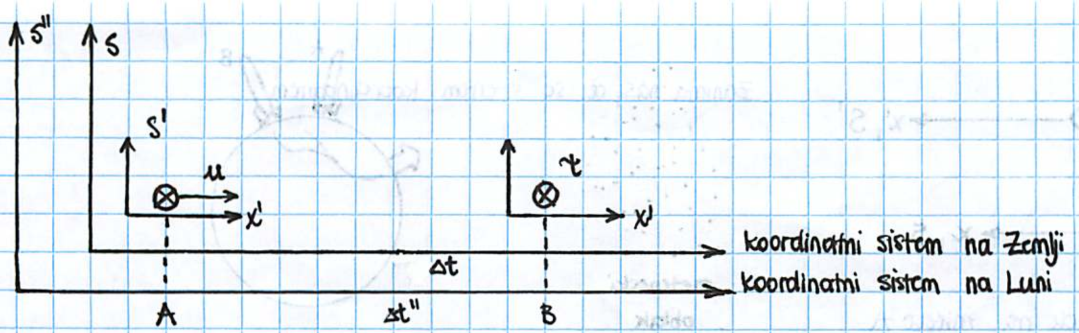


$$4r' = \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} \; ; \quad 0 \le \beta = \frac{u}{c} < 1, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \ge 1$$

τ je lastni čas za koordinatni sistem, ki miruje: $\tau = \frac{\Delta t}{\gamma}$

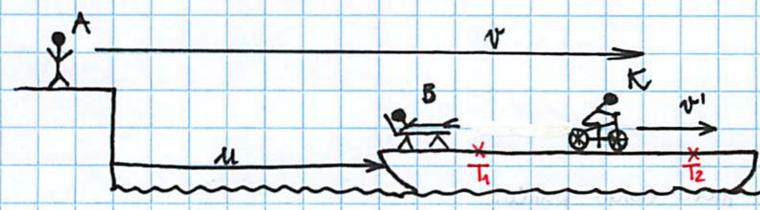
Lastni čas pokaže manj oz. je manjši, (ni pa ura, ki se giblje?): $\tau_{luna} = \frac{\Delta t''}{\gamma''}$, $\gamma'' = \frac{1}{\sqrt{1-(u''/c)^2}}$

$\Longrightarrow$ tj. lastni čas je pri vsaki transformaciji enak

POSLEDICE (paradoksi):

1. Relativnost časa:
$$\tau = \frac{\Delta t}{\gamma}$$

2.



Opazovalec A: glede nanj se ladja premika s hitrostjo u

Opazovalec B: glede nanj se kolesar premika s hitrostjo v'

Zanima nas s kolikšno hitrostjo se premika K (tj. kolesar) glede na opazovalca A.

Galileo: $v = u + v'$

Pride do problema, či se kolesar giblje s svetlobno hitrostjo, tj. s c.

Zato določimo dogodka T_1 in T_2 in poskušamo izračunati hitrost kolesarja.

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix}$$

T_1: $ct_1 = \gamma c t_1' + \beta\gamma x_1'$
$\quad x_1 = \beta\gamma c t_1' + \gamma x_1'$

$\longleftarrow$ Trenutek in lega (tj. kdaj in kje se zgodi).

T_2: $ct_2 = \gamma c t_2' + \beta\gamma x_2'$
$\quad x_2 = \beta\gamma c t_2' + \gamma x_2'$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \beta\gamma c (t_2' - t_1') + \gamma (x_2' - x_1') = \beta\gamma c \Delta t' + \gamma \Delta x'$$
$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma (t_2' - t_1') + \beta\gamma \frac{1}{c} (x_2' - x_1') = \gamma \Delta t' + \beta\gamma \frac{1}{c} \Delta x'$$

$\Delta t'$ in $\Delta x'$ sta časovni in krajevni interval na ladji.

- hitrost je konstantna (zato ne pišemo odvoda):

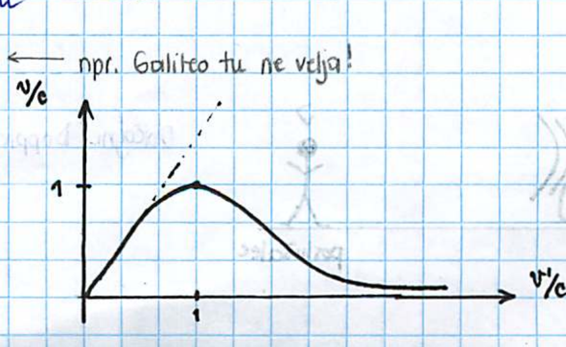
$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\gamma \Delta x' + \beta\gamma c \Delta t'}{\gamma \Delta t' + \frac{1}{c}\beta\gamma \Delta x'} = \frac{\frac{\Delta x'}{\Delta t'} + \beta c}{1 + \frac{1}{c}\beta \frac{\Delta x'}{\Delta t'}} = \frac{u + v'}{1 + \frac{v' u}{c^2}} \qquad \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = v', \; \beta c = u$$

1. $v' = c \Longrightarrow v = \frac{u + c}{1 + \frac{u}{c}} = \frac{c(u+c)}{c+u} \longrightarrow u$

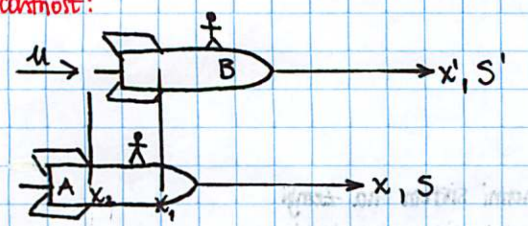
$\boxed{(v' \to c) \Longrightarrow (v \to c)}$ $\longleftarrow$ npr. Galileo tu ne velja!

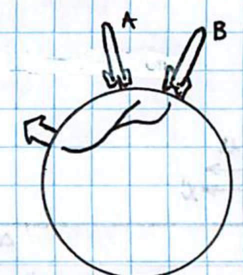
2. $u = v' \Longrightarrow v = \frac{2v'}{1 + \frac{v'^2}{c^2}}$

$$v/c = \frac{2v'/c}{1 + \frac{v'^2}{c^2}}$$



3. Sočasnost:





u... hitrost rakete B glede na raketo A

A: "Dobro je udarilo in še hkrati."
B: "Dobro je udarilo, vendar najprej (spredaj) nato (zadaj)."

Zanima nas, či se v enem koordinatnem sistemu nekaj zgodi hkrati, ali se tudi tudi v drugem. Da, saj ne pridemo v protislovje (?).

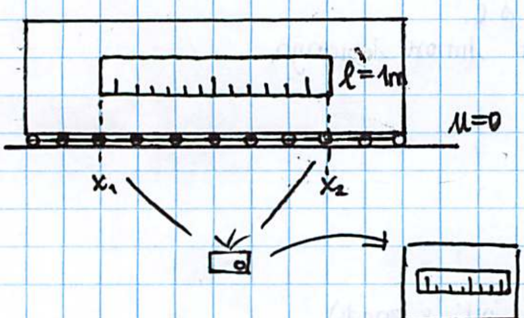
$$\Delta t=\gamma(t_2'-t_1')+\beta\gamma\frac{1}{c}(x_2'-x_1')=\gamma\Delta t'+\beta\gamma\frac{1}{c}\Delta x'$$

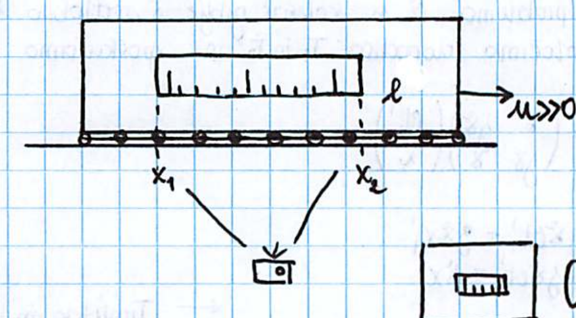
$$A\Rightarrow \Delta t'=0$$
$$B\Rightarrow \Delta t'=-\frac{u}{c}\frac{\gamma}{\sqrt{1-(u/c)^2}}(x_2'-x_1')=-\frac{u}{c}\underbrace{(x_2'-x_1')}_{\substack{x_2'<x_1'\\ >0}}>0\text{, tj. } \Delta t'>0$$

Janez Strnad, Fizika 3. del

4. Fitzgeraldova kontrakcija (skrčitev dolžin)

Opazujemo vlak, ki minje.
Osredotočimo se en vagon in nanj prilepimo meter dolgo palico.
Nato v istem trenutku določimo robova, tj. x_1 in x_2 (lahko s pomočjo fotoaparata).





$$\Delta x=\gamma\Delta x'+\beta\gamma c\Delta t'$$

Fotografiramo oz. določato točki hkrati tudi v gibajočem sistemu, vendar ne vemo koliko je t! Zato si želimo obratne transformacije.

$$\begin{pmatrix}ct'\\x'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\gamma & -\beta\gamma\\ -\beta\gamma & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}ct\\x\end{pmatrix}$$

$$\Delta x'=l'=\underbrace{-\beta\gamma\Delta t}_{0}+\overbrace{\gamma\Delta x}^{\gamma\cdot l}\quad\Longrightarrow\quad\frac{l'}{\gamma}=l\quad\Longrightarrow\quad l<l'$$

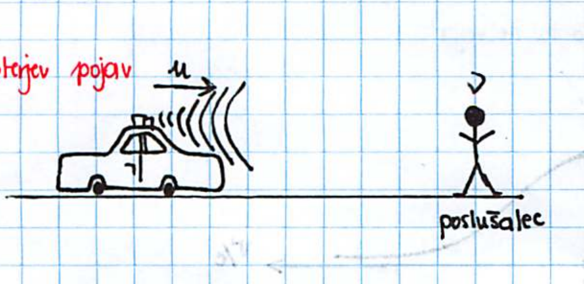
0, saj sta levi in desni bila hkrati določena

(krog se spremeni v elipso)

$\Delta x'=l'$
$\Delta x=l$

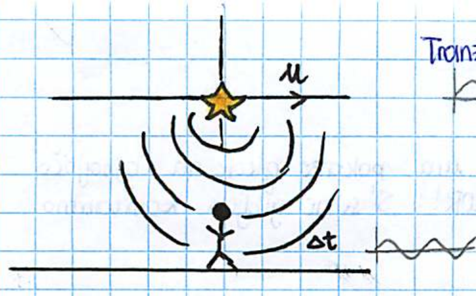
5. Dopplerjev pojav

(a)

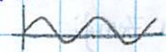


Običajni Dopplerjev pojav za svetlobo.

(6)



Tranzverzalni Dopplerjev pojav

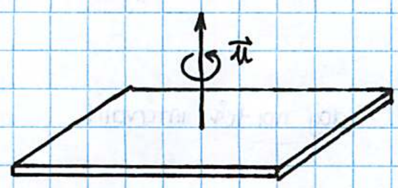


Če se zvezda oddaljuje / približuje je bolj modra / rdeča.

$\Delta t = \gamma \cdot \tau$
$\nu = \frac{1}{\gamma}\nu' < \nu'$

nihajni čas sorazmeren z $\gamma \Rightarrow$
$1/t_0 \propto 1/\gamma$

6. Poincarejeve grupe (Grupe za rotacije, SO(3))



$R_0 = I$
$R_\varphi^{-1} = R_{-\varphi}$
$R_\beta R_\alpha = R_{\alpha+\beta}$

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

$$R_{\alpha+\beta} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\beta & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

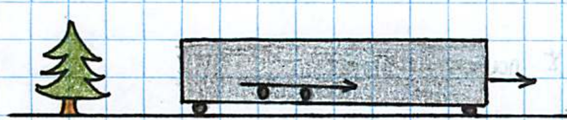
$\cos(\alpha+\beta) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$

$\Downarrow$

$\operatorname{th}\varphi = \frac{u}{c} = \beta$

$$R_\varphi = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}\varphi & -\operatorname{sh}\varphi \\ \operatorname{sh}\varphi & \operatorname{ch}\varphi \end{pmatrix}$$

$\Longrightarrow$ SO(3) (= specialna ortogonalna)
$\Rightarrow$ grupa za rotacije



„2 Lorentzovi transformaciji"

$$\boxed{\nu = \frac{u+\nu'}{1+\frac{u\nu'}{c^2}}} \iff \operatorname{th}\varphi = \operatorname{th}(\varphi_1+\varphi_2) = \boxed{\frac{\operatorname{th}\varphi_1 + \operatorname{th}\varphi_2}{1+\operatorname{th}\varphi_1\operatorname{th}\varphi_2}}$$

$\Uparrow$

ne seštevajo se koti, ampak tangesi, $\tan\varphi \sim \varphi$

$$\nu = \frac{\nu_1+\nu_2}{1+\frac{\nu_1\nu_2}{c^2}}$$

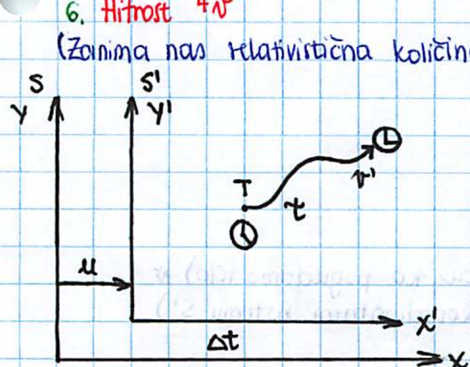
Npr. kredo nosimo s hitrostjo ν_1 in jo nato vržemo s hitrostjo ν_2, potem je ν enaka izračunu formule na levi (tj. manj kot $\nu_1+\nu_2$).

Ura, ki miruje glede na gibajoč sistem, pokaže manj (npr. „neskončno" dolg vlak, zadnji vagon pokaže več glede na uro, ki se giblje, tj. uro na Zemlji.).

---

6. Hitrost ${}^4\nu$

(Zanima nas relativistična količina, ki predstavlja hitrost.)



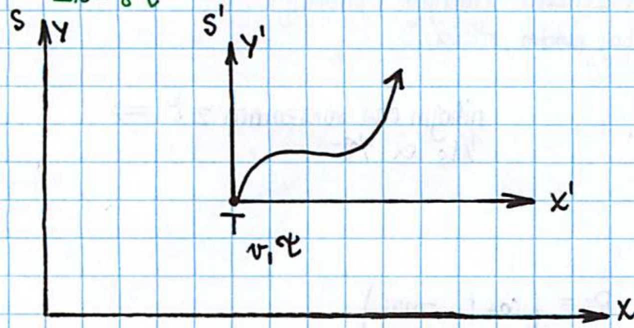
T se giblje po neki poti.
T ima v gibajočem sistemu hitrost $\nu' = \nu_2$,
gibajoč pa glede na mirujoč sistem $\nu_1 = u$.

$$\left.\begin{array}{l} \vec{r}, \vec{\nu} = \frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{a} = \frac{d\vec{\nu}}{dt}, \dots \\ \vec{\nu}\cdot\vec{a} = \vec{\nu}'\cdot\vec{a}', \ \vec{\nu}' = R\vec{\nu} \end{array}\right\}$$

Uporabljamo vektorje, katerih (nekatere, ne pa vse) formule so invariantne za koordinatne sisteme:
- rotacije
- premik
- Galilejeve transformacije (vsi zakoni ostanejo enaki kljub temu da smo v drugem koordinatnem sistemu)

ν' se ne transformira z Lorentzovo in tudi ne z Galilejevo transformacijo (tj. običajna hitrost se NE transformira po Lorentzu / Galileju). Zanima pa nas, kako se transformira.

τ - čas, ki mine po mirujoči uri v koordinatnem sistemu S'
Δt - čas, ki mine med dvema dogodkoma (v S') po uri na Zemlji
$\Delta t = \gamma \tau$



Gledamo koliko ura pokaže glede na gibajočo uro iz S (POZOR!: S' se ne giblje s konstantno hitrostjo.)

$$\boxed{\begin{aligned} dt &= \gamma\, d\tau \\ \frac{dt}{d\tau} &= \gamma \end{aligned}}$$

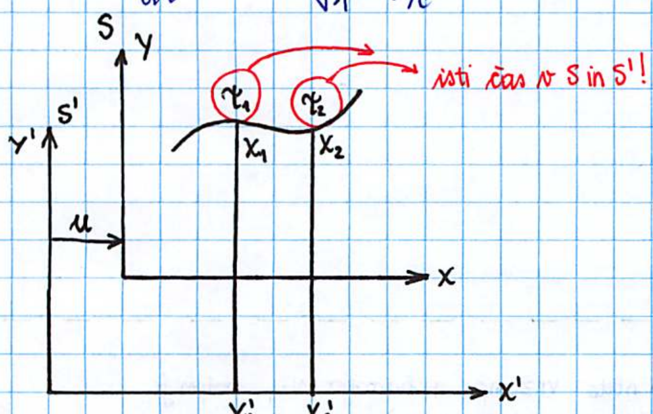
Obstajajo majhni časovni intervali (=odseki), kjer se točka T giblje konstantno. Tedaj na teh intervalih velja zgornja zveza.

v.... hitrost točke T
$v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$
↑
relativna hitrost med točko T in mirujočo točko $(0,0) \in S$.

POZOR!: Časovni intervali so majhni.

$$\frac{dt}{d\tau} = \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

γ je „trenutni" γ oz. γ na teh majhnih intervalih.



VEDNO GLEDAŠ URO V SVOJEM SISTEMU - TJ. SVOJ LASTNI ČAS.
(Lastni čas je invarianten oz. neodvisen od (vsakega) koordinatnega sistema.)

$${}^4v \overset{\text{def.}}{=} \frac{d\,{}^4r}{d\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{{}^4r_2 - {}^4r_1}{\tau_2 - \tau_1} \quad ; \quad v = \frac{x_2 - x_1}{\tau_2 - \tau_1} \text{ po skici na levi}$$

↑
delimo s časom ure, ki se giblje (saj sta (↑) τ_1, τ_2 neodvisna od koord. sistema)

Pogledamo ta četverec iz drugega koordinatnega sistema, npr. S':

$${}^4v' = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{{}^4r_2' - {}^4r_1'}{\Delta\tau} = L\, {}^4v$$

↳ transformira se kot Lorentzova količina.

$${}^4v = \frac{d\,{}^4r}{d\tau} = \frac{d\,{}^4r}{dt} \cdot \frac{dt}{d\tau} = \gamma \frac{d\,{}^4r}{dt} = \gamma (c, \vec{v})$$

$${}^4r = (ct, \vec{r})$$

↑
„trenutni γ" (v tistem trenutku, ko pogledamo telo v koordinatnem sistemu S')

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}}{c^2}}}$$

Primer: S: v, S': v' } hitrosti, s katerima se točka giblje!
Relativna hitrost (med njima) je u.

$${}^4v' = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1 - (v')^2/c^2}}}_{\gamma_{v'} \text{ v } S'} (c, \vec{v}') = \begin{pmatrix} \gamma_u & -\beta\gamma_u \\ -\beta\gamma_u & \gamma_u \end{pmatrix} \gamma_v (c, \vec{v})$$

„γ_u menjave koordinatnega sistema!" ← γ iz prejšnjih ur:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \; ; \; \beta = \frac{u}{c}$$

⇓

$$v = \frac{u + v'}{1 + \frac{u v'}{c^2}}$$