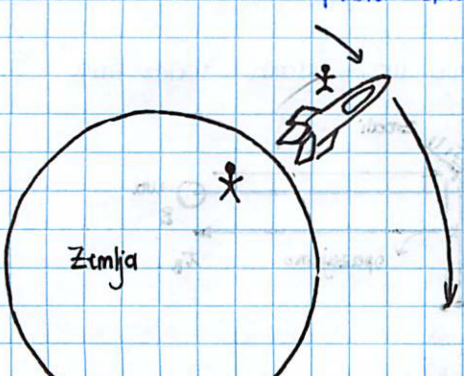
(*) začetno stanje
končno stanje:



gledamo čas zadnjega vagona našega vlaka v Ljubljani!

- PARADOKS DVOJČKOV (problem splošne relativnostne teorije)

$$\tau = \frac{\Delta t}{\gamma}$$



Dvojček na Zemlji ne občuti nobenih pospeškov, zato je starejši od dvojčka, ki občuti sistemske sile – gravitacijsko polje. Npr. či se vlak premika oz. vozi v obe smeri (glej zgoraj!).

Vendar enačba $\tau = \frac{\Delta t}{\gamma}$ ni dovolj, saj ne gre za simetrijo.

Zgodovinski primer (oz. dokaz):

Pion, tj. π (najlažji mezon oz. osnovni delec iz skupine mezonov) razpade v mion, tj. μ.

$$\tau = 10^{-n}/s$$
$$\tau = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

Ker se mion hitro giblje, ne razpade in pride do Zemlje (v lastnemu sistemu μ čas teče za faktor γ počasneje).