

KVANTNA MEHANIKA 1

F. Schwabl: Quantum Mechanics
D. Griffiths: Quantum Mechanics

Včasih je bila moderna, zdaj enostavno le ovojje.
začel je Planck (1900). Okvirno velja, da če
je v enačbi $\hbar$ je to enačba KM in obratno.
(1913) Bohrov model atoma.

Heisenberg (1925), Schrödinger (1926), Pauli (1927),
Dirac (1928) - relativistična enačba.

V nerelativistični opazujemo predvsem en delec.
V relativistični pa se zaradi visokih energij
lahko pojavijo novi delci. Približek enega delca
ni več dober.

"Izpeljava"

① iz eksperimentov zveza med p, k, λ ; $\frac{2\pi}{\lambda} = k = \frac{p}{\hbar}$

② Podobna energija $\omega = \frac{E}{\hbar}$

③ vse prepisano v valovanje $\cos(kx - \omega t)$

Da imamo valovanje, potrebujemo val. enačbo.

Klasična: $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow -k^2 = -\frac{1}{c^2} \omega^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \omega = ck \Rightarrow E = p c$
Ni dober.

Druga možnost klasične je
difuzijska enačba.

$D \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{\partial T}{\partial t} \Rightarrow k^2 D \cos(kx - \omega t) = \omega \sin(kx - \omega t)$
 $\cos \dots \sin$, ni dober.

Lahko vzamemo $e^{i(kx - \omega t)}$ (če klasično),
iz difuzijske dobimo $k^2 D = i\omega$

Torej bi moral D biti kompleksen.

$D = i \frac{\hbar \omega}{k^2} = i \frac{\hbar^2 k^2}{2m \hbar k^2} = i \frac{\hbar}{2m}$

$i \hbar \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial \psi}{\partial t} T$

če dopisemo
če potencial
pa dobimo

$i \hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V \psi$

Newtonova enačba poganja struno:



resitev je
oblike
 $\cos kx \cdot \cos \omega t$

Difuzijska pa je taka, da njena
resitev ravnja s časom.

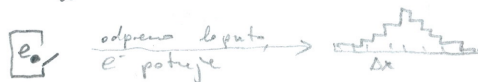
Resitev je oblike $\cos kx e^{-t/\tau}$

Bistveno pri Schr. je zato i , ker
je potem resitev oblike $\cos kx e^{-i\omega t}$, nihanje ✓

$\psi \in \mathbb{C}$, ampak lahko pa ne bi. Lahko vstavimo
 $\psi = \alpha + i\beta$ in dobimo dve realni sklopjeni
enačbi. $\mathbb{C}$ je le na lažji postopek.

Schrödinger si je želel, da ψ je nekaj. Pones se
uporablja Bornova interpretacija ψ (ki spada v Kopenhagensko
interpretacijo).

Imajmo delec na osi x . Verjetnost, da se nahaja,
je $\int_a^b |\psi|^2 dx$. Verjetnostna gostota $\mathcal{S}(x, t) = |\psi(x, t)|^2$



ga velja zaganano, dolga histogram.

Pomembne rešitve preprostih problemov. Prezan prostor

$V=0$, $i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}$ Resitev je tisto

s čimer smo začeli, $\psi = e^{i(kx - \omega t)}$: A.

$i\hbar(-i\omega) = +\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \Rightarrow \hbar \omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$

Ampak tu imamo težavo, rešitve se ne da
normalizirati. Resitev je Four. integral.

$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(k) e^{i(kx - \omega t)} dk$ je resitev enačbe, ker
je $e^{i(kx - \omega t)}$ in real k
resitev in je enačbo linearno

$\phi(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x, 0) e^{-ikx} dx$ in $\lim_{L \rightarrow \infty}$ (inverzna Four.)

(v frakci smo lahko manj rigorozni, lahko namesto
 $\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L$ pišemo $\int_{-\infty}^{\infty}$, ker so v neskončnosti
vrednosti $\psi \rightarrow 0$. (ker $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi|^2 = 1$))

Vstavimo $\phi(k)$ v $\psi(x, t)$: (valovni paket)

$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx'} \psi(x', 0) e^{i(kx - \omega t)} dx' dk = \psi(x, t)$

$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(x - x')} dk$ (če se to pojavi v integralu
je kot δ -funkcija)

Parsevalova enačba: $\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\phi(k)|^2 dk = 1$

Normalizaciji bo zato zadostovalo, če najdemo
ustrezen $\phi(k)$. Ta je seveda odvisna od začet. pogojev.

Verjetnostni tok.

$\mathcal{S}(x, t) = |\psi(x, t)|^2$, $1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx$ (normaliziran ψ)

$\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j} = 0$, izčeno $\vec{j}$. Brez izvorov/potovrov,
želimo ohranitev
verjetnosti.

$\frac{\partial |\psi|^2}{\partial t} = \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \psi + \frac{\partial \psi}{\partial t} \psi^* =$
 $= \frac{-\hbar^2}{2m(-i\hbar)} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} \psi + \frac{V^*}{-i\hbar} \psi^* \psi + C.C. =$

$= -\frac{2}{2\pi} \left(\frac{\hbar}{2im} \left(\psi^* \frac{\partial \psi}{\partial x} - \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial x} \right) \right) - \frac{2}{\hbar} \ln V \cdot |\psi|^2$

v tem prepišemo kontinuitetno.

g. ko smo $j=0 \Rightarrow \boxed{VER}$

$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V \psi$
 $-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial x^2} + V^* \psi^*$

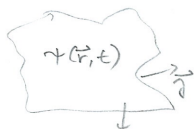
C.C. = kompleksno konj.
 $2 \ln V = V - V^*$

kepfjoli smo $V \in \mathbb{R}$. Če $V \notin \mathbb{R}$, bi v kontinuit.
enačbi imeli izvore in $|\Psi(x,t)|^2$ ne bi bila vedno
enako normirana. (Tega jasno vidimo)

Za $\vec{j}$ zato izberemo

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2im} (\Psi^* \vec{\nabla} \Psi - \Psi \vec{\nabla} \Psi^*)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V |\Psi|^2 dV = - \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$



Lastnosti Ψ .

• $\Psi \in L^2$ v $\mathbb{R}^3$ in je zvezna (sledi iz Schr. en.)

• $\Psi' = \frac{\partial \Psi}{\partial x}$: $i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + V\Psi$ / $\int_a^b dx$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \int_a^b \Psi dx = -\frac{\hbar^2}{2m} \int_a^b \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} dx + \int_a^b V\Psi dx \quad / \quad b \rightarrow a$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi \Big|_{x=a}^{x=b} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=b} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \Big|_{x=a} \right) + \Psi \Big|_{x=a}^x \int_a^b V dx$$

(+ $\partial(b-a)$)

Ko $b \rightarrow a$:

$$0 = -\frac{\hbar^2}{2m} (\Psi'_D - \Psi'_L) + \Psi \int_a^b V dx$$

desno levo

$$\Rightarrow \boxed{\Psi'_D - \Psi'_L = \frac{2m}{\hbar^2} \Psi \int_a^b V dx}$$

Zato: če V zvezna, $V|_a(b-a) \rightarrow 0$ in

prvi odvod Ψ' je tudi zvezna.

V naravi so potenciali zvezni, v modelih
pa je protiprimer npr. δ funkcija.

$$V(x) = c\delta(x) \Rightarrow \int_a^b V(x) dx = c$$

• Kaj pa drugi odvod?

Časni odvod je zvezen (?), zato je
drugi odvod zvezen $\Leftrightarrow V$ zvezen.

Stacionarne rešitve.

Zapišemo $\Psi(x,t) = \psi(x)f(t)$, to L0 stacionarna
rešitev, ker krajšini del ni odvisen od časa.

$$i\hbar \psi \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} f + V\psi f \quad / : \psi f$$

$$i\hbar \frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{\psi} \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V = \text{konst} =: E$$

(če V ni odvisen od časa)

$$\Rightarrow \boxed{f = A e^{-\frac{iEt}{\hbar}}}$$

Dobimo se enačbo

$$\textcircled{1} -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V\psi = E\psi$$

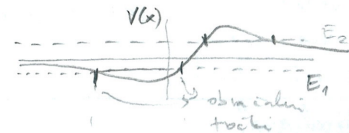
li ji zadošča
stacionarna rešitev ψ . $\int |\psi|^2 dx = 1$

$$\Psi(x,t) = \psi(x) e^{-\frac{iEt}{\hbar}}$$

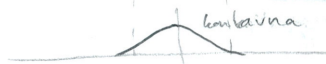
iz (1) dobimo $\frac{1}{\psi} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{V-E}{\hbar^2/2m}$

Obravnavajmo enačbo brez pravega računanja

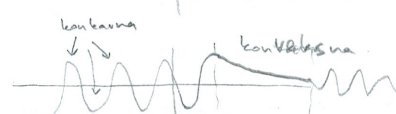
inejmo V :



① $E_1 > V(x)$
(II. odvod negativen)



② $E_2 < V(x)$
(II. odvod pozitiven)



zato ker pri $E < V$ bo konvexna, pri
 $E > V$ konkavna ($\frac{\Psi''}{\Psi} < 0$) $\Leftrightarrow$ ($\frac{\Psi''}{\Psi} > 0$) $\Leftrightarrow$

Prilaskovanje vrednosti.

$$\langle x \rangle_t = \int_{-\infty}^{\infty} x \Psi^* \Psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* x \Psi dx \quad (\in \mathbb{R})$$

za $n=1$ je to povprečje paralelne.

za hitrost paralelne vzamemo

$$v = \frac{\partial}{\partial t} \langle x \rangle_t = \int \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial t} x \Psi + 0 + \Psi^* x \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right) dx =$$

časovne odvode izračunamo iz S.E.

$$= \frac{\hbar^2}{2im} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} x \Psi - \Psi^* x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} \right) dx =$$

Spravimo sklepaj v prvi odvod, kar bomo lahko
izintegrirali.

$$\frac{\partial^2 \Psi^*}{\partial x^2} x \Psi = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} x \Psi \right) - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} \Psi - \frac{\partial \Psi^*}{\partial x} x \frac{\partial \Psi}{\partial x} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} x \Psi \right) - \frac{\partial}{\partial x} (\Psi^* \Psi) + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (\Psi^* x \frac{\partial \Psi}{\partial x}) + \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial x} + \Psi^* x \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}$$

(vadiji se odšteje s
tistim pod $\int$)

$$\Rightarrow v = \frac{\hbar^2}{2im} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial \Psi^*}{\partial x} x \Psi - \Psi^* \Psi - \Psi^* x \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right) dx + \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* (x,t) \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \right) \Psi(x,t) dx$$

Prvi integral je bolj kot ne nič, zaradi neskončnih mej. V resnici je to $x\psi$ in če v neskončnosti ni točkov $\delta(x) \rightarrow 0$,

$$\Rightarrow mV_t = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x,t) (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi) dx$$

Ker je mV gibalna količina, lahko upravičeno zapišemo operator gib. količine, $\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$

Zgornji integral je zdaj $\langle \hat{p} \rangle$, oz. pričakovana vrednost gib. kol.

x ni koordinata delca, Sch. en. ni enačba gibanja delca. x nam le pove, katera bo verjetnost, da delec tam najdemo, če bi opravljali meritve.

Kaj dobimo, če $\hat{p}$ uporabimo dvakrat?

$$\hat{p}\hat{p}f(x) = (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x})^2 f = (-i\hbar)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} f$$

Torej lahko pišemo $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}$ ($\hat{V} = V(x,t)$)

$$\hat{p}^n = (-i\hbar)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} \text{ je dobro def.}$$

Če imamo analitično funkcijo $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$,

$$\text{lahko zapišemo } f(\hat{p}) := \sum_{n=0}^{\infty} c_n \hat{p}^n, \quad c_n, z \in \mathbb{C}$$

in imamo funkcijo operatorja.

Če nas potem zanima npr. $e^{-i\hat{p}a}$ upoštevamo definicijo, $e^{-iza} = 1 - iza + \frac{(iz)^2 a^2}{2!} - \dots$

$$\text{in dobimo se } e^{-i\hat{p}a} = 1 - i\hat{p}a + \frac{(i\hat{p}a)^2}{2!} - \dots$$

Vpeljimo se komutator:

$$[\hat{A}, \hat{B}] := \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$$

Kaj je $[\hat{x}, \hat{p}]$?

$$\begin{aligned} [\hat{x}, \hat{p}] f(x) &= x\hat{p}f - \hat{p}xf = -i\hbar (x \frac{\partial}{\partial x} f - \frac{\partial}{\partial x} xf) = \\ &= -i\hbar (x \frac{\partial}{\partial x} f - f - x \frac{\partial}{\partial x} f) = i\hbar f \end{aligned}$$

$$\Rightarrow [\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar$$

Veljajo zveze: • $[\alpha A, B] = \alpha [A, B]$

$$\bullet [AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$$

$$\begin{aligned} \text{Preverimo drugo: } A[B, C] + [A, C]B &= A(BC - CB) + (AC - CA)B \\ &= ABC - CAB + ACB - CBA = [A, B]C \end{aligned}$$

Tudi Jacobijeva identiteta:

$$\bullet [A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0$$

• In Baker-Hausdorffova lema:

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2!} [A, [A, B]] + \frac{1}{3!} [A, [A, [A, B]]] + \dots$$

Zakaj je operator pri $\psi \mapsto A\psi$ raven na sredi, zakaj je ψ^* na levi?

Uporabimo per partes.

$$\int u dv = uv - \int v du$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial}{\partial x} \psi dx = \psi \psi \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial}{\partial x} \psi dx = - \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\partial}{\partial x} \psi) \psi dx$$

Pri prvem odvodu je premenljiva, delili smo mure

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi dx = \dots = + \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi) \psi dx$$

pri drugem odvodu pa je vseeno. $\hat{p}^2$ torej lahko postavimo tudi na začetek.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi^* (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (+i\hbar \psi^*) \frac{\partial}{\partial x} \psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi^*) \psi dx$$

Tudi $\hat{p}$ lahko postavimo na začetek.

$$\Rightarrow \bullet \int (\hat{p}\psi)^* \psi dx = \int \psi^* \hat{p} \psi dx$$

$$\bullet \int \psi^* \hat{p}^2 \psi dx = \int (\hat{p}^2 \psi)^* \psi dx$$

$$\bullet \int \psi^* V \psi dx = \int (V \psi)^* \psi dx \quad (\text{jasno, ker } V(x,t) \in \mathbb{R})$$

$$\Rightarrow \bullet \int \psi^* \hat{H} \psi dx = \int (\hat{H} \psi)^* \psi dx$$

Tudi $\hat{H}$ damo lahko na začetek.

Doitno je $\langle x \rangle \in \mathbb{R}$. Kaj pa $\langle p \rangle$? Tudi.

$$\begin{aligned} \langle p \rangle - \langle p \rangle^* &= \int \psi^* (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}) \psi dx - \int \psi (i\hbar \frac{\partial}{\partial x})^* \psi^* dx = \\ &= \int \psi^* \hat{p} \psi dx - (\int \psi^* \hat{p} \psi dx)^* = \\ &= \int \psi^* \hat{p} \psi dx - (\int (\hat{p}\psi)^* \psi dx)^* = 0, \quad \langle p \rangle \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ehrenfestov teorem.

Najprej nekaj splošnega - kako se pričakovana vrednost spreminja s časom?

Za dan $\psi(x,t)$ znamo izračunati $\langle A \rangle = \int \psi^* A \psi dx$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \int (\frac{\partial \psi^*}{\partial t} A \psi + \psi^* \frac{\partial A}{\partial t} \psi + \psi^* A \frac{\partial \psi}{\partial t}) dx$$

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H} \psi, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\hat{H} \psi}{i\hbar}, \quad (\frac{\partial \psi}{\partial t})^* = \frac{(\hat{H} \psi)^*}{-i\hbar}$$

$$\frac{d}{dt} \langle A \rangle = \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle + \int \left[\frac{(\hat{H} \psi)^*}{-i\hbar} A \psi + \psi^* A \frac{\hat{H} \psi}{i\hbar} \right] dx$$

$$= \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle + \frac{1}{i\hbar} \int [\psi^* \hat{H} A \psi - (\hat{H} \psi)^* A \psi] dx$$

$$i\hbar \frac{d\langle A \rangle}{dt} = i\hbar \langle \frac{\partial A}{\partial t} \rangle + \langle [A, \hat{H}] \rangle$$

lahko damo sem, pomeni smo, da je komutator

$$\text{Enako kot v klasični mehi: } \frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\} \quad (\text{le brez } i\hbar)$$

Zdaj si pogledajmo $\frac{d}{dt} \langle p \rangle$.

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = m \frac{d}{dt} v = m \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [p, H] \rangle$$

$\langle \frac{\partial \Psi}{\partial t} \rangle$ je nič, ker je $\frac{\partial \Psi}{\partial t}$ nič, $\hat{p}$ ni odvisen od časa!

$$[p, \frac{p^2}{2m} + V] = [p, \frac{p^2}{2m}] + [p, V], \text{ se } [p, V] = ?$$

0, ker p in p^2 komutirata

$$[p, V] f = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} (V f) - V (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f) =$$

$$= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} V \cdot f + i\hbar V \frac{\partial}{\partial x} f + V i\hbar \frac{\partial}{\partial x} f$$

$$= -i\hbar \frac{\partial V}{\partial x} f, \text{ torej } [p, V] = -i\hbar \frac{\partial V}{\partial x}$$

$$\frac{d}{dt} \langle p \rangle = \frac{1}{i\hbar} \langle [p, H] \rangle = -\frac{i\hbar}{i\hbar} \langle \frac{\partial V}{\partial x} \rangle$$

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\langle \vec{\nabla} V \rangle = m \vec{a} = \langle \vec{F}(\vec{r}, t) \rangle$$

Ehrenfestov teorem

če smo enoli $\vec{F}(\vec{r}, t) = -\vec{\nabla} V$

Ehrenfestov teorem pravi, da je pospešek „težišča“ valovne funkcije (oz. $\langle H \rangle$) enak pričakovani vrednosti sile na tem mestu.

Brez dokaza: enako velja za vrtilno količino. Vpeljati moramo $\hat{L} = \vec{r} \times \hat{p} = \vec{r} \times (-i\hbar \vec{\nabla})$, $\hat{M} = \vec{r} \times (-\vec{\nabla} V) \Rightarrow \frac{d\langle \hat{L} \rangle}{dt} = \langle \hat{M} \rangle$

Imamo $\langle x \rangle, \frac{d}{dt} \langle x \rangle, \frac{d^2}{dt^2} \langle x \rangle$, zanimajo nas še sive paralelitve.

$$\langle x^2 \rangle = \int \Psi^* x^2 \Psi dx, \langle \hat{p}^2 \rangle = \int \Psi^* \hat{p}^2 \Psi dx$$

jasno je, kaj so momenti ($\hat{p}$) paralelitve $\langle H \rangle$, ni pa čisto jasno, kaj so momenti pri $\hat{p}$.

$$\Delta A^2 := \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2$$

Neenakost CSB: $|\int \Psi_1^* \Psi_2 dx|^2 \leq \int |\Psi_1|^2 dx \cdot \int |\Psi_2|^2 dx$

$$\Rightarrow (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \geq \frac{1}{4} | \langle [A, B] \rangle |^2$$

Za $x, \hat{p}$ je na desni $(\frac{\hbar}{2})^2$, in enačba velja za Gaussovo paralelitve.

Tudi pri drugih A, B imamo neko funkcijo Ψ , pri kateri velja enačba, a ni nujno Gaussova.

Zaenkrat je Δp še interpretacija. Če bi šli v p -prostor, bi tudi v rešnici videli, da je to nedoločnost pri merjenju.

Stacionarna stanja, razvoj po stac. stajih in časovni razvoj.

$$\Psi(x, t) = \Psi(x) f(t) \text{ znan mestni del}$$

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H} \Psi \Rightarrow f = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \text{ in } \hat{H}\Psi = E\Psi$$

Naj bo za $n \in \mathbb{N}$ $\Psi_n(x); E_n$, $\hat{H}\Psi_n = E_n\Psi_n$

$$\text{naj velja: } \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_m^*(x) \Psi_n(x) dx = \delta_{mn}$$

Ob času $t=0$ je $\Psi(x, 0) = \sum_n c_n \Psi_n(x)$ znan

$$(c_n \text{ dobimo tako: } \int \Psi_m^*(x) \Psi(x, 0) dx = \sum_n c_n \int \Psi_m^* \Psi_n dx = \sum_n c_n \delta_{mn})$$

S.E. je linearna, zato je dovolj, če poznamo časovni razvoj lastnih funkcij.

Zato bo:

$$\Psi(x, t) = \sum_n \left(\int \Psi_n^*(x, 0) \Psi(x, 0) dx \right) \cdot \Psi_n(x) e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}$$

$$= \sum_n c_n \Psi_n \left(1 - \frac{iE_n}{\hbar}t + \frac{1}{2!} \left(\frac{E_n t}{\hbar} \right)^2 + \dots \right)$$

Vemo pa: $E_n \Psi_n = \hat{H} \Psi_n \Rightarrow E_n^m \Psi_n = \hat{H}^m \Psi_n$ in dobimo:

$$\Psi(x, t) = \sum_n c_n e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \Psi_n(x) = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}} \Psi(x, 0)$$

če definiramo $U_t = e^{-i\frac{Ht}{\hbar}}$, imamo operator časovnega razvoja:

$$\Psi(x, t) = U_t \Psi(x, 0)$$

Variacijsko reševanje.

Edina uporabna tehnika za teške probleme.

$$\Psi(x) = \sum_n c_n \Psi_n(x), \Psi_n \text{ lastne, } \hat{H}\Psi_n = E_n \Psi_n$$

$$\langle H \rangle = \sum_n c_n^* \int \Psi_n^*(x) \sum_m H c_m \Psi_m(x) dx =$$

$$= \sum_{m,n} c_n^* c_m E_m \int \Psi_n^* \Psi_m dx = \sum_n |c_n|^2 E_n$$

če izberemo tako, da $E_n \geq E_0$:

$$\langle H \rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n \geq \sum_n |c_n|^2 E_0 = E_0 \sum_n |c_n|^2 = E_0$$

$$E_0 \leq \langle H \rangle = E_\lambda \text{ } \swarrow \text{ more funkcije, ki pa niso lastne}$$

$$\Psi(x) = \sum_n d_n(\lambda) \Psi_n(x)$$

Sprenjajmo $d_n(\lambda)$, in minimiziramo E_λ , upamo, da je dobra funkcija (oz. λ)

Diracov zapis; formalizem kvantne mehanike

① $\psi(x,t) \in \mathbb{C}$; $\psi \in L^2$, ψ_n lastne funkcije ONB

$\psi = \sum_n c_n \psi_n$ v fiziki ni potrebno delati razlike med Banachovim in Hilb. prostorom

② skalarni produkt: $\langle \psi | \psi \rangle = \int \psi^* \psi dx$

seveda: $\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle^*$

$\langle \psi | \psi \rangle = 0 \iff \psi = 0$ (ni kvantno stanje, je pa funkcija psi)

$$|\langle \psi | \psi \rangle|^2 \leq \langle \psi | \psi \rangle \cdot \langle \psi | \psi \rangle$$

③ $|\psi\rangle$ je ket, vektor v abstraktnem Hilb. prostoru. Ni to nujno kar funkcija

④ linearni operatorji: $(\lambda \hat{A} + \mu \hat{B})\psi = \lambda \hat{A}\psi + \mu \hat{B}\psi$

⑤ $\hat{f}_c: L^2 \rightarrow \mathbb{C}$, $\hat{f}_c \psi = c \in \mathbb{C}$

Rieszov izrek: za vsak $\hat{f}_c$ obstaja $f_c(x)$, da

$$\hat{f}_c \psi = \int f_c^*(x) \psi(x) dx = \langle f_c | \psi \rangle$$

ln se bra: $f_c(x)$, $\langle f_c | \psi \rangle = c$

$\hat{f}_c = \langle \hat{f}_c |$, to je bra in čaka, da bo nekaj povzegal integrirati, $= \int f_c^*(x) \dots dx$

Če moremo $\langle \hat{f}_c | \psi \rangle$ pisano $\langle \hat{f}_c | \psi \rangle$, ker je tudi po definiciji isto.

⑥ Parovaj vektorja p bazi:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle, \text{ kjer } |n\rangle = |\psi_n\rangle \text{ lastna funkcija}$$

$$\langle m | \psi \rangle = \sum_n c_n \langle m | n \rangle = c_m$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \sum_n \langle n | \psi \rangle |n\rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \psi \rangle = \sum_n |n\rangle \langle n | \psi \rangle$$

$$\Rightarrow I := \sum_n |n\rangle \langle n| = \sum_n P_n \quad (\text{vrinili smo kompletni sistem})$$

P_n je projektor na stanje $|n\rangle$, in je idempotentem $P_n^2 = P_n$

⑦ Zapis operatorja v dani bazi:

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |n\rangle; |\chi\rangle = \sum_m d_m |m\rangle$$

$$\begin{aligned} A|\psi\rangle &= \sum_n c_n A|n\rangle = \sum_{nm} c_n |m\rangle \langle m | A | n \rangle \\ &= \sum_m \left(\sum_n A_{mn} c_n \right) |m\rangle = \sum_m d_m |m\rangle = |\chi\rangle \end{aligned}$$

A_{mn} , matrični element

V fiziki je to mogoče z matriko enako delovajni operatorja. To zato, ker lahko odrežemo nek, ostane matrike (neskončno vrstica). Če tega ne moremo narediti, in bi matrika morala biti neskončna, pa ne bi smeli reševati s S.E., ampak relativistično.

Primer reševanja S.E.:

$$\text{iti } \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H|\psi\rangle = \sum_n H|n\rangle \langle n | \psi \rangle$$

$$\text{iti } \frac{\partial}{\partial t} \langle m | \psi \rangle = \sum_n \langle m | H | n \rangle \langle n | \psi \rangle$$

$$\text{iti } \frac{\partial}{\partial t} c_m = \sum_{n=1}^N H_{mn} c_n$$

tako tudi rešujemo z računalniki

$$\hat{A} = I \hat{A} I = \sum_{n,m} |n\rangle \langle n | \hat{A} | m \rangle \langle m | = \sum_{n,m} |n\rangle A_{nm} \langle m |$$

$$-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = \hat{p} = \sum_n \psi_n(x) \sum_m \underbrace{\left(\int \psi_m^*(x') (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x'}) \psi_m(x') dx' \right)}_{p_{nm}, \text{ izračunano le enkrat}} \int \psi_m^*(x') \dots dx$$

⑧ Hermitsko adjungirani operatorji.

$A = |\psi_1\rangle \langle \psi_2|$ je nek primer operatorja.

ločala funkcijo, je skalarno pomnoži in tvori nek večkratnik prve funkcije ψ_1 .

(a) Def: Adj. operator $A^\dagger := |\psi_2\rangle \langle \psi_1|$

$$\text{Trditev: } \langle \psi | A | \psi \rangle = \int \psi^* A \psi dx = \int (A^\dagger \psi)^* \psi dx = \langle A^\dagger \psi | \psi \rangle$$

Preverimo: $\langle \psi_1 | \psi_1 \rangle \langle \psi_2 | \psi \rangle = \langle \psi_1 | \psi \rangle \langle \psi_2 | \psi \rangle^* = \langle \psi_1 | \psi \rangle^* \langle \psi_2 | \psi \rangle$

$$\langle A^\dagger \psi | \psi \rangle = \langle \psi | A^\dagger \psi \rangle^* = \langle \psi | A^\dagger | \psi \rangle^*$$

Lahko kot pri A69
 $\langle \psi_1 | \psi \rangle = \langle \psi_2 | \psi \rangle^*$
tako definiramo B
Če obstaja, definiramo
 $A^\dagger = B$

(b) $(cA)^\dagger = c^* A^\dagger$, če $c \in \mathbb{C}$

$$(\mu A + \lambda B)^\dagger = \mu^* A^\dagger + \lambda^* B^\dagger$$

$$C = \sum_{nm} c_{nm} |\psi_n\rangle \langle \psi_m| \Rightarrow C^\dagger = \sum_{nm} c_{nm}^* |m\rangle \langle n| = \sum_{nm} c_{mn}^* |n\rangle \langle m|$$

(zamenjamo m, n)

$$\text{Vemo: } c_{nm} = \langle n | C | m \rangle$$

$$(C^\dagger)_{nm} = \langle n | C^\dagger | m \rangle = c_{mn}^* = (c_{mn})^* = (C^\dagger)_{nm}$$

Primeri:

$$A = c \in \mathbb{C} \Rightarrow A^\dagger = c^*$$

$$(AB)^\dagger = B^\dagger A^\dagger$$

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} = \hat{p}^\dagger, \text{ tudi } \hat{p}^\dagger = (\hat{p}^\dagger)^\dagger, \text{ zato } H = H^\dagger$$

⑨ Unitarni operatorji

$U^\dagger U = U U^\dagger = I$ je inverzen operator k U.

unitaren operator je tak, da $U^\dagger = U^{-1}$

$$\begin{aligned} |\psi\rangle &= \sum_n c_n |n\rangle = \sum_n c_n |\psi_n\rangle = \sum_n c_n \sum_m |\chi_m\rangle \langle \chi_m | \psi_n \rangle = \\ &= \sum_m \left(\sum_n U_{mn} c_n \right) |\chi_m\rangle \end{aligned}$$

dm

v novi bazi

skal. prod. je invariant

$$U|\psi\rangle = |\psi'\rangle, U|\psi\rangle = |\psi'\rangle, \langle \psi' | \psi' \rangle = \langle U\psi | U\psi \rangle =$$

$$\langle \psi | \psi \rangle = \langle \psi | U^\dagger U | \psi \rangle = \langle \psi | \psi \rangle$$

$$\langle \psi' | A' | \psi' \rangle = \langle \psi' | U A U^\dagger | \psi' \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle$$

- Za vsak U obstoja $K = K^\dagger$, tako da $U = e^{iK}$
(unitaren)

$$\bullet e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}$$

$$D = \lambda A + \mu AB + \xi ABC \Rightarrow D' = \lambda A' + \mu A'B' + \xi A'B'C'.$$
$$\psi(x) = \int \varphi(p) \frac{e^{+i \frac{p}{\hbar} x}}{\sqrt{2\pi\hbar}} dp = \int \varphi(p) \psi_p(x) dp \quad ; \quad \psi_p(x) = \frac{e^{+i \frac{p}{\hbar} x}}{\sqrt{2\pi\hbar}}$$

$$\int |x|^2 dx = \int |\varphi|^2 d\varphi \quad (\text{Parseval})$$

Oglejmo si operatorje v obeh reprezentacijah.

↑
ravni val. Ravni val~~ki~~ ni normalizabilen. Ni norme,
zato je to Banachov prostor. To nas v
fiziki ne moti, ker greva lahko v p-prostor.

$$\hat{x} \psi(x) = x \psi(x) = x \int \psi(p) \psi_p(x) dp = \int \psi(p) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial p} (\psi_p(x)) dp =$$

$$= +i\hbar \int \left(+ \frac{\partial}{\partial p} \psi(p) \right) \psi_p(x) dp$$

$$\Rightarrow \hat{x} \psi(x) = x \cdot \psi(x) \longleftrightarrow \hat{x} \psi(p) = +i \hbar \frac{\partial}{\partial p} \psi(p)$$

Kakšne so lastne funkcije?

Vemo da je lastna funkcija za $\hat{p}$ ravni val.
enotna za l.f. $\hat{x}=x$

$$\hat{x} \psi_{x_0}(x) = x_0 \psi_{x_0}(x) = x \psi_{x_0}(x) = \int \left(i \hbar \frac{\partial}{\partial p} \psi_{x_0}(p) \right) \psi_p(x) dp = \int \psi_{x_0}(p) x_0 \psi_p(x) dp$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial p} \psi_{x_0}(p) = x_0 \psi_{x_0}(p) \Rightarrow \psi_{x_0}(p) = \frac{e^{-ipx_0/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \psi_p^*(x_0)$$

$$\psi_{x_0}(x) = \int \frac{e^{-ipx}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \frac{e^{ipx}}{\sqrt{2\pi\hbar}} dp = \delta(x-x_0)$$

Tako je tudi Dirac prišel do δ -funkcije

$$\hat{p}^n \psi_{p_0}(x) = \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x}\right)^n \psi_{p_0}(x) = p_0^n \psi_{p_0}(x).$$

$$| \psi \rangle = \int \psi(p) \cdot | p \rangle dp \quad / \quad \langle p' |$$

Nachgesehen v
Diacorem
formaliter

$$\langle p' | \psi \rangle = \int \psi(p) \underbrace{\langle p' | p \rangle}_{\delta(p-p')} dp = \psi(p')$$

$$\Rightarrow \varphi(p) = \langle p | \psi \rangle$$

po istini bazi in $\langle n|m \rangle = \delta_{nm}$.

tu più zverri pa mano naresta kroevodny
kar Otava delta.

$$|\psi\rangle = \int \langle p|\psi\rangle |p\rangle dp = \int |p\rangle \langle p|\psi\rangle dp$$

$$\sum_n |n\rangle\langle n| + \int |p\rangle\langle p| dp = I \quad (\text{identiteta})$$

pozivati moramo po zveznih in vezanih stanjih

$$|x_0\rangle = |\psi_{x_0}\rangle = \int |p\rangle \langle p | \psi_{x_0} \rangle dp$$

Uporabili
sno I.

$$\langle x | \psi \rangle = \int \ell(p) |p\rangle dp = \int \langle p | x \rangle^* \langle p | \psi \rangle dp =$$

$$= \int \varphi(p) \psi_p(x) = \psi(x)$$

$$\rightarrow \underline{\langle x | 4 \rangle = 4(x)}$$

$$|\psi\rangle = \int |x'\rangle \langle x'|\psi\rangle dx' = \int \psi(x') |x'\rangle dx'$$

$$\int |x\rangle \langle x| dx = I$$

Ce inano operator A , $A|a\rangle = a|a\rangle$

$$I = \sum |a_n x_n| + \int |a x| da$$

vezna in glavna baza sta pri identiteti.

Se dodatek o hermitskih operatorjih.

$$A = A^\dagger \quad (\text{hermitisch})$$

$$\textcircled{1} A|a\rangle = a|a\rangle \quad / \langle a| \Rightarrow \langle a|A|a\rangle = \langle a|a\rangle \cdot a$$

$$\langle a|A|b\rangle^* = \langle b|A^\dagger|a\rangle$$

$$\langle a | A | a \rangle^* = a^* \langle a | a \rangle^*$$

$$\Rightarrow \underline{a = a^*} \quad \underline{a \in \mathbb{R}}$$

② A

Opazljivke.

Def: Opazljivke so hermitski operatorji.

Naj ima opazljivka A neko bazo, $A|a\rangle = a|a\rangle$

linejno se eno s svojo bazo, $B|b\rangle = b|b\rangle$.

Naj komutirata. $[A, B] = 0$

$$BA|a\rangle = aB|a\rangle$$

$$AB|a\rangle = aB|a\rangle \quad \text{Tudi } B|a\rangle \text{ je bazo lastna funkcija.}$$

Def: Dve bazi sta enaki, če ju lahko uveljavimo po vrsti in velja $|a_i\rangle = e^{i\phi_i} |b_i\rangle$, razlikujeta se torej le v fazi.

Trditev: Če bazi $\{|a\rangle\}$ in $\{|b\rangle\}$ nista enaki, potem obstaja C , da $[A, C] = [B, C] = 0$.

To induktivno uporabljamo naprej, in dobimo kompleten sistem operatorjev, $A, B, C, D, \dots$

Ta veriga se lahko sklene. Stanje $|\Psi\rangle$ lahko opišemo s kvantnimi števili, $|\Psi\rangle = |abcd\rangle$.

(Vee na: Schuabl; 102.)

Aksiomi kvantne mehanike.

- ① Stanje sistema opišemo z elementom Hilbertovega prostora, $|\Psi\rangle$.
- ② Opazljivke so hermitski operatorji, $A = A^\dagger$.
- ③ Pričakovana vrednost opazljivke A v stanju $|\Psi\rangle$ je $\langle\Psi|A|\Psi\rangle$.
- ④ $i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\Psi\rangle = H|\Psi\rangle$ (tako je določen časovni razvoj.)
- ⑤ Meritev opazljivke A (A ima bazo $A|a\rangle = a|a\rangle$) v stanju $|\Psi\rangle = \sum_a |a\rangle \langle a|\Psi\rangle = \sum_a c_a |a\rangle$

Lastno vrednost a dobimo z verjetnostjo $P_a = |c_a|^2$. Izvenno lahko le rek a .

$$\Psi(x) = \langle x|\Psi\rangle = \int \phi(p) e^{ikx} dp = \int \Psi(x') \delta(x-x') dx'$$

$$\text{v stanju } [p, p] dp: \frac{dp}{dp} = |\phi|^2; \quad \delta(x-x') = |\Psi(x')|^2$$

Izmerimo lahko le neko lastno vrednost, a , torej le iz nabora $\{a\}$. Po meritvi je delec v stanju $|a\rangle$.

To je "močna" oz. "von Neumannova" meritev.

Harmonski oscilator.

$$V(x) = \frac{1}{2} kx^2, \quad H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} kx^2$$

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

klasično:

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

$$x = A \sin \omega t + B \cos \omega t$$

$$H = \hbar \omega \left(-\frac{1}{2} \frac{x_0^2 \partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{x}{x_0} \right)^2 \right), \quad \text{kjer } x_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} + \frac{x_0 \partial}{\partial x} \right) = \frac{m\omega x + i p}{\sqrt{2} m \omega \hbar}$$

$$a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{x}{x_0} - \frac{x_0 \partial}{\partial x} \right)$$

$$x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} (a + a^\dagger) = x^\dagger; \quad p = -i \sqrt{\frac{\hbar m \omega}{2}} (a - a^\dagger) = p^\dagger$$

$$H = \hbar \omega \left(\underbrace{a^\dagger a}_{\hat{n}} + \frac{1}{2} \right) \quad [a, a^\dagger] = 1 \quad (\text{ sledi iz } [x, p] = i\hbar)$$

$H\Psi = E\Psi$, najti moramo lastne funkcije operatorja štetja, $\hat{n}$.

$$\hat{n} \psi_\nu(x) = \nu \psi_\nu(x)$$

$$\hat{n} |\nu\rangle = \nu |\nu\rangle \quad \nu \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \langle \nu | \hat{n} | \nu \rangle = \nu \langle \nu | \nu \rangle \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \nu \in \mathbb{R}$$

$\hat{n}$ je hermitski,

$$\hat{n}^\dagger = (a^\dagger a)^\dagger = a^\dagger a$$

$$\psi_\nu(x) = \langle x | \nu \rangle$$

$$\langle a \psi_\nu | a | \psi_\nu \rangle \geq 0 \Rightarrow \nu \geq 0$$

$$\hat{n} \psi_\nu(x) = 0 \quad (\text{poglejmo najprej } \nu=0)$$

$$a^\dagger a \psi_\nu(x) = 0, \quad a \psi_\nu(x) = 0$$

$$\frac{x_0}{\sqrt{2}} \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{x}{x_0^2} \right) \psi_\nu(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \psi_\nu}{\partial x} = -\frac{x}{x_0^2} \psi_\nu \Rightarrow \int \frac{d\psi_\nu}{\psi_\nu} = -\int \frac{x}{x_0^2} dx$$

$$\psi_\nu(x) = A e^{-\frac{x^2}{2x_0^2}} \quad \text{za } \nu=0$$

$$\text{Vzamenno } A = \frac{1}{\sqrt{\pi} x_0} \quad \text{in moramo normalizirati, } \langle 0 | 0 \rangle = 1$$

$$[\hat{n}, a^\dagger] = [a^\dagger a, a^\dagger] = a^\dagger [a, a^\dagger] + \underbrace{[a^\dagger, a^\dagger]}_0 a = a^\dagger$$

$$[\hat{n}, a] = [a^\dagger a, a] = a^\dagger [a, a] + \underbrace{[a^\dagger, a]}_0 a = -a$$

$$\hat{n} \psi_\nu = \nu \psi_\nu$$

$$\hat{n} a^\dagger \psi_\nu = (a^\dagger \hat{n} + a^\dagger) \psi_\nu = (a^\dagger \nu + a^\dagger) \psi_\nu = (\nu+1) a^\dagger \psi_\nu$$

$$\Rightarrow a^\dagger \psi_\nu = C \cdot \psi_{\nu+1} \quad (\text{more natančno formula, še C.})$$

$$a^\dagger |\nu\rangle = C |\nu+1\rangle$$

$$\langle a^\dagger \psi_\nu | a^\dagger \psi_\nu \rangle = \langle \psi_\nu | a a^\dagger | \psi_\nu \rangle = \langle \psi_\nu | a^\dagger a + 1 | \psi_\nu \rangle = \langle \psi_\nu | \hat{n} + 1 | \psi_\nu \rangle$$

$$\frac{a^\dagger a + 1}{\nu + 1}$$

$$\Rightarrow |C|^2 = \nu + 1$$

In smo dobili $|\psi_{n+1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}} a^+ |\psi_n\rangle$

Rekurzivno: $|\psi_{n+2}\rangle = \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+2}} a^+ a^+ |\psi\rangle$

$\Rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{+n} |0\rangle$

$n \in 0, 1, \dots$

$\Rightarrow |n\rangle = \frac{a^{+n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle$

Ni nam treba vedeti, da so $|n\rangle$ Hermiti, pa nam vseno lastne vrednosti.

Podobno: $\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} a \psi_{n+1}(x)$

a^+ zvišuje n , zato je kreacijski

a^- znižuje, zato mu rečemo anihilacijski.

Ampak ali smo našli vse lastne vrednosti?

Ali je lahko $\nu = n + \alpha$, $0 < \alpha < 1$?

$a \psi_\nu(x) \rightarrow \psi_{\nu-1}(x)$

$a^2 \psi_\nu(x) \rightarrow \psi_{\nu-2}(x)$

$\vdots$

$a^m \psi_\nu(x) \rightarrow \psi_{\nu+m-m}(x)$

Če $m = \lfloor \nu + \alpha + 1 \rfloor$ bomo dobili negativni ν , mi pa reče, da $\nu \geq 0$.

Če pridemo do $\nu=0$ pa ni tega protislovja.

$a \psi_0 = 0$, $a^2 \psi_0 = 0$

Koherentno stanje

Gaussov paket izmaknemo iz sredine, v potencialu $\frac{1}{2} k x^2$. Neodvisno od amplitude bo nihalo harmonično, s frekvenco $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$, kot klasično. Več pa na vajah.

Oblika porazdelitve Λ pa se ne spreminja.

Take resitve problemov so redke.

Unitarni operatorji / primeri / simetrije

$U^{-1} = U^\dagger$; $U^\dagger U = U U^\dagger = I$

$U_t = e^{-i \frac{H}{\hbar} t}$, $\psi(t) = U_t \psi(0)$ generator je H
 $\dot{U} = -i \frac{H}{\hbar} U$

parnost: $U_p f(x) = f(-x)$

$H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$; $P V(x) = V(x)$ (če V sod)

$(P \frac{\partial^2}{\partial x^2}) f(x) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} (P f(x))$

Če V sod

$\Rightarrow P \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} P$

$\Rightarrow [H, P] = 0$

$H \psi(x) = E \psi(x)$

$P H \psi = H P \psi = E P \psi$
 $\psi(-x)$

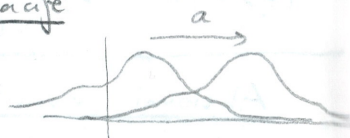
$\psi_\pm(x) := \frac{\psi(x) \pm \psi(-x)}{\sqrt{2}}$

(na vajah tudi degeneriran primer)

Če je E nedegeneriran $\Rightarrow \psi$ je liha ali soda (in če $V(x) = V(-x)$)

operator premika / translacije

$(U_a f)(x) = f(x-a)$



Razvijemo v Taylorja.

$= f(x) - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot a + \frac{1}{2!} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} a^2 \pm \dots =$

$= e^{-i a \frac{\partial}{\partial x} \frac{\hbar}{\hbar}} f(x) = e^{-i \frac{a}{\hbar} \frac{\partial}{\partial x}} f(x)$

$\Rightarrow U_a = e^{-i \frac{a}{\hbar} \frac{\partial}{\partial x}}$

Obrat časa

ih $\frac{\partial \psi}{\partial t}(t) = H \psi(t)$

označimo ga s T

ih $\frac{\partial \psi(-t)}{\partial (-t)} = H(-t) \psi(-t)$

Če H ni odvisen od časa, $V(x,t) = V(x)$, potem $H(-t) = H$.

ih $\frac{\partial \psi^*(-t)}{\partial t} = H \psi^*(-t)$ spet s.e.

Torej, če $\psi(x)$ rešitev, potem je tudi $\psi^*(-x)$ rešitev s.e.

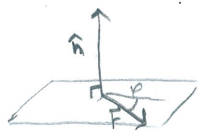
T naredi na enačbi: $t \rightarrow -t$, da $*$ na funkcije in če bi imeli katalsen $\vec{B}$, vrtilno koli., ali spin, bi ti obrnili smer.

Za konstantne potenciale:

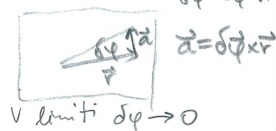
$\left. \begin{aligned} H \psi(x) &= E \psi(x) \\ H \psi^*(x) &= E \psi^*(x) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$ če E ni degeneriran, je $\psi(x) \in \mathbb{R}$ (do $e^{i\phi}$ in $e^{-i\phi}$)

Operator vrtenja

$$U_{\varphi} \psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r} - \vec{F}) = \\ = \psi(\vec{r}) - \frac{i\vec{\alpha} \cdot \vec{F}}{\hbar} \psi(\vec{r}) \pm \dots$$



$$\vec{a} \cdot \vec{p} f(\vec{r}) = (\delta\vec{p} \cdot \vec{r}) \cdot \vec{p} f(\vec{r}) = \\ = \delta\vec{p} \cdot (\vec{r} \times \vec{p}) f(\vec{r})$$



$$U_{\varphi} \psi(\vec{r}) = \left(1 - \frac{i\delta\vec{p} \cdot \vec{F}}{\hbar}\right) \psi(\vec{r}) + O(\delta\varphi^2)$$

$$\delta\vec{p} = \frac{\vec{F}}{N}, \quad \hat{n} = \text{konst.}$$

$$U_{\varphi} = U_{\delta\varphi} \dots U_{\delta\varphi} = \left(1 - \frac{i\vec{F} \cdot \vec{F}}{N\hbar}\right)^N = e^{-\frac{i\vec{F} \cdot \vec{F}}{\hbar}}$$

$$\vec{r}^+ = \vec{r}, \quad (AB)^+ = B^+ A^+$$

$$\vec{p}^+ = \vec{p}$$

$$\text{Klasično: } L = \vec{r} \times \vec{p} = -\vec{p} \times \vec{r}, \text{ ali tudi tu?}$$

Pogledamo v koordinatah.

$$L = \vec{r} \times \vec{p} = (y\partial_z - z\partial_y, z\partial_x - x\partial_z, x\partial_y - y\partial_x) = L^+$$

Ker $[r_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$, zato lahko $x_i\partial_{x_j}$ menjamo, ker komutirata.

Vrtilna količina

O delcu ne vemo nič, vemo pa npr. kako se giblje težišče poravnalnice. Tako smo vpeljali gibalno količino. Lahko bi jo vpeljali tudi prek translacij.

Tako bomo vpeljali vrtilno količino, torej prek rotacij.

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -\vec{p} \times \vec{r} = \vec{L}^+$, od tu se tudi vidi, da je vrtilna količina hermitska. V klasični limiti je to res vrtilna količina. Hermitski operator je tudi $L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L} = (L^2)^+$.

Lastne vrednosti poznamo, L_{em} .

$$\text{Vemo } [x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}, \quad [x_i, x_j] = [p_i, p_j] = 0$$

$$\Rightarrow [L_i, L_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} L_k$$

$$L_x = i\hbar \left(\sin\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \cos\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right)$$

$$L_y = i\hbar \left(-\cos\varphi \frac{\partial}{\partial\theta} + \cot\theta \sin\varphi \frac{\partial}{\partial\varphi} \right)$$

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\varphi}$$

Z direktnim računan lahko pokažemo

$$[L_i, x_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} x_k, \quad [L_i, p_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} p_k$$

Da pa se pokaže splošnejša enačba:

$$\vec{A}(\vec{r}) = (A_x, A_y, A_z) \Rightarrow [L_i, A_j] = i\hbar\epsilon_{ijk} A_k$$

(iz te sledijo vse prejšnje)

Velja tudi $[L_i, C] = 0$, kjer C je skalar.

Lahko $C = r^2, p^2, L^2$, se pravi $[L^2, L_i] = 0$!

Kot pri optiki vpeljemo še $L_{\pm}$.

$$L_{\pm} = L_x \pm iL_y = (L_{\mp})^+$$

Hitro se vidi se $[L^2, L_{\pm}] = 0$.

Podobno vlogo kot a in a^+ pri harm. osc. bosta mela tu prav L_+ in L_- .

$$[L_z, L_{\pm}] = [L_z, L_x \pm iL_y] = [L_z, L_x] \pm i[L_z, L_y] \\ = i\hbar L_y \pm i(-i\hbar L_x) = \hbar L_x \pm i\hbar L_y = \hbar L_{\pm} (\pm 1)$$

Pri harm. osc. smo imeli

$$[n, a^+] = a^+$$

$$[n, a] = -a$$

$$\text{tu pa } [L_z, L_{\pm}] = \pm \hbar L_{\pm}$$

"n" "a", "a"

Se komutator $[L_+, L_-]$:

$$[L_x + iL_y, L_x - iL_y] = [L_x, L_x] + i[L_y, L_x] - i[L_x, L_y] + [L_y, L_y] \\ = -i(i)\hbar L_z + \hbar L_z = 2\hbar L_z$$

$$L_{\pm} L_{\mp} = (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y) = L_x^2 \pm iL_y L_x \mp iL_x L_y + L_y^2 = \\ = L_x^2 + L_y^2 \pm \hbar L_z = L^2 - L_z^2 \pm \hbar L_z$$

In smo izrazili L^2 in L_z , kar že vemo, da je edino pomembno.

$$L^2 = L_+ L_- + L_z^2 - \hbar L_z = L_- L_+ + L_z^2 + \hbar L_z$$

Zdaj pa končno poiščimo lastne funkcije.

$$L_z \psi_{l_z} = l_z \psi_{l_z}$$

$$L_z L_{\pm} \psi_{l_z} = (L_{\pm} L_z \pm \hbar L_{\pm}) \psi_{l_z} = (l_z \pm \hbar) L_{\pm} \psi_{l_z}$$

Kot pri harm. oscilatorju, $L_+ \psi_{l_z}$ je lastna funkcija za L_z in lastna vrednost je za eno večja. Pišemo lahko $l_z = m \cdot \hbar$.

$$L^2 |m\rangle = \lambda |m\rangle \quad \langle m|$$

$$\langle m| L^2 |m\rangle = \langle m| L L |m\rangle =$$

$$= \langle L^+ m | L m \rangle = \langle L m | L m \rangle$$

in to je ≥ 0 .

$$\langle m| L^2 |m\rangle = \lambda \langle m| m \rangle \quad \Rightarrow \lambda \geq 0$$

Če je $|m\rangle$ lastna stanja L^2 , je tudi $L_{\pm} |m\rangle$:

$$L^2 L_{\pm} |m\rangle = L_{\pm} L^2 |m\rangle = \lambda L_{\pm} |m\rangle$$

↑ komutirata

$$0 \leq \langle L_{\pm} \psi_m | L_{\pm} | \psi_m \rangle = \langle \psi_m | (L_{\pm})^{\dagger} L_{\pm} | \psi_m \rangle =$$

$$= \langle \psi_m | L_{\mp} L_{\pm} | \psi_m \rangle = (1 - l_z^2 \mp \hbar l_z) \langle \psi_m | \psi_m \rangle \geq 0$$

$$\Rightarrow 1 - l_z^2 \mp \hbar l_z \geq 0$$

Vzamevno $l \geq 0$ in

$$\lambda = \hbar^2 l(l+1)$$

$$\Rightarrow l(l+1) - m^2 - m \geq 0; \quad l(l+1) \geq m(m+1)$$

$$\text{če } l \geq 0 \Rightarrow 0 \leq m \leq l$$

$$\text{če bi veli } l \leq 0 \Rightarrow -l \leq m \leq 0$$

$$\Rightarrow |m| \leq l$$

(Smo pa vmes uporabili kompletnost komutirajočih operatorjev.)

ψ_{lm} je lastno stanje za L^2 in L_z .

$$L_z \psi_{lm} = m \hbar \psi_{lm}$$

$$L^2 \psi_{lm} = \hbar^2 l(l+1) \psi_{lm}$$

Poglejmo $m=l$:

$$L_- \psi_{ll} = C \psi_{l,l-1} \quad (L_- \text{ zmanjša } m)$$

$$L_- L_- \psi_{ll} = D \psi_{l,l-2}$$

$$L_-^k \psi_{ll} = G \psi_{l,l-k}$$

Kakšen mora biti l , da se da po k korakih priti iz največje do najmanjše vrednosti.

$$\Rightarrow l - k = -l$$

$$\Rightarrow k = 2l, \text{ zato } l = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$$

(polovična cela števila)

$$L_z = -i \hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

$$-i \hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi_{lm} = m \hbar \psi_{lm} \Rightarrow \psi_{lm} = C e^{im\varphi}$$

Zdaj pride na vrsto fizika. Mi želimo

ψ uporabljati kot valovno funkcijo. Zato mora

biti zverna, $\psi(\varphi + 2\pi) = \psi(\varphi)$

$$\Rightarrow e^{im2\pi} = 1 \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$$

Zato imamo sferne harmonike

Pri spinu pa tega argumenta ni, ker spinški prostor ni resnično Schr. eniče. Ni zahtev periodičnosti.

Zanimivost: $f(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\sin \vartheta} e^{i\varphi}$ je lastna

funkcija za operator L^2 , ampak ni sferični harmonik in tudi ni zverna.

Ali je lahko $l = l_0 + \alpha$, $\alpha \in (0,1)$.

Pridemo pri delovanju $L_{\pm}$ do $m = -l - (1-\alpha)$

Prej to ni bil problem, $L_-^k \psi_{l,-l} = 0$,

in podobno $L_+^k \psi_{l,l} = 0$.

Zakaj vpletemo vrtilno količino?

Poglejmo si centralni potencial, $V(\vec{r}) = V(r)$

Klasično:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} V = -\frac{\partial V}{\partial r} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} + \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

Enako tu:

Vrtilno obratno vektorja $\vec{n}$.

$$e^{-i\vec{p} \cdot \frac{\vec{r}}{r}} V(r) = V(r) \Rightarrow \begin{cases} [L^2, H] = 0 \\ [L_z, H] = 0 \\ [L_z, L^2] = 0 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{Elm}(r) \\ = \psi_{Elm}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi) \end{array} \right.$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r) + \frac{1}{r^2} \left(\frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta \partial_{\vartheta}) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \partial_{\varphi}^2 \right)$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(r) \right) \Psi_{Elm} = E \Psi_{Elm}$$

$$\left(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{\hat{L}^2}{2mr^2} + V \right) \psi_{Elm}(r) Y_{lm} = E \psi_{Elm}(r) Y_{lm}$$

$$\hat{L}^2 \rightarrow \hbar^2 l(l+1), \text{ dobro (ker } Y \text{ l. fun.)}$$

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} + V(r) \right) \psi_{Elm}(r) = E \psi_{Elm}(r)$$

V_c , centrifugalni potencial

Standardni postopeki

$$\psi_{El}(r) = \frac{u(r)}{r} \quad (\text{ker smo v 3D}), \text{ v 2D bi } \frac{u(r)}{r}$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial}{\partial r}) \frac{u}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 (\frac{u'}{r} - \frac{u}{r^2})) =$$

$$= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (ru' - u) = \frac{1}{r^2} (u' + ru'' - u') = \frac{u''}{r}$$

$$\Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} u + V(r)u = Eu$$

(a) ko $r \rightarrow 0$ velja $V \ll \frac{1}{r^2}$ (ena možnost)

$$\text{Vstavimo } u = r^{\alpha}: \quad -\alpha(\alpha-1) + l(l+1) = 0$$

$$\alpha-1 = l \text{ ali } \alpha = -l$$

$$u = A r^{l+1} + B r^{-l}$$

če prostor vključuje 0, je $B=0$

(b) Druga možnost, $r \rightarrow \infty$, $V \rightarrow 0$.

$$E = -|E| \quad u = Ae^{-\kappa r} + Be^{\kappa r}, \quad \kappa \in \mathbb{R}$$

$$-\frac{\hbar^2 \kappa^2}{2m} = E \quad (\text{če postar vključuje neskladje je } B=0)$$

Zdaj pa znamo problem, Coulombski potencial.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2} u - \frac{e^2 Z}{4\pi\epsilon_0 r} u = Eu$$

Vpeljemo brezdimenzijske koordinate.

$$u(s) = A s^{l+1} e^{-s} w(s)$$

$$① \frac{\hbar^2}{2m} = \frac{|E|}{\kappa^2}; \quad \kappa r = s$$

$$② -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dr^2} = -|E| \frac{d^2}{ds^2}$$

$$③ \frac{|E| l(l+1)}{s^2} \text{ je drugi člen}$$

$$④ |E| \frac{s_0}{s}; \quad s_0 = \frac{e^2 Z \hbar}{4\pi\epsilon_0}$$

$$⑤ E = -|E|$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{ds^2} u - \frac{l(l+1)}{s^2} u + \frac{s_0}{s} u - u = 0$$

$$\frac{d^2 u}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left[(l+1)s^l e^{-s} w(s) - s^{l+1} e^{-s} w(s) + s^{l+1} e^{-s} w'(s) \right]$$

$$= l(l+1)s^{l-1} e^{-s} w(s) - 2(l+1)s^l e^{-s} w(s) + (l+1)s^l e^{-s} w'(s) + s^{l+1} e^{-s} w(s) - 2s^{l+1} e^{-s} w'(s) + s^{l+1} e^{-s} w''(s)$$

Vstavimo v podčrtano, dobimo:

$$s \frac{d^2 w}{ds^2} + 2[(l+1)-s] \frac{dw}{ds} + [s_0 - 2(l+1)]w = 0$$

$$w(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k \quad (\text{reševanje s potenčno vrsto})$$

Dobimo:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k [k(k-1)s^{k-1} + 2(l+1)ks^{k-1}] + \sum_{k=0}^{\infty} a_k [-2ks^k + [s_0 - 2(l+1)]s^k] = 0$$

V prvi lahko zanemaremo člen, člen pri a_0 je tak 0, kar je pomnožen s k .

$$0 = \sum_{k=0}^{\infty} \left[a_{k+1} [k(k+1)s^k + 2(l+1)(k+1)s^k] + a_k [-2ks^k + [s_0 - 2(l+1)]s^k] \right]$$

za vsak $s \Rightarrow$ vsak člen = 0

Dobimo relativno zvezo.

velikost skrita
lastna vrednost

$$a_{k+1} [k(k+1) + 2(l+1)(k+1)] + a_k [-2k + (s_0 - 2(l+1))] = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{2}{k}$$

(pri levem ostane k^2 ,
pri desnem $-2k$, damo
na drugega stran, delimo.)

To je enako kot eksponentna funkcija.

$$e^{2s} = \sum \frac{1}{k!} (2s)^k = \sum b_k s^k, \quad \frac{b_{k+1}}{b_k} \rightarrow \frac{2}{k}$$

Zato tudi w divergira, in to preveč.

$$u \sim e^{-s} \cdot w \sim e^{-s} \cdot e^{2s} \sim e^s \quad \text{in to je narobe}$$

Zato mora biti w polinom.

To se zgodi, če je od nekoga k naprej, $a_{k+1} = 0$

$$\text{Pojavi: } 2N = s_0 - 2(l+1)$$

$$\Rightarrow s_0 = 2(N + l + 1)$$

$$\Rightarrow E_n = -\frac{2mZ^2 e_0^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 s_0^2 \hbar} = \frac{E_1 Z^2}{n^2}$$

E_1 = Rydberg

Kakšna je degeneracija?

$$E_n \text{ ni odvisen od } l. \quad l = n - N - 1 = 0, \dots, n-1$$

Za vsak l je $(2l+1)$ m-jev. ↑
spenjamo N

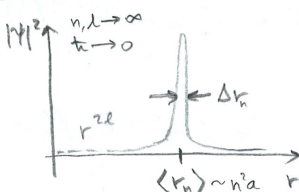
$$\sum_{l=0}^{n-1} (2l+1) = n^2$$

$$\Psi_{nlm}(r, \vartheta, \varphi, t) = e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} \psi_{nl}(r) Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$$

$$\psi_{nl} = \frac{u_{nl}(r)}{r} = - \left[\frac{(n-l-1)! (2\hbar)^3}{2n((n+l)!)^3} \right]^{1/2} (2\hbar r)^l e^{-2\hbar r} L_{n-l-1}^{2l+1}(2\hbar r)$$

↑
pridruženi Laguerreovi polinomi.

Harmonski oscilator ima podobno rešitev kot klasično. Tudi tu je v klasični limiti rešitev podobna Keplerjevi rešitvi.



$$\frac{\Delta r_n}{\langle r_n \rangle} \sim \frac{1}{n} \quad ; \quad a \text{ je Bohrov radij.}$$

Dodatna simetrija, ki pojasni veliko število degeneracij

• Vpeljemo Laplace-Lenzov vektor, kot pri klasični obravnavi.



$$\vec{A} = \frac{1}{2m} (\vec{p} \times \vec{L} - \vec{L} \times \vec{p}) - \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\text{Pokažemo } \vec{A} = \vec{A}^\dagger, \quad \vec{A} \cdot \vec{L} = \vec{L} \cdot \vec{A} = 0, \quad [\vec{A}, H] = 0$$

Zahuj dve tudi klasično. $\vec{L}$ in $\vec{A}$ sta konstanti gibanja, $\vec{A}$ kaže v smeri velike polosi.

$$E_n = \hbar \omega_n$$

$\omega_{n+1} - \omega_n = \Delta\omega$, klasičen ω kroženja



Nastojimo kaj zdaj znamo - železni repertoar, s katerim se da aproksimirati mnoge stvari.

- valovna poteza
- odsekana zvezna, sipanja, vetarna stanja
- δ -funkcije
- Harmonijski potencial
- Coulombski potencial
- Magnetno polje nam se manjka, od t_h bo tudi sklopiten spina, vrtihle količine in prečena z $\vec{B}$.

Potem pride se teorija perturbacij, ki je glavna teorija poleg numeričnega računanja.

Nabit delec v magnetnem polju

Najprej Landauov pristop. $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = (0, 0, B)$ konst.
 $\vec{A} = (-By, 0, 0)$

$$\frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} - e\vec{A})^2 \psi(x, y, z) = E \psi(x, y, z)$$

$$\frac{1}{2m} \left[(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} + eBy)^2 + (-i\hbar \frac{\partial}{\partial y})^2 + (-i\hbar \frac{\partial}{\partial z})^2 \right] \psi = E \psi$$

Rešitev bomo iskali v obliki $\psi(x, y, z) = e^{ik_x x} e^{ik_z z} \chi(y)$

Hitra lema: $A \alpha = \alpha A \Rightarrow f(A) \alpha = f(a) \alpha$

$$\frac{1}{2m} \left[\underbrace{(-i\hbar(k_x))}_{\hbar k_x} + eBy \right]^2 \chi(y) - \hbar^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \chi(y) + \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m} \chi(y) = E \chi(y)$$

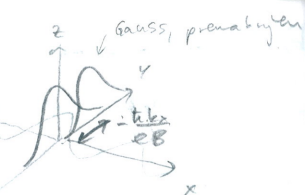
$$\left[\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{e^2 B^2}{2m} (y + y_0)^2 \right] \chi(y) = E \chi(y) - E_z \chi(y)$$

$$y_0 = \frac{\hbar k_x}{eB} \quad \frac{1}{2} \hbar = \frac{1}{2} m \omega_c^2 \Rightarrow \omega_c^2 = \frac{e^2 B^2}{m^2} \quad E_z = \frac{\hbar^2 k_z^2}{2m}$$

$$\xrightarrow{\text{harm. osc.}} E_{k_x} = \frac{\hbar^2 k_x^2}{2m} + \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) \leftarrow \text{Landauovi nivoji}$$

Energija ni odvisna od k_x , imamo nestandardno degeneracijo.

(Ni simetrično, ampak zaradi ogromne degeneracije lahko vse popravimo...)



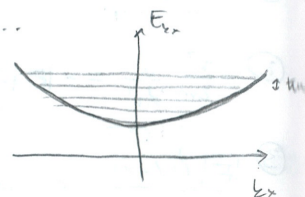
Ob času $t=0$ razvijemo

$$\psi(x) \text{ s FT; } \psi(x) = \int \varphi(k_x) e^{ik_x x} dk_x$$

$$t > 0: \Psi(x, t) = \int \varphi(k_x) e^{ik_x x - i \frac{E}{\hbar} t} dk_x = e^{-i \frac{E}{\hbar} t} \Psi(x, 0)$$

Gostota $|\Psi(x, t)|^2$ se ne spreminja!

Delec ne potegne. Kot tudi klasično, delec kroži in je upet...



Na desni: brez B

so vse energije, z B -jem pa se pojavijo Landauovi nivoji.

// Knebi: Pol so tudi se neki kvantni Hallovi pojavi in kvantizirana prevodnost //

Nazaj na začetek.

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}, \quad \vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$$

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} - e\vec{A})^2 \psi + e\phi \psi$$

Zdaj $\vec{\nabla}$ in $\vec{A}$ ne komutirata.

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} \psi + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi = \vec{\nabla} \cdot (\psi \vec{A}) + \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi = 2\vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi + \psi \vec{\nabla} \cdot \vec{A}$$

Zato člen, $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$ je 0, če nima Coulombov ameritev.

$$(*) \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = -\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \psi + \frac{i\hbar e}{m} \vec{A} \cdot \vec{\nabla} \psi + \frac{e^2}{2m} A^2 \psi + e\phi \psi$$

Ta člen je nov.

Imejmo homogeno polje $\vec{B} = \vec{B}_0 = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Pa vzemimo $\vec{A} = -\frac{1}{2} \vec{r} \times \vec{B}_0$ ($\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$)

$$\text{Vemo: } (\vec{r} \times \vec{a}) \cdot \vec{\nabla} = -(\vec{r} \cdot \vec{\nabla}) \cdot \vec{a}$$

uporabimo to, vstavimo vse v (*), $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

in dobimo

$$-\frac{e}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}_0 \psi = -\frac{e}{2m} \vec{B}_0 \cdot \vec{L} \psi$$

Zeemanova sklopitev

$$H = H_0 - \frac{e}{2m} \vec{B} \cdot \vec{L} + \frac{e^2}{2m} \vec{A} \cdot \vec{A}$$

V praksi je $\vec{B}$ majhen, oz. drugi člen je mnogo manjši od prvega, ki je večje okrog eV. Tudi tretji člen se po varadi zanemari.

$$\text{Bohrov magneton: } \mu_B = \frac{e\hbar}{2m} = 9,3 \cdot 10^{-24} \text{ Am}^2 = \text{IS}$$

Probleme rešujemo perturbativno.

$$H = H_0 + H'; \quad H' = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$$

Pri Starkovem efektu, ko damo atom v električno polje, pa $H' = e\phi$

Umeritvene transformacije.

Vemo, da lahko pišemo $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$ in

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi. \quad \boxed{\begin{aligned} \vec{A}' &= \vec{A} + \vec{\nabla} \Lambda \\ \phi' &= \phi - \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \end{aligned}}$$

Lahko spremenimo $\vec{A}$, ϕ , pa se $\vec{B}$ in $\vec{E}$ ne spremenita.

Kaj pa se v kvantni mehaniki zgodi s ψ , če uporabimo drug $\vec{A}$?

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \frac{1}{2m} (-i\hbar \vec{\nabla} - e\vec{A})^2 \psi + e\phi \psi$$

ψ' pa je resitev enačbe z $\vec{A}'$, ϕ'

Velja: $\boxed{\psi' = e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda} \psi}$; torej $|\psi'|^2 = |\psi|^2$

Dokaz: zapišimo enačbo za ψ' :

$$i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{ie}{\hbar} \frac{\partial \Lambda}{\partial t} \right) e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda} \psi = e\phi e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda} \psi + \frac{1}{2m} \left[\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - eA_x - (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \frac{ie}{\hbar} \Lambda) \right)^2 + (\dots)^2 \right] \cdot e^{i\frac{e}{\hbar}\Lambda} \psi$$

Štirikrat imamo tako

strukturo: $(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}) e^f$, to pa je:

$$e^f \frac{\partial f}{\partial x} g + e^f \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x} g e^f = e^f \frac{\partial g}{\partial x}$$

In dobimo enačbo za ψ , torej sta obe res ekvivalentni.

Obravnavajmo nekaj primerov, ko $\vec{B} = 0$ oz. $\vec{B} \neq 0$ ($\vec{A} = 0$ oz. $\vec{A} \neq 0$)

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = 0 \Rightarrow \vec{A} = \vec{\nabla} \Lambda \neq 0$$

(Torej $\vec{A} \neq 0$, $\vec{B} = 0$)

$$\Lambda(\vec{r}) = \Lambda(\vec{r}_1) + \int_{r_1}^{\vec{r}} \vec{A} \cdot d\vec{s} \quad (\text{ker je polje } \vec{A} \text{ potenciala})$$

Naj bo ψ resitev, če $\vec{A} = 0$.

$$\psi_{A=0} = \exp\left(-\frac{ie}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \vec{A} \cdot d\vec{s}\right) \psi_{A \neq 0}$$

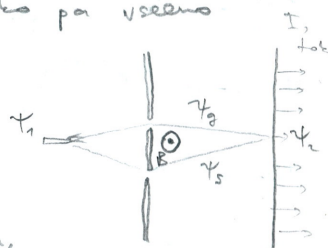
To nas vpelje na kvantizacijo $\vec{A}$.

Aharonov - Bohrov pojav

Lahko imamo $\vec{B} = 0$, lahko pa vseeno $\vec{A} = 0$ ali $\vec{A} \neq 0$.

$$\psi_1 = \psi_0 + \psi_s$$

$$\psi_2 = \psi_0 + \psi_s$$



Polje je samo v cilindru, zunaj ga ni (teoretično, v eksperimentu itak vse miga)

Na klasičen delec zunaj tega cilindra ne bi delovala Lorenzova sila $\vec{F} = e\vec{v} \times \vec{B}$.

Kaj pa kvantno?

$$\psi_1 = \psi_0 + \psi_s \quad (\text{ni polja } \vec{A})$$

$$\psi_2 = \psi_0 + \psi_s = e^{i\frac{ie}{\hbar} \int_{r_0}^{\vec{r}} \vec{A} \cdot d\vec{s}} \psi_0 + e^{i\frac{ie}{\hbar} \int_{r_s}^{\vec{r}} \vec{A} \cdot d\vec{s}} \psi_s$$

izpostavimo exp:

$$\psi_2 = e^{i\frac{ie}{\hbar} \int_{r_0}^{\vec{r}} \vec{A} \cdot d\vec{s}} \left(e^{i\frac{ie}{\hbar} \left(\int_{r_0}^{\vec{r}} \vec{A} \cdot d\vec{s} - \int_{r_s}^{\vec{r}} \vec{A} \cdot d\vec{s} \right)} \psi_0 + \psi_{s_0} \right) = C \left(e^{i\frac{ie}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}} \psi_0 + \psi_{s_0} \right)$$

zapišimo naj pri desni, dobimo integral po zanki, pot.

Končni rezultat ni odvisen od $\vec{A}$, v njem imamo $\oint \vec{A} \cdot d\vec{s}$, ki je funkcional $\vec{B}$.

Vseeno pa se rezultat spremeni, čeprav ni polja zunaj cilindra.

$$I \propto |\psi_2|^2 = |\psi_0 e^{i\frac{ie}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}} + \psi_{s_0}|^2 \propto I_0 |1 + e^{i\frac{ie}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}}|^2$$

(tako in desno)

$$1 + e^{i\frac{ie}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}} = e^{i\frac{ie}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}} \left(e^{-i\frac{ie}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}} + e^{i\frac{ie}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}} \right)$$

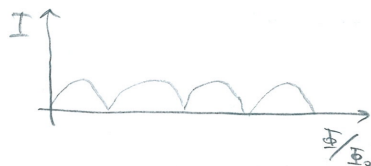
$$\Rightarrow I \propto 4I_0 \cos^2\left(\frac{e}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s}\right)$$

Če loparček vstavimo v $\Rightarrow$ $\vec{B}$,
razpina maksimume in minimume.

Definiramo:

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar}{e} = \frac{h}{e}$$

$$\Phi_0 = 4 \cdot 10^{-11} \text{ T cm}^2$$



V osnovnem poskusu so se interferenčne črte po vstopu B pomaknile.

To se ne pomeni, da nima kvantizirane polje, le da opazimo take interferenčne pojave.

Kaj pa se dogaja pri Meissnerjevem pojavu?

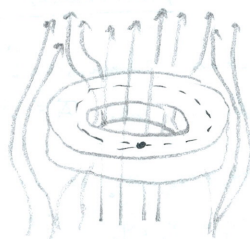
(Nižano T in ko $T < T_c$, superprevodnik, izrine mag. polje)
[sledi nerigorozna izpeljava!]
Imejmo tak supermagnet

$$\Psi(\varphi) = e^{i \frac{ze}{\hbar} \int_0^\varphi \vec{A} \cdot d\vec{s}} \Psi_0(\vec{r})$$

$$\Psi(\varphi + 2\pi) = \Psi(\varphi), \text{ jasno}$$

$$\Rightarrow \frac{ze}{\hbar} \oint \vec{A} \cdot d\vec{s} = \frac{ze}{\hbar} \Phi = 2\pi n$$

$$\Rightarrow \Phi = \frac{2\pi n \hbar}{ze} = \Phi_0 \frac{n}{2}$$



to ni čisto prav.

$\Rightarrow$ Magnetni pretok je diskretiziran, če ga imamo v rezanem stanju.

Spin.

Povedali smo že, da so vrtilne količine lahko tudi polovici, $\ell = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$

$$H = -\frac{e}{2m} \vec{L} \cdot \vec{B}$$

$$\vec{F} = (\vec{\mu} \cdot \vec{\nabla}) \vec{B} = \vec{\nabla} (\vec{\mu} \cdot \vec{B})$$

$$\vec{\mu} = g \frac{e}{2m} \vec{S}$$

Za vrtilno količino $g=1$, $\vec{S} = \vec{\ell}$.

Absolom pravi, da so rešitve Schr. enačbe elementov Hilbertovega prostora, ki opisujejo fizikalna stanja.

Tu pri $s=1/2$ pač ne moremo imeti $\Psi(\varphi) = \Psi(\varphi + 2\pi)$, pač ni koordinatne reprezentacije, $\langle \vec{r} | \vec{S} \rangle \neq f(\vec{r})$. Imamo pa vektor $|\vec{S}\rangle$.

$$g = 2,002319304718 (564)$$

do sem se eksperiment in teorija zadržata ujemata.

Zdaj je stanje $|\ell m\rangle$ zapisano z:
 $|s m\rangle$ oz. $|m\rangle$, $|\uparrow\rangle$, $|\downarrow\rangle$

$$\hat{S}^2 |m\rangle = s(s+1) |m\rangle = \frac{3}{4} |m\rangle$$

$$\hat{S}_z |\uparrow\rangle = +\frac{1}{2} \hbar |\uparrow\rangle$$

$$S^+ |\uparrow\rangle = 0, \quad S^- |\uparrow\rangle = |\downarrow\rangle \cdot \frac{\hbar}{2}$$

$$S^+ |\downarrow\rangle = |\uparrow\rangle \cdot \frac{\hbar}{2}$$

$$S^- |m\rangle = C |m-1\rangle \quad (\text{konstanto si pogledamo par strani nazaj :})$$

$$\Rightarrow S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$S^+ = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S^- = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2} \vec{\sigma} \quad (\text{operator spina})$$

$$\vec{S} = (S_x, S_y, S_z)$$

$$\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$$

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Malce zgledov.

$$|\Psi\rangle = \alpha |\uparrow\rangle + \beta |\downarrow\rangle = \sum_{m=\pm} c_m |m\rangle$$

$$\langle \Psi | S_x | \Psi \rangle = \langle \Psi | \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} | \Psi \rangle =$$

$$= \left(\alpha^* \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta^* \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \frac{\hbar}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{\hbar}{2} (\alpha^* \beta + \beta^* \alpha)$$

$$\vec{L} = (L_x, L_y, L_z) \quad \text{tu pa vektorske matrice...}$$

$$|\uparrow\rangle = \sum_m c_m |Y_{1m}(\vartheta, \varphi)\rangle$$

Lastnosti Paulijevih matrik.

Vse enako kot za običajno vrtilno količino.

$$[S_i, S_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} S_k$$

$$[\sigma_i, \sigma_j] = 2i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I$$

$$\sigma_x \sigma_y = i \sigma_z; \quad \sigma_y \sigma_z = i \sigma_x; \quad \sigma_z \sigma_x = i \sigma_y$$

$$\text{in antikomutirajo: } \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_x = 0$$

$$\sigma_x \sigma_y \sigma_z = i I, \quad \text{tr } \sigma_i = 0, \quad \det \sigma_i = -1$$

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k$$

Rotacija spinorjev

$$U_\varphi = e^{-i\varphi \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}} \quad (\text{rotacija okrog } \vec{n} \text{ za } \varphi)$$

$$U_\varphi \psi(\vec{r}) = \psi_\varphi(\vec{r}) \quad ; \quad \text{tako smo imeli za } \vec{L}.$$

Tu bo enako:

$$U_\varphi = e^{-i\varphi \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}} = e^{-i\frac{\varphi}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma}} = 1 - i\frac{\varphi}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} + \frac{1}{2} \left(\frac{\varphi}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \right)^2$$

v eksponentu imamo matriko, $\vec{n} \cdot \vec{\sigma} = n_x \sigma_x + \dots$

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = \left(\sum_i n_i \sigma_i \right)^2 = \sum_{i,j} n_i n_j \underbrace{\sigma_i \sigma_j}_{\substack{\text{simetrično} \\ \text{v } i,j}} \underbrace{\delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k}_{\substack{\text{antisimetrično} \\ \text{slučaj se ravno} \\ \text{odskače.}}}$$

Ostane le δ_{ij}

$$\Rightarrow (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^2 = |\vec{n}|^2$$

$$\Rightarrow (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^{2m} = |\vec{n}|^{2m} \quad (=1, \text{ če je } \vec{n} \text{ normiran, pri nas bo})$$

$$(\vec{n} \cdot \vec{\sigma})^{2m+1} = |\vec{n}|^{2m} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})$$

$$\Rightarrow U_\varphi = \cos \frac{\varphi}{2} \mathbb{I} - i \sin \frac{\varphi}{2} (\vec{n} \cdot \vec{\sigma})$$

Ko elektron vnaša vrtilne količine, se vseeno obnaša, kot da jo ma, vseeno je $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$.

Vsakemu operatorju, za katerega velja $[A_i, A_j] = i\hbar \epsilon_{ijk} A_k$ pravimo vrtilna količina.

In ker ma e^- le dve vrednosti pri Stern-Gerlach, je velikost spina $s = \frac{1}{2}$.

$$|\psi\rangle = c_1 |1\rangle + c_2 |1\rangle \quad (|1\rangle \text{ in } |1\rangle \text{ sta baza})$$

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \left[\cos \frac{\varphi}{2} |1\rangle + e^{-i\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} |1\rangle \right] e^{i\varphi}$$

$$\langle S_z \rangle = \langle \psi | \frac{\hbar}{2} \sigma_z | \psi \rangle =$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left[\cos \frac{\varphi}{2}, e^{-i\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} \right] \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ e^{i\varphi} \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\hbar}{2} (\cos^2 \frac{\varphi}{2} - \sin^2 \frac{\varphi}{2}) = \frac{\hbar}{2} \cos \varphi$$

$$\langle S_x \rangle = \langle \psi | \frac{\hbar}{2} \sigma_x | \psi \rangle = \dots \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \dots = \frac{\hbar}{2} \sin \varphi \cos \varphi$$

$$\langle S_y \rangle = \frac{\hbar}{2} \sin \varphi \sin \varphi$$

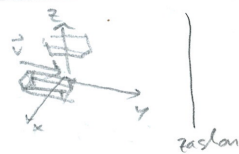
Blachova sfera je sfera z radijem 1, točko na njej opišemo z φ in ϑ .

Npr. če $\vartheta = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = 0$

$$\Rightarrow |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|1\rangle + |1\rangle)$$

To je zato, ker je $[1]$ lastni vektor za $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, potem pa se normiramo.

Stern-Gerlach



Podvrat magnet odstranja nehomogeno polje, delci letijo v smeri y .

Začetno stanje naj bo $|\psi\rangle = |1\rangle$

Če polje kaže v smeri z , bo na zaslon le zgornja pika.

Če polje zavrtimo, pa pride kaj tudi na spodnjo piko!

Definiramo novo bazo, $|1_\varphi\rangle, |1_\varphi\rangle$

$$|\psi\rangle = \sum c_n |n\rangle$$

$$P_n = |c_n|^2 = |\langle n | \psi \rangle|^2$$

$$P_\varphi(\varphi) = |\langle 1_\varphi | \psi \rangle|^2$$

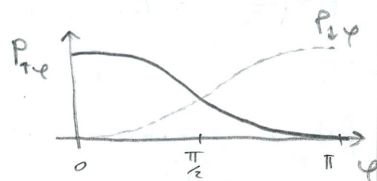
$$|1_\varphi\rangle = U_\varphi |1\rangle = e^{-i\varphi \frac{\vec{n} \cdot \vec{\sigma}}{2}} |1\rangle = \left(\cos \frac{\varphi}{2} - i \sin \frac{\varphi}{2} \vec{n} \cdot \vec{\sigma} \right) |1\rangle$$

Konkretno:

$$\hat{n} = (0, 1, 1); \quad \vec{n} \cdot \vec{\sigma} = \sigma_y = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\psi_{1\varphi} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & (-1)(-i) \sin \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} & \cos \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix}$$

$$P_{1\varphi} = \left| \begin{bmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} & \sin \frac{\varphi}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right|^2 = \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$



Če aparatura zavrtimo, bo verjetnost za 1_φ enaka 0, torej bo cel v nasprotno smer kot polje, se pravi gor - kot na začetku.

$\Rightarrow$ Pot žarkov se ne spreminja, če obrnemo polje.

To je zato, ker magnet v prvem redu izgleda tako: $\uparrow$ homogeno polje $\uparrow$

ničti red ne vpliva, ker imamo vrtilne elemente.

Ko pa pri red obrnemo, dobimo isto.

Kaj pa če imamo tirno in spin?

$$H = H_1 + H_2 = H_0 + H_S \leftarrow \text{spin}$$

↑
če od prej

Spinova komponenta komutira z drugimi.

Resitev v takem primeru lahko zapisemo s separacijo spremenljivk.

$$\Psi(\vec{r}) = \psi(\vec{r}) \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

Ampak to ni čisto res:

$$H = H_0 + H_S + H_{S_z}$$

↑
Tu je nehomogen polje, $\vec{B} \cdot \vec{S} \dots z \sigma_z$

Potem Sch. enačba razpade na dve enačbi,

$$\Psi(\vec{r}) = \begin{bmatrix} \psi_+(\vec{r}) \\ \psi_-(\vec{r}) \end{bmatrix}$$

To pa zato, ker:

$$(H_0 + H_S + \text{konst. } z \sigma_z) \Psi \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \dots \text{konst. } z (+1) \psi_+ c_1 = \dots$$

$$\text{konst. } z (-1) \psi_- c_2 = \dots$$

Pauli.

Malce posplošimo Sch. enačbo. H ji dodamo identiteto za spin. Valovna funkcija ima dve komponenti, ena za spin gor ↑ in ena za dol ↓.

$$H = \underbrace{\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}) - \frac{e}{2m} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{L} \right)}_{H_0} \mathbf{I} - g \frac{e}{2m} \vec{B}(\vec{r}) \cdot \vec{S}$$

↑
spin

Dobimo enačbi: $(H\Psi = E\Psi) \quad \Psi(\vec{r}, t) = \begin{bmatrix} \psi_+(\vec{r}, t) \\ \psi_-(\vec{r}, t) \end{bmatrix}$

$$\left. \begin{aligned} H_0 \psi_+ - \frac{g e \hbar}{2m} \frac{1}{2} (B_x \psi_+ - i B_y \psi_- + B_z \psi_+) &= E \psi_+ \\ H_0 \psi_- - \frac{g e \hbar}{2m} \frac{1}{2} (B_x \psi_+ + i B_y \psi_+ - B_z \psi_-) &= E \psi_- \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Psi(\vec{r})$$

Poseben primer: $\Psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}, t) \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$

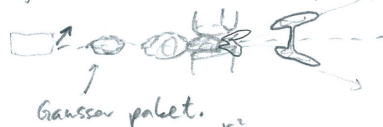
Če ni polja, imamo kar se spina tiče dve degeneraciji in ni drugih razlik.

Zdaj obravnavajmo Stern-Gerlach s tem formalizmom. Delamo se, kot da imamo e^- , čeprav v resnici potekajo.

Verjetnostna amplituda: $\mathcal{P}(\vec{r}) = |\psi_+|^2 + |\psi_-|^2$

Stern-Gerlach.

Steljana elektrone, ki imajo določeno smer.



$$t=0: \Psi = C e^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}$$

Gaussov paket se potem širi. V magnetu pa se razdeli, ampak vedno ostane prezan!

če imamo določen spin, lahko to povzročimo z neko točko na klavni sferi.

Če je zaslon dovolj daleč stran dobimo za verjetnost $\left\{ \begin{array}{l} \text{det} \\ \text{det} \end{array} \right.$, če je preblizu pa $\left\{ \begin{array}{l} \text{det} \\ \text{det} \end{array} \right.$

Meritev je, da se zgodi nekaj nedoumljivega, npr. v enem detektorju se zablika. In delamo histogram, potem dobimo graf $\left\{ \begin{array}{l} \text{det} \\ \text{det} \end{array} \right.$.

Schrödingerjeva mačka.



Radioaktivni izvor, lahko sproži senzor, ki razbije stropno flakso. Potem ob $t_2 > t_1$ pogledamo. Lahko je živa ali mrtva.

$$|\psi\rangle = |\psi_+\rangle + |\psi_-\rangle$$

$$\text{In npr. } P_z = |\langle \psi_+ | \psi \rangle|^2$$

2 delca s spinom 1/2.

Dva ločena atoma vodika, dva operatorja $\vec{S}_1$ in $\vec{S}_2$, prvi deluje le na spin enega elektrona, drugi le na drugega.



$$\Psi_1 = \psi_1(\vec{r}_1) \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

$$\Psi_2 = \psi_2(\vec{r}_2) \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Opazujemo le spin.



$$|\psi\rangle = |m_1\rangle \otimes |m_2\rangle \equiv |m_1 m_2\rangle$$

$$= |m\rangle |n\rangle = |mn\rangle$$

$$|\uparrow\rangle |\uparrow\rangle = \begin{bmatrix} \uparrow\uparrow \\ \uparrow\downarrow \\ \downarrow\uparrow \\ \downarrow\downarrow \end{bmatrix}$$

Skupni operator pa zapisemo:

$$\vec{S} = \vec{S}_1 \otimes \mathbf{I} + \mathbf{I} \otimes \vec{S}_2 = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 = \frac{\hbar}{2} (\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$S_z |\uparrow\uparrow\rangle = \frac{1}{2} \hbar (\sigma_{1z} \otimes \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_1 \otimes \sigma_{2z}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$S_z |\uparrow\uparrow\rangle = \frac{1}{2} \hbar \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \hbar |\uparrow\uparrow\rangle$$

$$S_z |\uparrow\downarrow\rangle = \dots = 0$$

Možne lastne vrednosti za S_z : $\hbar, 0, -\hbar$

Skupen s je lahko 1, saj:

$$S^2|\uparrow\uparrow\rangle = (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2)|\uparrow\uparrow\rangle = \dots = s(s+1)|\uparrow\uparrow\rangle = 2|\uparrow\uparrow\rangle$$

$\uparrow$ $\uparrow$
 $(S_{1x} + S_{2x})^2$ $s=1$

Tudi $S^2|\downarrow\downarrow\rangle = 2|\downarrow\downarrow\rangle$

Ampak $|\uparrow\downarrow\rangle$ pa ni lastno stanje S^2 .

$$S_z|\uparrow\uparrow\rangle = \hbar|\uparrow\uparrow\rangle = |1, 1\rangle = |s, s_z\rangle$$

(kot pri triini, ko $L^2|l, m\rangle = \hbar^2 l(l+1)|l, m\rangle$
 $\downarrow$
 $s=1$ $s_z=0$
 $\downarrow$
 $s=1$ $s_z=0$)

$$S^-|\uparrow\uparrow\rangle = \hbar|\uparrow\downarrow\rangle$$

$$(S_1^- + S_2^-)|\uparrow\uparrow\rangle = \hbar(|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle) \propto |\uparrow\downarrow\rangle$$

$$s=1: |\uparrow\uparrow\rangle \quad \frac{|\uparrow\downarrow\rangle + |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} \quad |\downarrow\downarrow\rangle$$

$s_z=1$ $s_z=0$ $s_z=-1$

$s=0$: zato bo le kombinacija $|\uparrow\downarrow\rangle$ in $|\downarrow\uparrow\rangle$
 $\Rightarrow \alpha|\uparrow\downarrow\rangle + \beta|\downarrow\uparrow\rangle$, ker pa mora biti ortogonalna na $|\uparrow\uparrow\rangle$, je tu zagotovo
 $\frac{|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle}{\sqrt{2}} = |0, 0\rangle$

Za utrditev vrednosti naslednje vaj.

$$|\psi_1\rangle = \alpha_1|\uparrow\uparrow\rangle + \beta_1|\downarrow\downarrow\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix}$$

Podobno $|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$

Potem pa $|\psi_1\rangle$ in $|\psi_2\rangle$ združimo, postavimo ju skupaj sklopimo.

$$|\Psi\rangle = |\psi_1\rangle|\psi_2\rangle = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} ; \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

$S_z = S_{1z} + S_{2z}$

$$S_z|\Psi\rangle = S_z \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = S_{1z} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + S_{2z} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$S_z|\uparrow\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \hbar|\uparrow\uparrow\rangle$$

Kaj pa $S_x|\uparrow\uparrow\rangle$?

$$S_x|\uparrow\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_2 \\ \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow S_x|\uparrow\uparrow\rangle = \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \hbar|\uparrow\uparrow\rangle$$

(ni lastno stanje, itak)

Ampak seveda pa:

$$\langle S_x \rangle = [1, 0]_1^* [1, 0]_2^* \left(\frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\hbar}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = 0$$

Od zgoraj: $|\psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$

$$S^2|\psi_{00}\rangle = 0 \text{ in } S_z|\psi_{00}\rangle = 0$$

singletno stanje

Clebsch-Gordanovi koeficienti.

Imamo operatorja $\vec{J}_1$ in $\vec{J}_2$, za katera

$$[J_{1i}, J_{1j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_{1k}, [J_{2i}, J_{2j}] = i\hbar \epsilon_{ijk} J_{2k}$$

Sta torej vrtilni količini dveh sistemov.

Prej smo imeli primer $\vec{J}_1 = \vec{S}_1; \vec{J}_2 = \vec{S}_2$

Lahko pa tudi $\vec{J}_1 = \vec{L}$ in $\vec{J}_2 = \vec{S}$

$$J_1^2|j_1, m_1\rangle = j_1(j_1+1)|j_1, m_1\rangle \hbar^2$$

$$J_{1z}|j_1, m_1\rangle = \hbar m_1|j_1, m_1\rangle$$

Definirati želimo skupen operator in nova dobra stanja skupne vrtilne količine.

Vzemimo $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2; \vec{J}_2 = \vec{J} - \vec{J}_1$ (Tudi za $\vec{J}$ velja zveza z ϵ_{ijk} , zato je vrtilna količina)

$$\text{Želimo } J^2|j, m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j, m\rangle$$

$$J_z|j, m\rangle = \hbar m|j, m\rangle$$

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$$

$$-j \leq m \leq j$$

Primer na prejšnji strani:

$$\begin{aligned} |1, 1\rangle &= 1|\uparrow\uparrow\rangle \\ |1, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow\rangle \\ |0, -1\rangle &= 1|\downarrow\downarrow\rangle \\ |0, 0\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow\uparrow\rangle \end{aligned}$$

$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1\rangle$
 $\uparrow \uparrow$
 dobro določeni j in M tudi
 nista pa m_1, m_2 dobro določeni...

Koeficiente lahko dobimo s tabelo.

$$|j_1, j_2, j, m\rangle = \sum_{m_1, m_2} |j_1, m_1\rangle |j_2, m_2\rangle \cdot C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m}$$

$$\text{lejer } m_1 + m_2 = M$$

$$-j \leq M \leq j$$

$$C_{j_1 m_1 j_2 m_2}^{j m} \equiv \langle j_1, j_2, m_1, m_2 | j, m \rangle \text{ (splošno pričan zapis)}$$

$$|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1\rangle = \sum_{m_1, m_2} C_{m_1 m_2}^{1, 1} |m_1\rangle |m_2\rangle = C_{11}|\uparrow\uparrow\rangle + C_{10}|\uparrow\downarrow\rangle + C_{01}|\downarrow\uparrow\rangle + C_{00}|\downarrow\downarrow\rangle$$

V tem primeru $M=1=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$, ostane le C_{11} in zato $C_{11}=1$.

• Če vzamemo največji M :

$$M = m_1 + m_2 = j_1 + j_2 = j \Rightarrow |j, j\rangle = |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2\rangle$$

največji j_1, j_2 $\uparrow$ največji

• Kaj pa $M=j-1$:

$$|j, j-1\rangle = C \cdot j |j_1, j_2, j, M\rangle = \alpha |j_1, j_1-1\rangle |j_2, j_2\rangle + \beta |j_1, j_1\rangle |j_2, j_2-1\rangle$$

Podobno za manjše M , delujemo z operatorjem J^- .

d in β dobimo, ker delujemo z operatorjem L^- , nek koren iz lastne vrednosti, pogledj nazaj.

Enako za manjše M . Ampak se vedno smo pri največjem j .

- Koeficiente za druge J (največji -1, oz. $J-1$) dobimo tako: spet najprej $M=J-1$
 $|j_1 j_2 J-1 M\rangle = \alpha' |j_1 j_2-1\rangle |j_2\rangle + \beta' |j_1 j_2\rangle |j_2-1\rangle$
 α' in β' dobimo z ortogonalizacijo, to mora biti pravokotno na tistega z α in β s prejšnje strani.
 Potem delujemo z J^- in spet dobivamo še za manjše M od maksimalnega.
- Potem pa se enako za $J-2, J-3, \dots$

Primer: [Uporaba Clebsch-Gordan tabele]

l	s	M	J
$2 \times \frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{2}$	$3/2$
$+2$	$+\frac{1}{2}$	1	$+3/2$
$+2$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{15}{5}$	$\frac{4}{5}$
$+1$	$+\frac{1}{2}$	$\frac{4}{5}$	$-\frac{1}{5}$

prvi primer drugi primer

Tu $l=2, m=\frac{1}{2}$

$$Y_{22} = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{15}{28}} \sin^2 \theta e^{2i\phi}$$

$$\chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} Y_{22} \\ \chi_{\frac{1}{2} \frac{1}{2}} \end{array} \right\} |\psi\rangle = \sum_{m_1, m_2} C Y_{2m_1} \chi_{\frac{1}{2} m_2}$$

l s skupna spin
↓ ↓ ↓
proj. proj.

$$|2 \frac{1}{2} \frac{5}{2} \frac{3}{2}\rangle = \alpha Y_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta Y_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

iz tabele: $\alpha = \sqrt{\frac{1}{5}}$, $\beta = \sqrt{\frac{4}{5}}$

$$|2 \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{3}{2}\rangle = \sqrt{\frac{4}{5}} Y_{22} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{5}} Y_{21} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Primer: Singletno stanje, $j_1 = \frac{1}{2}$, $j_2 = \frac{1}{2}$, $J=M=0$

$$|\frac{1}{2} \frac{1}{2} 0 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\downarrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\uparrow\rangle$$

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$
$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$

Tu je prvi primer

Einstein-Podolsky-Rosen paradoks

Imamo dva delca s spinom $\frac{1}{2}$, zaprta v skledli.

Ker je sistem invarianten na rotacije, vemo: $S=0, M=0$

Potem pa začnemo ločevati jama, ločimo delca.

Ker delujemo s Coulombovskimi silami, na spin ne vplivamo. $\square \rightarrow \cup \rightarrow \cup \rightarrow \dots$

Imamo singletno stanje $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$

Singlet bo v vsakem koord. sistemu singlet ($S=0$), brez dolara.

Desni delci peljemo skozi Stern-Gerlachov aparat, poverimo spin. Delec gre gor ali dol, in spin bo od te meritve naprej za vedno ostal gor oz. dol.

$\Rightarrow$ Sklapišna valovna funkcija, ko poverimo potem se lev elektron, bo imel točno dober spin!

To zares delajo, s fotoni. Drugi foton sklapišna preden bi lahko tja prišla svetloba. To ni v nasprotju z relativnostjo, ker s tem ne moremo sporočiti informacije.

Eksperiment lahko pojasnimo s skritimi spremenljivkami; oba imata manj spin, samo mi ga še ne poznamo.

Trideset let so mislili, da to ne obstaja, ker je Neumann "obkazal", da skrite spremenljivke v kvantni mehaniki ne morejo obstajati.

* Bellove neenacije

Predpostavimo, da obstaja funkcija a , katere zaloga vrednosti je ± 1 in je odvisna od kota, pod katerim merimo smer spina in morda še kakšnih drugih spremenljivke, ki ga ne poznamo. (enako za b , tj. drugi delec)

Predpostavimo še lokalnost, torej $a \neq a(\theta_b)$, a ni odvisna od drugega delca.

Ampak le $a = a(\theta_a, \lambda)$ ne poznamo, ni pa odvisna od b .

Malo analizirajmo ti dve "obstoječi" funkciji: $a = a(\theta_a, \lambda)$, $a' = a(\theta_a', \lambda)$ (nek drug kot, podobno b)

$$\Rightarrow ab + a'b + ab' - a'b' = \pm 2$$

Naredimo ogromno poskusov, povprečno (klasično povprečje)

$$\langle ab \rangle = \int a(\theta_a, \lambda) b(\theta_b, \lambda) S(\lambda) d\lambda$$

$$\text{Pričakovali bi } |\langle ab \rangle + \langle a'b \rangle + \langle ab' \rangle - \langle a'b' \rangle| \leq 2$$

AMPAK, ko to izmerijo, dobijo $|\langle ab \rangle + \dots| = 2\sqrt{2}$

$\Rightarrow$ Ni res: da bi imeli obe funkciji. IN da ena meritve ne vpliva na drugo.

(Kvantnomehanski račun: $\langle \psi | (\hat{a}_a \hat{S}_a) (\hat{a}_b \hat{S}_b) | \psi \rangle = \cos(\theta_a - \theta_b)$ in tista abs. vrednost povprečja je $2\sqrt{2}$)

Gostotna matrika.

(1) Za začetek naredimo račun. $|\psi\rangle = \sum_n C_n |n\rangle$

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = \sum_{nm} \langle n | C_n^* A C_m | n \rangle = \sum_{nm} \underbrace{C_n^* C_m}_{S_{nm}} \underbrace{A_{nn}}_{\text{drugi vrstni red indeksa}}$$

$$\sum_{nm} S_{nm} A_{nn} = \sum_n \langle n | \hat{S} \hat{A} | n \rangle = \text{tr}(\hat{S} \hat{A}) = \langle A \rangle$$

$$\text{ker } \hat{S} = \sum_{mn} |m\rangle S_{mn} \langle n|$$

$\swarrow$
 $C_n^* C_m$

Za računanje $\langle A \rangle$ je enako dobro poznati $|\psi\rangle$ in gostotno matriko.

(2) Stern-Gerlach.

Iz skatle prileti delec, $|\psi\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha |T\rangle + \beta |D\rangle$
In to je čisto stanje.

(3) Ampak življenje ni tako. V rešnici imamo mnogo delcev, ne le enega.

Imejmo dva delca v Stern-Gerlachu.

Dva delca, skupna valovna funkcija:

$$|\Psi\rangle = |T\rangle|D\rangle - |D\rangle|T\rangle \quad (\text{če npr. vemo, da imamo singlet, } J=0)$$

čisto stanje

Ken pa prileti le en delec.

In to imenujemo mešano stanje, kar pa sicer sploh ni stanje.

(Ne obstaja funkcija $|\psi\rangle$ za delec, ki je prišel ven.)

V splošnem je $|\Psi\rangle = C_{TT}|T\rangle|T\rangle + C_{TD}|T\rangle|D\rangle + C_{DT}|D\rangle|T\rangle + C_{DD}|D\rangle|D\rangle$

(Mi smo napisali le $\approx |T\rangle|D\rangle \approx |D\rangle|T\rangle$)

In to je čisto stanje. Mešano stanje pa bo le nek podprostor tega stanja, pri tem pa ne vemo za drugi del, sploh.

Hja, pa imejmo operator $A_1 = A \otimes I_2$
(opazujemo torej le 1. delec, ki je prišel ven)

$$\langle A_1 \rangle = \langle \Psi | A_1 | \Psi \rangle = \sum_{n_1 n_2} \langle n_1 | \langle n_2 | C_{n_1 n_2}^* A | n_1 \rangle | n_2 \rangle =$$

$\searrow$
 $\langle n_2 | n_2 \rangle = \delta_{n_2 n_2}$

$$= \sum_{n_1} C_{n_1 n_1}^* C_{n_1 n_1} A_{1, n_1 n_1} =$$

(podobno kot prej, uvedemo matriko)

$$= \sum_{n_1 m_1} S_{n_1 m_1} A_{1, m_1 n_1}, \quad \text{ker } S_{n_1 m_1} = \sum_{n_2} C_{n_1 n_2}^* C_{m_1 n_2}$$

$$= \text{tr } S_1 A_1 = \langle A_1 \rangle \quad (S^{(1)} = S_1)$$

Pridelati smo enodelčno gostotno matriko, iz dvodelčnega $|\Psi\rangle$. Imamo $S_1 = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$, s čimer računamo verjetnosti.

Razlika med gostotnimi matrikami čistega in nečistega stanja je v tem, da je čisto stanje enako produktu skal $C_n^* C_n$, nečistega stanja pa ne moremo zapisati na tak način; zaradi dodatne vmesne gostote.

Velja npr. tudi S čisto $\Leftrightarrow S^2 = S$

Če imamo peč v temperaturnem ravnovesju, ~~stanje~~ je gostotna matrika oblike $\frac{e^{-\beta H_1}}{Z} = S_1$
ker $Z = \text{tr } e^{-\beta H_1}$, $\beta = \frac{1}{kT}$

Teorija motenj/perturbacij.

Imamo hamiltonijan $H = H_0 + H_1$

$H_0 |n^0\rangle = E_n^0 |n^0\rangle$ že poznamo.

Želimo $H |n\rangle = E_n |n\rangle$.

Zapišemo $H_1 = \lambda V$, kjer je λ brez dim. št.

Se pravi $H = H_0 + \lambda V$. (V ni samo potencial, je lahko operator...)

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots \quad \text{razvoj do nekega reda}$$

$$|n\rangle = |n^0\rangle + \lambda |n^1\rangle + \lambda^2 |n^2\rangle + \dots$$

$\uparrow$ ti se niso motili, $|n^0\rangle$ pa je.

I.

Za začetek bomo obravnavali primer, ko je $H_0 |n^0\rangle = E_n^0 |n^0\rangle$ nedegeneriran spekter.

Predpostavka je, da je vpliv operatorja V majhen, ne nujno, da je $\lambda \ll 1$. (Na koncu bomo dali celo $\lambda = 1$.)

Rešujemo.

$$\lambda^0: H_0 |n^0\rangle = E_n^{(0)} |n^0\rangle \quad \text{nedeg. spekter}$$

$$\lambda^1: H_0 |n^1\rangle + V |n^0\rangle = E_n^{(0)} |n^1\rangle + E_n^{(1)} |n^0\rangle$$

$$\lambda^2: H_0 |n^2\rangle + V |n^1\rangle = E_n^{(0)} |n^2\rangle + E_n^{(1)} |n^1\rangle + E_n^{(2)} |n^0\rangle$$

$$1 \equiv \langle n^0 | n \rangle = \langle n^0 | n^0 \rangle + \lambda \langle n^0 | n^1 \rangle + \lambda^2 \langle n^0 | n^2 \rangle + \dots$$

$\uparrow$ izberemo si, da je $\langle n^0 | n^1 \rangle = \langle n^0 | n^2 \rangle = \dots = 0$

$\Rightarrow \langle n^0 | n^1 \rangle = \langle n^0 | n^2 \rangle = \dots = 0$

Torej so tiste visjih redov ortogonalne na prvotno funkcijo (med sabo ne nujno).

Raziskujmo naprej.

$$\langle n^0 | H_0 | n^1 \rangle + \langle n^0 | V | n^0 \rangle = E_n^{(0)} \langle n^0 | n^1 \rangle + E_n^{(1)} \langle n^0 | n^0 \rangle$$

$$\Rightarrow E_n^{(1)} = \langle n^0 | V | n^0 \rangle = V_{nn}$$

$|n^1\rangle$ razvijemo po stari bazi. Upustiti moramo n , ker je $\langle n^0 | n^1 \rangle = 0$

$$|n^1\rangle = \sum_{m \neq n} c_m |m^0\rangle$$

$$H_0 \sum_{m \neq n} c_m |m^0\rangle + V |n^0\rangle = E_n^{(0)} \sum_{m \neq n} c_m |m^0\rangle + E_n^{(1)} |n^0\rangle \quad \langle n^0 |$$

$$c_m \langle m^0 | H_0 = E_m^{(0)} c_m \langle m^0 |$$

$$\Rightarrow E_m^{(0)} c_m + \underbrace{\langle m^0 | V | n^0 \rangle}_{V_{mn}} = E_n^{(0)} c_m$$

$$\text{In dobimo koeficient } c_m = \frac{V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

To je že prvi rezultat.

$$\boxed{\begin{aligned} E_n^{(1)} &= \langle n^0 | V | n^0 \rangle = V_{nn} \\ |n^1\rangle &= \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |m^0\rangle \end{aligned}}$$

V prvem redu dodatna normalizacija ni potrebna. Val. funkcije so pravilne le do prvega reda in so do tam že normalizovane.

$$\langle n | n \rangle = \underbrace{\langle n^0 | n^0 \rangle}_1 + \lambda^2 \underbrace{\langle n^1 | n^1 \rangle}_{\mathcal{O}(\lambda^2)} + \lambda^3 \underbrace{\langle n^1 | n^2 \rangle}_{\mathcal{O}(\lambda^3)} + \dots$$

Enačbe $\lambda^0, \lambda^1, \lambda^2$ s prejšnje strani malo množimo z $\langle n^0 |, \langle n^1 |, \langle n^2 |$.

$$\begin{aligned} \underbrace{\langle n^0 | H_0 | n^2 \rangle}_0 + \langle n^0 | V | \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |m^0\rangle &= \\ = E_n^{(0)} \underbrace{\langle n^0 | n^2 \rangle}_0 + E_n^{(1)} \underbrace{\langle n^0 | n^1 \rangle}_0 + E_n^{(2)} \underbrace{\langle n^0 | n^0 \rangle}_1 & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_n^{(2)} = \sum_{m \neq n} \frac{|V_{mn}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

ta dva indeksa morata biti iste

$E_n^{(0)}$ osnovno stanje; $E_n^{(0)} - E_m^{(0)} < 0 \Rightarrow E_n^{(2)} < 0$

Kako si zapomnimo ali je $E_n - E_m$ ali $E_m - E_n$?

Drugi red vedno nižja energija.

Primer: [Starka efekt]

Plin damo v kondenzator, spekter se speni, energije se zmanjšajo.

Funkcije dostimo podobno ampak pisanja je preveč...

$$|n^2\rangle = \sum_{\substack{m, k \\ m \neq n}} \frac{V_{mk} V_{kn}}{(E_n^{(0)} - E_k^{(0)})(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})} |m^0\rangle -$$

$$- \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn} V_{nn}}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} |m^0\rangle -$$

$$\left\{ -\frac{1}{2} \left(\sum_{m \neq n} \frac{|V_{mn}|^2}{(E_n^{(0)} - E_m^{(0)})^2} \right) |n^0\rangle \right\} \leftarrow \text{le normalizacija}$$

Da vse izračunamo, potrebujemo le matrične elemente. In imamo vse.

Par trditve brez dokazov.

• 1D primer, $\int V(x) dx < 0$

$\Rightarrow$ Vedno obstaja vezano stanje

$$E = -\frac{m}{2\hbar^2} \left| \int V dx \right|^2$$

•• Tudi v 2D je nekako večinsoma vedno res, ampak lahko je energija tudi nič.

•• V 3D pa to ni res.

•• Perturbativni računi obstajajo tudi za zvezan spekter. V tem primeru so lahko težave. Zaradi imenovalca lahko integral divergira. Sicer pa v glavnem:

$$E_n^{(2)} = \int \frac{|V_{mn}|^2}{E_n^{(0)} - E_m^{(0)}} dE_m^{(0)}$$

•• Obstaja tudi Brillouin-Wignerjeva perturbacija. Nastavek je malo drugačen, dobimo implicitno enačbo za energije:

$$E_n = \sum_{m \neq n} \frac{V_{mn}}{E_n - E_m^{(0)}}$$

To lahko konvergira celo v primeru, ko naša prvotna formula ne.

Ampak tudi, če konvergira, ni nujno, da k pravi vrednosti.

•• Superprevodnosti se s tem ne da rešiti.

To pa zato, ker je odvisna od $e^{-\frac{1}{\Delta E}}$ vens pa, da funkcije $e^{-1/2}$ ne moremo razviti v Taylorja obseg ničle.

Razlog neuporabnosti metode je, pri supertekočini v tem, da so nova stanja ortogonalna na stara $\langle n | n^0 \rangle = 0$, zato razvoj po bazi ni možen.

II. Degenerativni spekter

Takih primerov je veliko, npr. vodikov atom. Spekter lahko razložimo s Starkovim efektom ali Zeemanovim pojavom.

$$H = H_0 + \lambda V \quad ; \quad \text{potem } \lambda \rightarrow 1$$

$$E_n = E_n^{(0)} + \lambda E_n^{(1)} + \lambda^2 E_n^{(2)} + \dots$$

$$|n\rangle = \alpha |n_1\rangle + \beta |n_2\rangle + \lambda |n'\rangle + \lambda^2 |n''\rangle + \dots$$

$$\lambda^0: H_0 |n_i^0\rangle = E_n^0 |n_i^0\rangle$$

$$H_0 |n_i^0\rangle = E_n^0 |n_i^0\rangle$$

$$\lambda^1: H_0 |n'\rangle + \alpha V |n_1^0\rangle + \beta V |n_2^0\rangle =$$

$$= E_n^{(1)} |n'\rangle + E_n^{(1)} (\alpha |n_1^0\rangle + \beta |n_2^0\rangle) \quad / \langle n_i^0 |$$

$$\underbrace{\langle n_i^0 | H_0 | n' \rangle}_0 + \underbrace{\alpha \langle n_i^0 | V | n_1^0 \rangle}_{V_{11}} + \beta V_{12} =$$

$$= E_n^{(1)} \underbrace{\langle n_i^0 | n' \rangle}_0 + E_n^{(1)} \alpha \underbrace{\langle n_i^0 | n_1^0 \rangle}_{\substack{\text{skala lan} \\ \text{je 0/1}}} + E_n^{(1)} \beta \cdot 0$$

In podobno:

$$0 + \alpha V_{21} + \beta V_{22} = \beta E_n^{(1)}$$

Še enkrat prva:

$$\alpha V_{11} + \beta V_{12} = E_n^{(1)} \alpha$$

V matrični obliki:

$$\begin{bmatrix} V_{11} - E_n^{(1)} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} - E_n^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = 0$$

$$(V_{12} = V_{21}^*)$$

Resitev dobimo, ko $\det = 0$.

To je bilo za dvojno degeneracijo.

Kako je pri večkratni deg.?

Takrat mora biti 0 determinanta

$$\det(V_{ij} - E_n^{(1)} \delta_{ij}) = 0$$

$$V_{ij} = \langle n_i^0 | V | n_j^0 \rangle \quad i, j = 1, 2, \dots, N$$

Mnogo lažje je računati V_{ij} kot pa npr. zares rešiti problem prek Schr. enačbe.

Če je prvi red prevelik, oz. če je zaradi smetnje prvi red enak nič, gremo se na drugi red.

To npr. prepišemo iz Landaua.

V bistvu moramo le nadomestiti V_{ij} :

$$V_{ij} \mapsto V_{ij} + \sum_{m \neq i} \frac{V_{im} V_{mj}}{E_i^{(0)} - E_m^{(0)}}$$

Višjih redov pa se danes ne računa več. To bi morali itak numerično, kar pa ne odloži dela preveč v praksi z direktnim reševanjem.

Časovno odvisna motnja

$$H = H_0 + \lambda V(t) \quad (\text{npr. porušimo z laserjem na delec / atom})$$

Zdaj NE računamo lastnih vrednosti in lastnih energij, ker jih ni. Energija se pri časovno odvisnem H ne ohranja!

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n c_n |\varphi_n\rangle$$

$$H_0 |\varphi_n\rangle = E_n |\varphi_n\rangle$$

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} |\varphi_n\rangle$$

to je zdaj novo, to tudi iščemo.

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = H |\psi\rangle$$

$$i\hbar \sum_n \left(\frac{\partial c_n}{\partial t} e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} - i \frac{E_n}{\hbar} c_n e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} \right) |\varphi_n\rangle =$$

$$= \sum_n c_n(t) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} E_n |\varphi_n\rangle + \sum_n c_n(t) V(t) e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} |\varphi_n\rangle$$

To z leve pomnožimo z $\langle m |$

$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_m e^{-i \frac{E_m}{\hbar} t} + E_m c_m e^{-i \frac{E_m}{\hbar} t} = E_m c_m e^{-i \frac{E_m}{\hbar} t} + \sum_n \langle m | V(t) | n \rangle e^{-i \frac{E_n}{\hbar} t} c_n$$

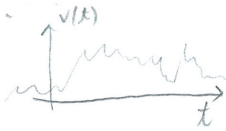
$$\Rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t} c_m = \sum_n \langle m | V(t) | n \rangle e^{-i \frac{E_n - E_m}{\hbar} t} c_n$$

V fiziki je ∞ vedno končno, imamo matrično enačbo.

$$i\hbar \begin{bmatrix} \dot{c}_1 \\ \vdots \\ \dot{c}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} e^{-i \frac{E_2 - E_1}{\hbar} t} & \dots \\ & V_{22} & \dots \\ & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix}$$

Nič nismo govorili o kontinuumskih lastnih stanjih. To je se težje, mi se ne bomo ukvarjali. Sicer pa imamo tri možnosti kako se spopademo s kontinuumom. Lahko vse zapišemo v sklopu, lahko damo vse na obrobje in imamo periodičen svet (to nam vse distributivni spekter), lahko pa z...

Zdaj predpostavimo šibko motnjo. Kakšnega praktičnega kriterija za to ni, šele preko rezultata...



Naj bo začetno stanje $|s\rangle$,

to je $C_s=0$ če $k \neq s$ in $C_s=1$.

Npr. sistem je v osnovnem stanju (kar je za vodikov atom po nekem času res)

Zdaj dobimo ite $\frac{\partial C_k}{\partial t} = V_{ks}(t) e^{-\frac{i(E_k - E_s)t}{\hbar}} C_s$

To je v prvem trenutku. Kasneje se drugi člani, ki so sicer v začetku nič.

Ampak itak predpostavka: $\|C_k\|^2 \ll \|C_s\|^2 \approx 1$

$$C_k(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t V_{ks}(t') e^{-\frac{i}{\hbar}(E_s - E_k)t'} dt'$$

$$C_s = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^t V_{ss}(t') dt' \approx 1$$

Primeri: [Majhna konstantna motnja]

① $\hat{V}(x) = \hat{V} \theta(x)$

$$P_{ks} = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t V_{ks} e^{i\omega_{ks}t'} dt' \right|^2 ; \hbar\omega_{ks} = E_k - E_s$$

$$V_{ks} = \langle k | V | s \rangle$$

$$\bullet V = -\vec{p}_e \cdot \vec{E}$$

$$\bullet (\vec{p} - e\vec{A})^2 = \vec{p}^2 - 2e\vec{p} \cdot \vec{A} + e^2 A^2 \rightarrow A \text{ je majhen}$$

A^2 pa zanemarjiv

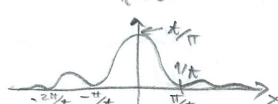
$$P_{ks} = \frac{|V_{ks}|^2}{\hbar^2} \frac{|e^{i\omega_{ks}t} - 1|^2}{\omega_{ks}^2} = \frac{|V_{ks}|^2}{\hbar^2} \frac{e^{\frac{i\omega_{ks}t}{2}} |e^{\frac{i\omega_{ks}t}{2}} - e^{-\frac{i\omega_{ks}t}{2}}|^2}{\omega_{ks}^2 \cdot \frac{2^2}{2^2}}$$

$$\Rightarrow P_{ks} = \frac{|V_{ks}|^2}{\hbar^2} \frac{\sin^2(\frac{\omega_{ks}t}{2})}{(\frac{\omega_{ks}}{2})^2} = \frac{|V_{ks}|^2 t}{\hbar^2} \frac{\sin^2(\frac{\omega_{ks}t}{2})}{(\frac{\omega_{ks}}{2})^2 t} \cdot \frac{\pi}{\pi}$$

Ena od reprezentacij δ funkcije:

$$\delta_t(x) = \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 \frac{x}{2t}}{x^2 t} , \delta(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} \delta_t(x)$$

$$\int \delta_t(x) dx = 1$$



Tako dobimo:

$$P_{ks}(t) = \frac{|V_{ks}|^2}{\hbar^2} t \pi \delta_t\left(\frac{E_k - E_s}{2t}\right)$$

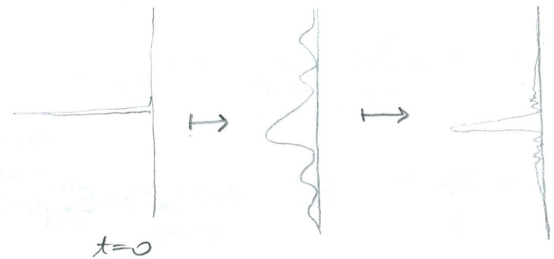
$$\Rightarrow P_{ks}(t) = \frac{2\pi |V_{ks}|^2}{\hbar} t \delta_t(E_k - E_s) \ll 1$$

(naključno preverimo, to mora biti res)

To ni diracova delta ampak približek.

Kaj pravi formula?

Da se bo nek nivo k z energijo E_k vzbudil z verjetnostjo, ki linearno narašča s časom ampak je kratki pomnožen z vedno bolj točno "delto".



Če imamo ogromno stanj, gosto skupaj, pa:

(npr. e^- pride v atom, potem odleti ven, lahko pod poljubnim kotom. Zaradi ohranitve energije je njegov spekter zvezen.)

$$\{ \Delta E, \Delta N \} \quad S(E_s) = \frac{dN}{dE}$$

$$P_t = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\pi}{\hbar} |V_{ks}|^2 \delta_t(E_k - E_s) t S(E_k) dE_k$$

To je težko izračunati.

Ampak v limiti $\lim_{t \rightarrow \infty} P_t$ pa je $\delta_t \rightarrow \delta$

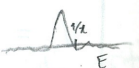
ko sistem v enakoenergijanskem stanju kot je bil na začetku.

Kot neka "kvantna ohranitev energije".

Merilo za kratek/dolg čas je

$$\Delta E \Delta t \sim \hbar$$

To vidimo iz grafa



$$P = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{ks}|^2 S(E_s) t$$

Fermijevsko zlato pravilo:

$$w(x) = \frac{dP}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |V_{ks}|^2 S(E_s)$$

gosta stanja, na koncu pri začetni energiji.

(Pauli 1928)

$w(x)$ kot polna vidimo, ni odvisna od časa.

② [Sinusna motnja]

$$\hat{V} = \hat{F} e^{i\omega t} + \hat{F}^\dagger e^{-i\omega t} = V(\vec{r}) \cos(\omega t)$$

[Npr. z laserjem posvetimo na elektron.

$$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}) \cos \omega t. (\vec{p} - e\vec{A})^2 \rightarrow \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{r}, t)$$

Če naredimo v Coulombi uvrstitvi, lahko:

$$V = C (-i\hbar \vec{\nabla} \cdot \vec{A}(\vec{r}) \cos \omega t)$$

V tem primeru bi za gostoto verjetnosti prehodov dobili:

$$W_{ks} = \frac{2\pi}{\hbar} |\vec{F}_{ks}|^2 \left[\delta_x(E_s - E_k + \hbar\omega) + \delta_x(E_s - E_k - \hbar\omega) \right]$$

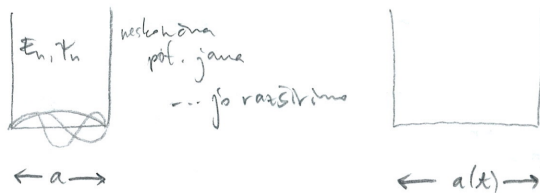
kjer je $F_{ks} = \int \psi_k^* V(\vec{r}) \psi_s d\vec{r}$

Zdaj bi imeli pri izpeljavi $e^{i\frac{E_s - E_k}{\hbar}t \pm i\omega t}$



Če z laserjem posvetimo na vzbujen elektron, dobimo stimulirano emisijo.

③ [Adiabatsna motnja]



$$E_0 = \frac{p^2}{2m}, \quad p = \frac{2\pi}{\lambda}, \quad \lambda = 2a(x)$$

1. Lahko bi razširjali adiabatsno, tako počasi bi spreminjali, da bi bil delec ves čas v osn. stanju in sploh ne bi vedeli, da se razširja.

2. Lahko pa hipoma razmaknemo, in se potem $|\psi\rangle$ začne razvijati po novih stanjih

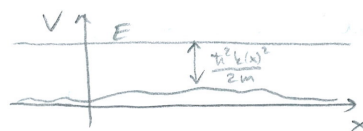


Nekakšen kriterij za adiabatsnost je nekritičanje stanj (lastnih energij) ko spreminjamo parameter sistema.



(npr. tako)

④ [Wentzel-Kramers-Brillouin] WKB približek



$$\frac{\partial V}{\partial x} \ll \dots \quad (\text{pogoji, ki pa ga ne bomo napisali})$$

To pomeni, da se potencial spreminja počasi, ni skokov.

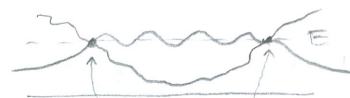
V tem primeru $\psi(x) \propto \frac{1}{\sqrt{k(x)}} e^{ik(x)x}$

Implicitna definicija $k(x)$: $E = \frac{\hbar^2 k(x)^2}{2m} + V(x)$

Imamo dve možnosti:

(a) $k^2(x) \gg \dots$ (od nečesa, ne povemo česa)

(b) Vezana stanja:



(klasični) obračalni točki

Moramo zlepit $|\psi\rangle$ v območju levo, desno od obračalnih točk in v sredini.

To pa na dva načina, lahko preko

Airyjevih funkcij, lahko pa razširimo problem v kompleksno ravnino, povežemo med exp in trigonometrijskimi, greno obzok pola, dobimo povezavalne formule.

Najpomembnejši WKB rezultat je pri d. razpadu, kjer je verjetnost za razpad funkcija označene ploščine



Drugi rezultat pa je Sommerfeldova kvantitacija, ki prešteje število vrhov v vmesnem območju.

Kvantna prepletenost in kvantna teleportacija.

(nikoli ne teleportiramo mase, le info!)

Imejmo dva delca (ločljiva, vsak v svoji škatli), valovna funkcija je tako oblike $|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2$ In to stanje je neprepleteno.

Če je npr. delec 1 polariziran v smeri z in drugi v smeri x, pa $|\psi_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 (|\uparrow\rangle_2 + |\downarrow\rangle_2) =$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\uparrow\rangle + |\uparrow\downarrow\rangle)$$

Prepleteno stanje pa imamo, če

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle), \quad \text{tega pa ne moremo (!) prevesti na zgodnje prevere}$$

Kako poteka teleportacija?

Radi bi $|H\rangle$ "skopirali" iz A v B.

Tega se po no-cloning theoremu ne da, ni kloniranja, ni kopiranja.

Če je $|H\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$ ne vemo faze med a in b, ne vemo skupne faze...

Ne obstaja algoritem, ki bi nam kopiral, ne da bi poznali a in b.

Kaj pa lahko?

singletna stanja $|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle$ ločimo, en delec damo v A, en delec pa v B.

$$\begin{aligned} |\Psi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\downarrow_2\rangle \pm |\downarrow_1\uparrow_2\rangle) \\ |\Phi^\pm\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\uparrow_2\rangle \pm |\downarrow_1\downarrow_2\rangle) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{triplet} \\ \text{singlet} \end{array} \right\} \text{Bellova stanja}$$

Ko razdelimo singlet, imamo dva delca, 2,3.

$$|\Psi_{23}^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow_2\downarrow_3\rangle - |\downarrow_2\uparrow_3\rangle)$$

$|\Psi_1\rangle = a|\uparrow_1\rangle + b|\downarrow_1\rangle$ imamo najprej pri A.

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= |\Psi_1\rangle |\Psi_{23}^-\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}} (|\uparrow_1\uparrow_2\downarrow_3\rangle - |\uparrow_1\downarrow_2\uparrow_3\rangle) + \\ &+ \frac{b}{\sqrt{2}} (|\downarrow_1\uparrow_2\downarrow_3\rangle - |\downarrow_1\downarrow_2\uparrow_3\rangle) \end{aligned}$$

To pa lahko razvijemo po Bellovih stanjih

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \frac{1}{2} \left[|\Psi_{12}^-\rangle (-a|\uparrow_3\rangle - b|\downarrow_3\rangle) + |\Psi_{12}^+\rangle (-a|\uparrow_3\rangle + b|\downarrow_3\rangle) \right. \\ &\left. + |\Phi_{12}^-\rangle (a|\downarrow_3\rangle + b|\uparrow_3\rangle) + |\Phi_{12}^+\rangle (a|\downarrow_3\rangle - b|\uparrow_3\rangle) \right] \end{aligned}$$

Bellava meritev je meritev, ki pove v katerem Bellovem stanju sistem je. Za elektrone se da $|H\rangle$ za fotone $|\Phi^\pm\rangle$.

Skupaj imamo $|H\rangle$ in $|\downarrow\rangle$.

Naredimo Bellavo meritev na tem $|H\rangle$ sistemu. Recimo, da smo dobili singlet.

Potem imamo v B avtomatično stanje $a|\uparrow_3\rangle + b|\downarrow_3\rangle$, ki pa smo ga hoteli teleportirati, torej super.

Če pa ne izmerimo singleta, je treba pri $|\downarrow\rangle$ še malo zavrteti koordinatni sistem oz. delec (s $\frac{\pi}{2}$ sunki).

Sipanje.



V realnosti imamo valovni paket.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(k) e^{ikz} dk \quad \text{oz. 3D: } \psi(\vec{r}) = \int \psi(\vec{k}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} d^3k$$

(nikoli ne sipamo zares ravnega vala.)

Møllerjev operator, Ω , iz stanja e^{ikx} (ki bi bilo lastno stanje brez potenciala $V(r)$)

naredi sipalno stanje Ψ_k^+ .

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Psi_k^+ = e^{ikx}$$

$$\Psi_k^+ = \begin{cases} a e^{ikx} + b e^{-ikx} & ; x < x_1 \\ c e^{ikx} & ; x > x_2 \\ \Psi_k^+(x) & ; x_1 \leq x \leq x_2 \end{cases}$$

Imamo torej novo baro, ki se spremeni le na območju $[x_1, x_2]$.

Na začetku imamo na levi le $a e^{ikx}$, ker gre paket le v desno. Postavimo se $a=1$, da je začetno stanje enako, oz. pravo.

(a) Sipalna matrika

Opazujemo sipanje v eni dimenziji.



$$\begin{aligned} \Psi_L^+ &= a e^{ikx} \\ \Psi_L^- &= b e^{-ikx} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_D^+ &= c e^{ikx} \\ \Psi_D^- &= d e^{-ikx} \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_L^- \\ \Psi_D^+ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Psi_L^+ \\ \Psi_D^- \end{bmatrix}$$

To je najmanjši primer sip. matrike

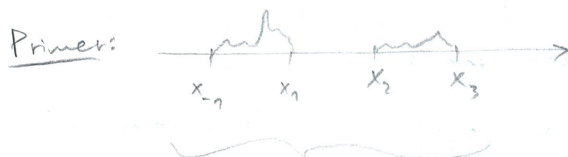
$$\begin{bmatrix} r \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r & r' \\ t & t' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Sipalna matrika S je unitarna (se vidi iz ohranitve verjetnosti ali pa direktno)
- Zapišemo lahko $SS^\dagger = S^\dagger S = 1$
- Če je invariantna na obrat časa: $\Psi \rightarrow \Psi^*$
 $\Rightarrow t=t'; S^* S = S S^* = 1$ (če ni mag. polj. če so, je treba obrniti tudi t)
- $T=|t|^2, R=|r|^2; T+R=1$

(b) Transfer (prenosna/prehodna) matrika.

$$\begin{bmatrix} \psi_D^+ \\ \psi_D^- \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_L^+ \\ \psi_L^- \end{bmatrix}$$

V bistvu je $M = \begin{bmatrix} (t^*)^{-1} & r^*(t^*)^{-1} \\ -(t^*)^{-1}v & (t^*)^{-1} \end{bmatrix}$



$$M_0 = \begin{bmatrix} e^{ikL} & 0 \\ 0 & e^{-ikL} \end{bmatrix}; L = x_2 - x_1 \quad \text{in} \quad M = M_2 M_0 M_1$$

Feynmanov pristop k kvantni mehaniki.

To je pristop, ne interpretacija.

Obravnavajmo ravni val $\psi = e^{i\frac{p}{\hbar}x - i\frac{E}{\hbar}t}$

Vzememo $p = mv = m\frac{x}{t}$ (stalna hitrost)

$$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{x}{t}\right)^2$$

$$px - Et = m\frac{x}{t}x - \frac{1}{2}m\left(\frac{x}{t}\right)^2 t = \frac{1}{2}m\left(\frac{x}{t}\right)^2 t = L t$$

lagunjeva fun.
 $L = T - V$

V tem primeru imamo

torej $\psi = e^{i\frac{S}{\hbar}}$, kjer

$$S[x_i] = S = \int_0^T L dt; \quad L = T(\dot{x}) - V(x, \dot{x}, t)$$

Koraki, ki ga v knjigah ni:

$$\text{Imejmo } \Psi(x, 0) = \delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk$$

(δ , nič stajajo, ma dobro delovno lego x , razvili smo po lastnih stanjih)

Za $t > 0$ pa:

$$\psi(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - i\frac{\hbar k^2}{2m}t} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - i\frac{\hbar k^2}{2m}t} dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx - i\frac{\hbar k^2}{2m}t} dk$$

$\delta_t(x)$
razlezena "delta", sploh ni delta, nek gauss.

$$\psi(x, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_{t=0}(x-x_1) \psi(x_1, 0) dx_1$$

$$\psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta_t(x-x_1) \psi(x_1, 0) dx_1$$

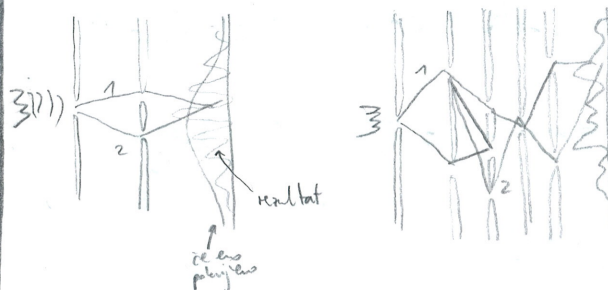
To je potem ravno Greenova funkcija, jedro
Rečemo tudi propagator.

$$\text{V bistvu } \psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, t; x_1, t_1) \psi(x_1, t_1) dx_1$$

$K(2,1)$

Verjetnostna amplituda, da
delec iz stanja x_1 pride v x_2

Opazujmo double-split eksperiment v
luči Feynmanovega pristopa.



$$\psi = a e^{i\frac{S_1}{\hbar}} + b e^{i\frac{S_2}{\hbar}}; \quad S_i = S(x_i(t))$$

$\uparrow$
i-ta pot

$$\text{V desnem primeru bi bilo } \psi = \sum_{i=1}^N e^{i\frac{S_i}{\hbar}}$$

Prazen prostor lahko interpretiramo kot
mnostico neskončno zaprele & neskončno
luknjastosti.



klasično je
ustrečna
pot
 $x_i = v_i t + x_0$

Feynmanova ideja:

$$K(2,1) = C \sum_{\text{vse poti}} e^{i\frac{S_i[x_i(t)]}{\hbar}}$$

To je tudi podobno kot $e^{-\beta F}$ v statistični
fiziki, kjer sestevamo po vseh stanjih...

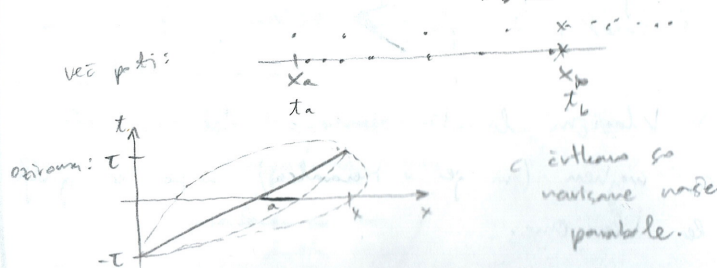
Tu pa po vseh poteh. Pri Feynmanu je $i\hbar$
v eksponentu, pri stat. fiziki pa je realno.

V primeru ravnega vala je v eksponentu
 S , sicer pa je še kaj drugače.

Izračunajmo za primer praznega
prostora, angajmo se na parabolične
1D primere (parabolične v času)

$$\text{klasična pot: } x_c(t) = x_a + \frac{x_b - x_a}{t_b - t_a} t$$

več poti:



Parabole parametriziramo:

$$x(t) = v_0(t + \tau) - \frac{a}{2\tau^2}(t + \tau)(t - \tau)$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = v_0 - \frac{2a}{\tau^2}t$$

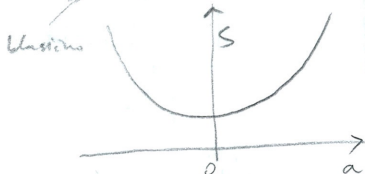
liho se integrira v 0.

$$L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 = \frac{m}{2}\left(v_0^2 - \frac{2av_0}{\tau^2}t \cdot 2 + \frac{4a^2}{\tau^4}t^2\right)$$

$$S = \int_{-\tau}^{\tau} L dt = \frac{1}{2}mv_0^2 \cdot 2\tau + \frac{1}{2}m \frac{4a^2}{\tau^4} \frac{\tau^3}{2} \cdot 2$$

$$= mv_0^2\tau + \frac{4}{3} \frac{ma^2}{\tau} = S_0 + \frac{4}{3} \frac{m}{\tau} a^2$$

$$\tau v_0 = \frac{x}{2}$$



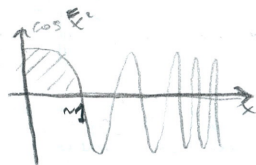
$$K(2,1) = C \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{S}{\hbar} [x_a(t)]} da$$

$$K(2,1) = C e^{i \frac{S_0}{\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{4ma^2}{3\hbar\tau}} da = C e^{i \frac{S_0}{\hbar}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i \frac{4mv_0^2}{3\hbar x} a^2} da$$

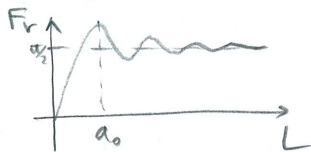
Fresnel integral:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix^2} dx = 2 \int_0^{\infty} \cos^2 x dx =$$

$$= 2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \text{FresnelC}\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}\right)$$



L je meja, do kavor spustimo delec, do kavor lahko sega hipotetična pot. To je v principu neskončnost (relativnost ni brezna).



Tam se tudi integral, kot vidimo, ne spreminja, super.

Pri a_0 je rešitev sencega dela v integralu. $a_0^2 \cdot \frac{8}{3} \frac{mv_0}{\hbar x} \sim 1$

$$\Rightarrow a_0 = \sqrt{\frac{3}{8} \frac{\hbar}{mv_0}} \sqrt{x}$$

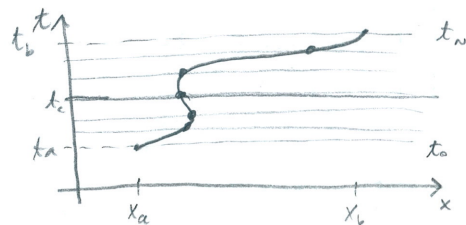
Tu namo glavni prispevek

Oddaljene pa se približajo s sosednjimi. Npr. (tudi dve sta skoraj isti)



V klasični limiti težkega delca, je a_0 majhen (in je v nevtralu), zato se gibe le klasično.

Zdaj si pogledajmo še malo splošnejše poti.



Razdelimo interval in pot, kot pri Riemannovem integralu. Potem lahko te intervalne zgoštili.

$$x(t) \leftrightarrow \{x_i, t_i\}$$

Kaj so možni x_i ?
Cele premice.

$$t_i - t_{i-1} = \varepsilon = \frac{t_N - t_0}{N}$$

$$K_N(2,1) = \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_2}{A} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_{N-1}}{A} \cdot e^{i \frac{S}{\hbar} [x_1, \dots, x_{N-1}]}$$

konstanta, je še ne pramo

Nato pa limitiramo, $\varepsilon \rightarrow 0$ oz. $N \rightarrow \infty$.

$$K(2,1) = \int e^{i \frac{S[x(t)]}{\hbar}} D x(t)$$

funkcionalni oz. Feynmanov integral

V primeru praznega prostora ($V=0$), se to da izračunati, N-krat integriramo, samim Gaussi, limitiramo in dobimo

$$K(2,1) = G(x_b, t_b; x_a, t_a)$$

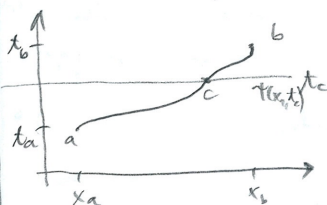
Zgorajih N integralov pa lahko modeliramo. To naj bo nekje vmes med t_a in t_b .

Vse kar je prej in vse kar je potem, izračunamo posebej. In imamo

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int K(x_c, t_c; x_a, t_a) K(x_b, t_b; x_c, t_c) dx_c$$

Kot pri verjetnosti, le da tam seštevamo verjetnosti, tu pa amplitude.

* Izpeljava Schrödingrove enačbe



$$K(b,a) = \int e^{i \frac{S[x(t)]}{\hbar}} D x(t)$$

$$K(b,a) = \int K(c,a) K(b,c) dx_c$$

$\Psi(x,t)$ je verjetnostna amplituda za mesto x ob t .

Tudi K je verjetnostna amplituda.

$$\Psi(x, t) = \int \underbrace{K(x, t; x_1, t_1)}_{\text{propagator, Greenova fun.}} \Psi(x_1, t_1) dx_1$$

To je enačba v integralni obliki. Pretvorimo jo v dif. obliko. Dobili bomo Sch. en.



$$\Psi(x, t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x, t+\tau; x+\xi, t) \Psi(x+\xi, t) d\xi$$

$$K(x, t+\tau; x+\xi, t) = \int e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t+\tau} L(x, \dot{x}, t') dt'} D_x =$$

$$= \int e^{\frac{i}{\hbar} \int_t^{t+\tau} [\frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x, t')] dt'} D_x \approx$$

$$\left(\dot{x}^2 = \left(\frac{\xi}{\tau} \right)^2 \text{ in } \text{varno: } \int_t^{t+\tau} f(t') dt' = f(t) \tau \right)$$

$$\approx \int e^{i \frac{\tau}{\hbar} \left(\frac{1}{2} m \frac{\xi^2}{\tau^2} - V(x, t) \right)} D_x \approx$$

$$\approx \frac{1}{A} e^{i \frac{\tau}{\hbar} \left(\frac{1}{2} m \frac{\xi^2}{\tau^2} - V(x, t) \right)}$$

$$\Psi(x, t) + \tau \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{A} e^{i \frac{\tau}{\hbar} \left(\frac{1}{2} m \frac{\xi^2}{\tau^2} - V(x, t) \right)} \cdot \left[\Psi(x, t) + \xi \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x, t) + \frac{\xi^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{A} e^{i \frac{\tau}{\hbar} \frac{1}{2} m \frac{\xi^2}{\tau^2}} \left(1 - \frac{i\tau}{\hbar} V + \mathcal{O}(\tau^2) \right) [\dots]$$

↑
vzeli smo drugi del eksponenta.

$$I_1 := \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{i m \xi^2}{2 \hbar \tau}} d\xi = \frac{1}{A} \sqrt{\frac{2 \pi i \hbar \tau}{m}} \propto \sqrt{\tau}$$

$$I_2 := \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \xi e^{\frac{i m \xi^2}{2 \hbar \tau}} d\xi = 0$$

$$I_n := \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^n e^{\frac{i m \xi^2}{2 \hbar \tau}} d\xi$$

$$\text{Podoben } I_3 \propto \tau \propto \sqrt{\tau} \cdot I_1 \quad (\tau \text{ pa je majhen})$$

$$\underline{\tau \rightarrow 0}: \Psi(x, t) = I_1 \cdot \Psi(x, t)$$

$$\Rightarrow I_1 \equiv 1 \Rightarrow \text{dobimo } A.$$

Zdaj pa dobimo Sch. en.

$$\Psi(x, t) + \tau \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \Psi(x, t) + \frac{i \hbar \tau}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi(x, t) - \frac{i \tau}{\hbar} V \Psi$$

(plus $\mathcal{O}(\tau^2)$, ki ga sedaj zanemarimo)

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \Psi(x, t) = \frac{i \hbar}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi - \frac{i V}{\hbar} \Psi + \mathcal{O}(\tau)$$

(možno, $\tau \rightarrow 0$)

$$\Rightarrow \boxed{i \hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = - \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Psi + V \Psi}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \text{Re} \int_{-\infty}^{\infty} x^{\frac{n}{2}} e^{i \frac{x^2}{\tau} - x \lambda} dx = -\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right) \sin \frac{\pi n}{4}$$

(tako, prek λ , pa računamo take integrale $\int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{i \frac{x^2}{\tau}} dx \dots$)

* Bohmova interpretacija

Von Neumann je „dokazal“, da sveta ne moremo opisati s skritimi spremenljivkami. Kljub temu je Bohmu to uspelo.

Ta teorija vseeno ne da nič novega, zato je tudi precej nepopravna.

V Bohmovi interpretaciji delec ima določeno lego, giblje se po Newtonovem zakonu,

$$m \ddot{x} = - \nabla (V + Q)$$

↑
kvantni potencial, $x = x(t)$

kjer je kvantni potencial nelokalni, doblja ga valovna funkcija, Ψ . Ta torej ima vlogo v svetu, ne kot pri Kopenhagenski, kjer je na svetu penumbra le $|\Psi|^2$.

Imamo dobro znane enačbe gibanja, ne vemo pa, kako je z začetnimi pogoji.

Ti so nedoločeni, zato je rezultat nedoločen.

Če opravimo meritev, točno dobimo lego, imamo tudi „začetne“ pogoje, vsa dinamika je potem znana.

Vendar pa se teh trajektorij ne da preveriti z eksperimentom.

Interferenca na dveh režah:



Kje se je von Neumann zmotil?

Opomba: $\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle = a$, $\langle B \rangle = b$

$$\langle A+B \rangle = a+b = \langle A \rangle + \langle B \rangle \quad \checkmark$$

Če $\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle$, $\hat{B}|\psi\rangle = b|\psi\rangle$

Naj bo $\hat{C} = \hat{A} + \hat{B}$. Zdaj $C \neq a+b$!

Oč. vsaj ni nujno, ~~zaj~~ če $\hat{A}$ in $\hat{B}$ ne komutirata.

Primer: Če imamo $\hat{\sigma}_x$ in $\hat{\sigma}_y$

Potem $\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y \neq \pm 1$, ker nista hkrati dobro določeni stanji.

Von Neumann pa je predpostavil, da je tudi zdaj $a+b \dots$

$|\psi|^2$ je verjetnost, da se delec na nekem mestu zares nahaja. Injemo delec v resonančni pot. jami, v osn. stanju.

Imamo $|\psi\rangle$ na začetku, vemo $|\psi, t\rangle$, tako da rešimo Sch. enačbo.

Ta nam da kvantni potencial Q , ki nam potem da Newtonsko silo.

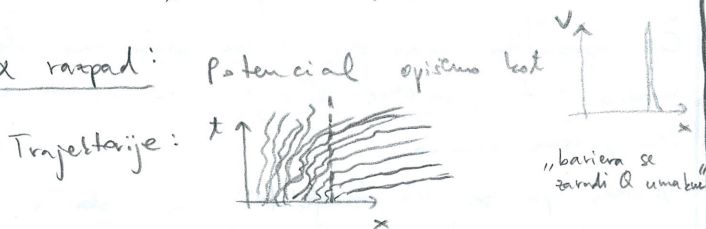
$$\psi(x, t) = |\psi| e^{iS/\hbar} \rightarrow Q(x, t) \rightarrow F(x, t)$$

Podati moramo le začetno lego, hitrost je tukaj določena, $\dot{x}(0) = \vec{\nabla} S(x_0, t)$

• V resonančni jami, bodo trajektorije:



• α razpad: Potencial opišemo kot



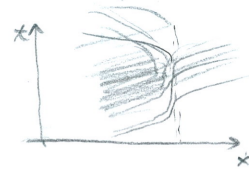
Časovni potek ansambla delcev pa je potem res tak kot mora biti če je bolj na robu gre bolj ven, sicer baseje.

• Sprejeto, na δ funkciji:



Pošljemo Gaussov val. paket, čez pridejo tisti, ki so bolj na desni.

Trajektorije:



Kaj pa je z neobčutljivostjo?

(Heisenberg je mislil, da je neobčutljivost bistvo kvantne mehanike in sveta.)

Injemo delec v resonančni pot. jami. V osnovnem stanju, naj ima (Bohmova) koordinata $x(0)$ in hitrost $\dot{x}(0) = 0$ (v jami ne moremo veriti!)

Kako bi izmerili hitrost? Umožnimo potencial, postavimo detektor daleč, merimo čas, kdaj pride do detektorja.



Kaj se dogaja?

$\psi(x, t)$ generira kvantni potencial $Q(x, t)$, njegov gradient pa je sila.

$$\psi = \int \psi_k e^{ikx} dx$$

