Če hočemo opisati gibanje te točke v prostoru, moramo pogledati, kakšne so Newtonove enačbe, tj.
POSPEŠEK:

$$^4a \overset{\text{DEF.}}{=} \frac{d\,^4v}{d\tau} = \gamma \frac{d\,^4v}{dt}$$

Odvajamo γ (saj je hitrost od časa odvisna):

$$\frac{d}{dt}\vec{v}\cdot\vec{v} = 2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\boxed{\frac{d\gamma}{dt}} = \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v(t)^2}{c^2}}} = \frac{d}{dt}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-\vec{v}\cdot\vec{v}/c^2}} = +\frac{1}{\cancel{2}}\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}^{\,3}}\cdot\left(\frac{+\cancel{2}}{c^2}\right)\vec{v}\cdot\vec{a} = \boxed{\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}}$$

$$^4a = \gamma\frac{d\,^4v}{dt} = \gamma\left(\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2},\ \gamma\vec{a}+\gamma^3\frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c^2}\cdot\frac{\vec{v}}{c}\right)$$

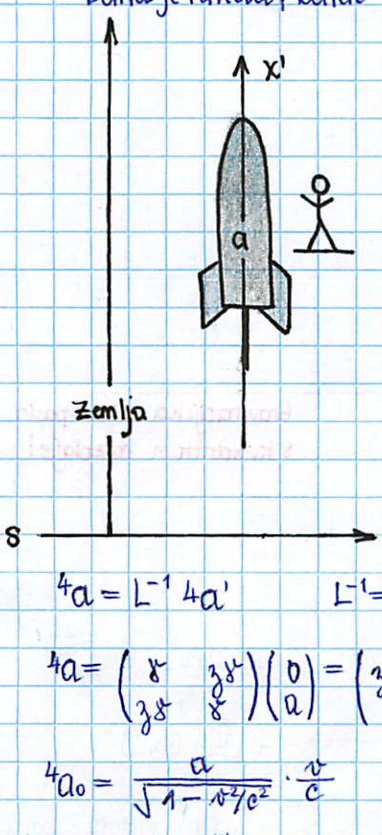
$$\frac{d\gamma\vec{v}}{dt} = \frac{d\gamma}{dt}\vec{v}+\gamma\vec{a}\ ;\quad \vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$$

Pri majhnih hitrostih:
$^4a = (0,\vec{a})$

$^4r' = L\,^4r$
$^4v' = L\,^4v$
$^4a' = L\,^4a$

in $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$
↳ γ trenutne hitrosti in ne γ menjave koordinatnega sistema!

Vaja: poševni met (vaja iz kinematike)
Dana je raketa, katere motor ves čas deluje.



Človek miruje glede na raketo (či stopi na tehtnico, masa „miruje", tj. raketa se giblje navzgor). Tak primer je Zemlja, kjer živimo v prostoru s stalnim pospeškom g (navzdol).

$$^4a' \doteq (0,a,0,0)$$

Galileo:

$s=\frac{1}{2}at^2\ ;\ v=at$ (tj. kako hitro in kako daleč pade krogla)

$$^4a = L^{-1}\,^4a' \qquad L^{-1}=\begin{pmatrix}\gamma & \beta\gamma\\ \beta\gamma & \gamma\end{pmatrix};\ \gamma \text{ trenutne hitrosti}$$

$$^4a = \begin{pmatrix}\gamma & \beta\gamma\\ \beta\gamma & \gamma\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ a\end{pmatrix} = \begin{array}{c|c} \begin{pmatrix}\beta\gamma a\\ \gamma a\end{pmatrix} & \begin{matrix}0\\ 1\end{matrix}\end{array}$$

$$^4a_0 = \frac{a}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\cdot\frac{v}{c}$$

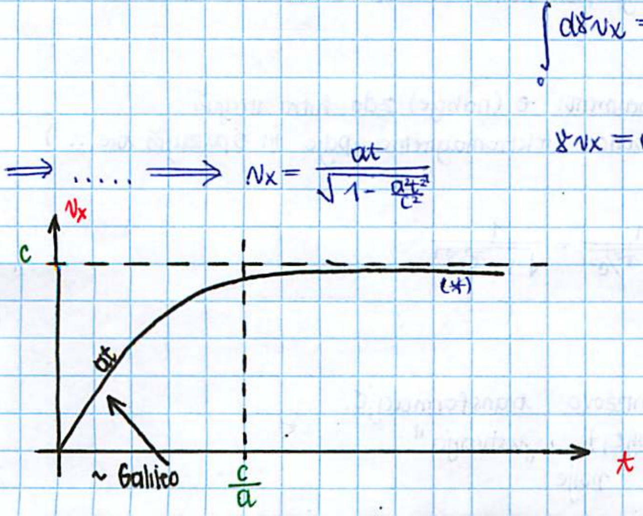
$$^4a_x = \frac{a}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \underset{v=v_x}{=} \frac{d\gamma v_x}{d\tau} = \gamma\cdot\frac{d\gamma v_x}{dt} = \gamma a$$

$$\int_0^{v_x} d\gamma v_x = \int_0^t a\,dt$$

hitrost v mirujočem sistemu ob času t

$$\gamma v_x = at = \frac{v_x}{\sqrt{1-v_x^2/c^2}}\ \Big/^2$$

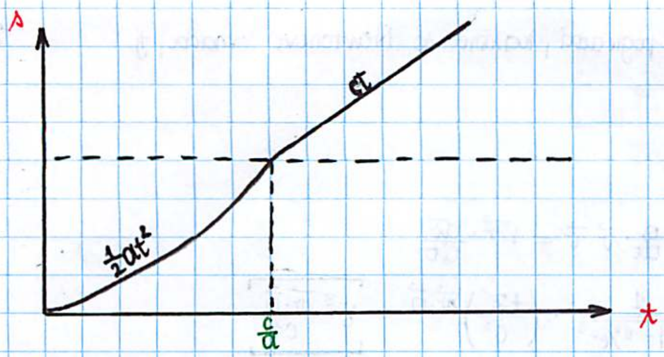
$$\Longrightarrow \ldots\ldots \Longrightarrow v_x = \frac{at}{\sqrt{1-\frac{a^2t^2}{c^2}}}$$



Ob času t=0 vse miruje.

$$a^2t^2 \cong c^2$$
$$at \cong c$$
$$t = \frac{c}{a} \leftarrow \text{meja}$$

(*) $\lim_{t\to\infty} v_x = c$



$$s = \int_0^t \frac{at}{\sqrt{1-\frac{a^2t^2}{c^2}}}\,dt = \frac{c^2}{2a}\underbrace{\int_0^t \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}}\, d\left(\frac{t^2a^2}{c^2}+1\right)}_{\int \lambda^{-1/2}d\lambda = 2\cdot\lambda^{1/2}+C} =$$

$$= \frac{c^2}{2a}\cdot 2\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}\,\Bigg|_0^t =$$

$$= \frac{c^2}{a}\left(\sqrt{1+\frac{a^2t^2}{c^2}}-1\right)$$

Pri velikih časih, tj. $t\to\infty$:

$$s \doteq \frac{c^2}{\cancel{a}}\cdot\frac{\cancel{a}t}{c} = ct$$

Pri majhnih časih kot parabola (prosti pad). Pomagamo si z razvojem: $1+\frac{1}{2}\frac{a^2t^2}{c^2} \pm \cdots$

Svetlobna hitrost je zgornja meja (hitrosti) teles, ki imajo maso.

7. Dinamika

Klasično!:

$$\left.\begin{array}{l}\vec F = m\vec a\\ \vec G = m\vec v\\ \frac{d\vec G}{dt} = \vec F\end{array}\right\}$$ invariantne za Galilejevo transformacijo (potem očitno niso invariantne za Lorentzovo!)

→ izvor električnega polja

$$\vec F = m\vec a = m\vec g + e\vec E + e\vec v\times\vec B$$

→ določa gravitacijsko polje

→ gravitacijska masa ni nujno enaka masi pospeška, sta pa poveza i med $\vec a$ in $\vec g$.
⇒ kasneje preverili z eksperimentom, da sta masi enaki

1. KORAK
Ni gravitacijskega polja, tj. $\vec g = 0$, $\vec E, \vec B \neq 0$

Gravitacijska sila pada s kvadratom razdalje!

Definiramo gibalno količino (ugibamo in jo preverimo z eksperimentom!).
$\vec G = \vec p$ .... gibalna količina
$\vec G = m\vec v$

$$^4p = m\,^4v = (\gamma mc, \gamma m\vec v) = (\gamma mc, \gamma\vec G)$$

↳ gibalna količina v Galilejevi fiziki (telo se noče pospeševat do c in preko - krivec za to je γ)

$$P = \frac{dA}{dt} = \frac{d(\vec F\cdot\vec s)}{dt} = \vec F\cdot\vec v$$
$$e(\vec E + \vec v\times\vec B)$$

sila magnetnega polja je vedno ⊥ na pot e

sila!

$$^4\mathcal{F} \overset{def.}{=} \left(^4\mathcal{F}_0, \gamma\underbrace{(e\vec E + e\vec v\times\vec B)}_{F}\right)$$

moč

?, smiselno definirati kot: $\gamma e\frac{\vec E\cdot\vec v}{c}$

Magnetna sila ne opravi dela, ker je pravokotna na tir.

Sila Winkonskega: $\boxed{^4\mathcal{F} = \frac{d^4p}{d\tau}}$

Newtonov zakon (eksperiment: e (naboje) zelo hitro streljaš v močno elektromagnetno polje in opazuješ tire,...)

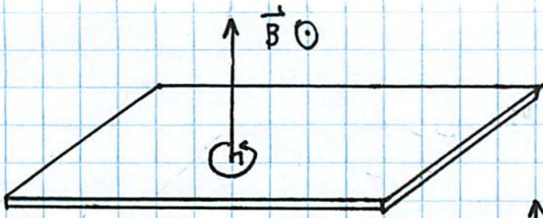
$$^4\mathcal{F} = \frac{d^4p}{d\tau} = m\frac{d^4a}{d\tau}$$

$$\boxed{\vec F = m\gamma\vec a + m\gamma^3\frac{\vec v\cdot\vec a}{c^2}\,\frac{\vec v}{c}}$$ Newtonov zakon ; $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\vec v\cdot\vec v}{c^2}}}$

$$v\to 0:\ \vec F = \cancel{m\gamma\vec a} + m\gamma^3\frac{\vec v\cdot\vec a}{c^2}\cdot\frac{\vec v}{c} = 0$$

Magnetno polje in električno polje sta povezana z Lorentzovo transformacijo.
npr. elektron miruje + mi se gibljemo ⟶ Za nas se elektron giblje, tj. „ustvarja" električno in magnetno polje

Primer:



$m\,{}^4a = {}^4\mathcal{F}$

$\gamma^2 m\vec{a} + \gamma^4 m \frac{\vec{v}\cdot\vec{a}}{c}\cdot\frac{\vec{v}}{c} = e\gamma(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B})$

(∥npr: 0)

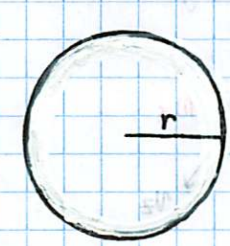
Iščemo $\vec{r}(t)$.

(a) $v/c \to 0$: $m\vec{a} = -|e|(\vec{v}\times\vec{B})$

$ma = -evB$

$\vec{a} \perp \vec{v}$

$\Longrightarrow$ telo kroži



$a = \frac{v^2}{r}$; $m\frac{v^2}{r} = evB$

$r = \frac{mv}{eB} = \frac{G}{eB}$

(b) relativistično gledano:

$\vec{v} \perp \vec{a}$ $\quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$

$\gamma m \frac{v^2}{r} = Bev$

$r = \frac{\gamma m v}{eB} = \frac{\gamma G}{eB}$

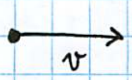
${}^4p \longrightarrow \left(\frac{W}{c}, \vec{p}\right)$ $\quad W = \gamma mc^2$

${}^4\mathcal{F} \longrightarrow \left(\gamma\frac{P}{c}, \gamma\vec{F}\right)$

Običajna, kinetična energija:

$v/c \to 0$

$W = \frac{1}{2}mv^2$



$W = \gamma mc^2 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots\right) = mc^2 + \frac{1}{2}mv^2 + \mathcal{O}((\frac{v}{c})^4)\,mc^2$

W_0

$W = W_0 + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\,\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)}{2}\,m\frac{v^4}{c^2} + \dots$

npr. $m = 1\,kg$:

$W_0 = mc^2 = 1\,kg\cdot(3\cdot 10^8\,m/s)^2 \doteq 10^{16}\,J$

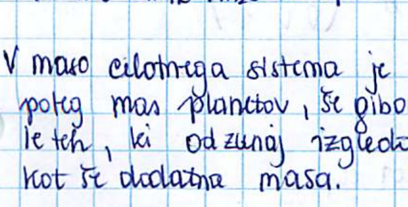
Dano imamo kroglico. Ta se z veliko hitrostjo zaleti (npr. v steno), pri čemer se energija $W_0 = mc^2$ ne porabi. Zato to energijo izkoriščamo - princip jedrske energije.

$W = mc^2 + \underline{\frac{1}{2}mv^2 + \dots \frac{mv^4}{c^2} + \dots}$

↑

kroglica ima potem $P \doteq \frac{10\cdot 10^{16}\,J}{1\,s} = 10^9\,MW$ (primerjava, Krško letno: 1000 MW).

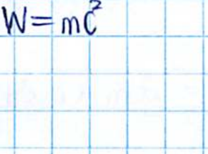
Primer:



$m \neq m_1 + m_2$

$W = mc^2 = m_1c^2 + m_2c^2 + m_1\frac{1}{2}v^2 + \dots$

V maso celotnega sistema je prišteta poleg mas planetov, še gibanje le teh, ki od zunaj izgledajo kot še dodatna masa.



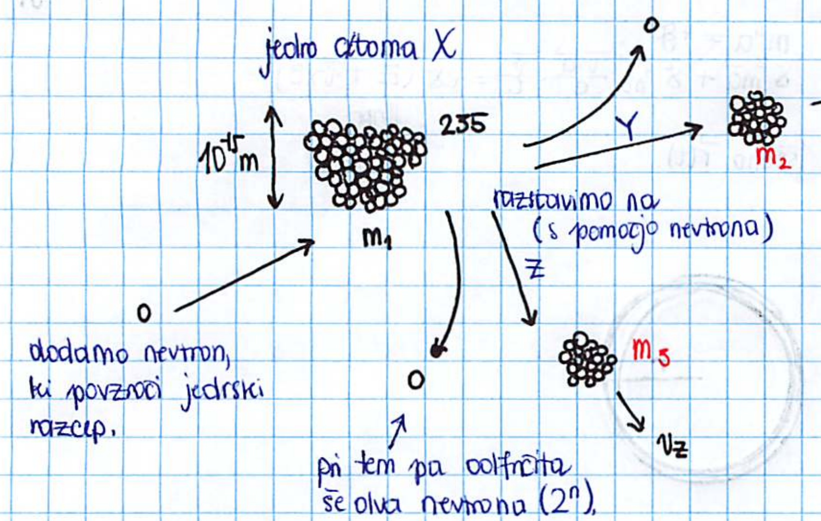
Škatla miruje!

$m = m_v + m_š + m_E$

celoten sistem

↳ masa energije vrtavke, či gledamo od zunaj.

$W = mc^2$



$m_1 > m_2 + m_3$

$m_1 c^2 = m_2 c^2 + m_3 c^2 + W_{kin.}$

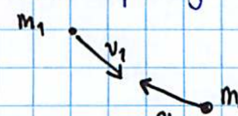
$$\frac{d\,{}^4p}{d\tau} = {}^4\mathcal{F} = m\,{}^4a = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{W}{c}, \vec{p}\right) = 0 \implies \left(\frac{W}{c}, \vec{p}\right) = \text{konstantno!}$$

npr. $\vec{E}, \vec{B} = 0$

$W = mc^2$

$\vec{p} = \left(\gamma \frac{mc^2}{c}, \gamma\vec{v}\right)$

S tem lahko preučujemo trke, pri katerih se energija in gibalna količina ohranjajo!



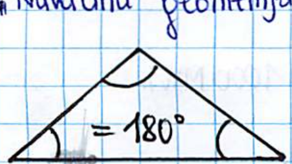
Kaj pa je primeren četverec za transformacijo $\vec{E}$ in $\vec{B}$?
Težava je v tem, da sta trodimenzionalna in izkaže se, da nista neodvisna.
$\vec{B}, \vec{E}$ ne moremo zapisati direktno (kot sili), lahko pa ju zapišemo takole:

antisimetrična

$$F^{\mu,\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & +B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \qquad F' = LFL^{-1}$$

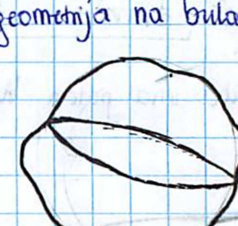
SPLOŠNA TEORIJA RELATIVNOSTI

„Navadna geometrija"



geometrija na sferi

geometrija na bulasti sferi



$$\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2 = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = $$
$$= \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu}\, r_1^\nu r_2^\nu$$
$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

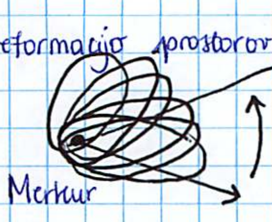
Specialna teorija relativnosti:

$$g = \begin{array}{c|cccc} & 0. & 1. & 2. & 3. \\ \hline 0. & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1. & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2. & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3. & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} = g(\vec{r})$$

$$s^2 = -c^2t^2 + x^2 + y^2 + z^2 \qquad ms^2 = -c^2t^2m + mx^2 + my^2 + mz^2$$

Razlog za deformacijo prostora (v 4D) je ravno masa, ki prostor ukrivi.

1. posledica:



Po Keplerju se vsi planeti gibljejo kot elipse.

(*) Merkur hitrejši, tj. po teoriji relativnosti težji, zato se tir deformira, Merkur bolj zavije.