zdaj smo naredili za $N=2$ (2 stanji z isto energijo)

Splošno:

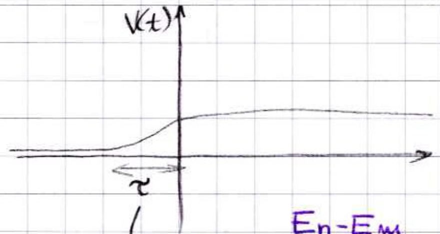
$$\det\left(V_{ij} - E_n^{i}\delta_{ij}\right) = 0$$

$$V_{ij} = \langle n_i^0 | V | n_j^0 \rangle$$

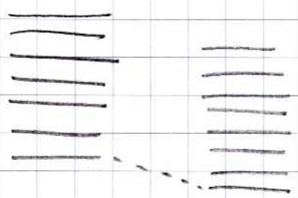
Če daš atome vodika v $\vec{E}$ (→ kondenzator) /linearno zmotiš/ (→ $V \propto x$). V prvem redu se ne razcepi. Šele v drugem redu.
Lahko pa si pomagaš s tem za prvi red:
Matrične elemente popraviš $V_{ij} \leftrightarrow V_{ij} + \sum_{m\neq i} \frac{V_{im}V_{mj}}{E_i^0 - E_m^0}$.

Adiabatni vklop motnje

$$H = H_0 + V(t)$$



$\hookrightarrow \tau \gg \frac{E_n - E_m}{\hbar}$ → τ mora biti mnogo večji od karakterističnih časov sistema



Če je sistem v osnovnem stanju in počasi vklopimo motnjo, bo po dolgem času zopet v osnovnem stanju novega sistema. } sistem E_n mora biti nedegeneriran
Če je prvotni sistem degeneriran, pa ni čisto tako.

ČASOVNO ODVISNA MOTNJA

$$H = H_0 + V(t) \; ; \; V(t) = V^\dagger(t)$$

npr:
- $eU_1(t)$ → napetost, če imaš naboj
- $-\vec{p}_e \cdot \vec{E}(t)$ → če imaš dipol
- $-\vec{p}_m \cdot \vec{B}(t)$ → magnetno polje

Posledica:
→ ni več stacionarnih stanj, ni lastnih energij
↳ energije ni več konst., ne gre več za problem lastnih vrednosti

$$H_0 \underbrace{|n^0\rangle}_{} = E_n |n^0\rangle$$

↳ baza za nemoten sistem

v vsakem trenutku to lahko razvijemo $|\psi\rangle$ po lastnih funkcijah

$$|\psi(t_0)\rangle = \sum c_n^{(t_0)} e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} |n^\circ\rangle$$

$$c_n(t) = \langle n^\circ|\psi(t)\rangle e^{i\frac{E_n}{\hbar}t}$$ → te koeficiente bi radi določili

je odvisen od časa. $|n^\circ\rangle$ je dobra baza, ampak razvoj je časovno odvisen

torej: $H|\psi\rangle = (H_0+V)|\psi\rangle = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}|\psi\rangle$

$$i\hbar\sum_n\left(\frac{\partial c_n}{\partial t}e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t} - c_n\frac{i}{\hbar}E_n e^{-i\frac{E_n}{\hbar}t}\right)|n^\circ\rangle =$$

$$= \sum_n c_n(E_n+V)e^{-i\frac{E_nt}{\hbar}}|n^\circ\rangle$$

z leve zmnožimo z nekim drugim stanjem $\langle k^\circ|$:

kjer: $\langle k^\circ|n^\circ\rangle = \delta_{kn}$

$$i\hbar\left(\frac{\partial c_k}{\partial t} - \cancel{c_k\frac{i}{\hbar}E_k}\right)e^{-i\frac{E_k}{\hbar}t} = \cancel{E_k c_k e^{-i\frac{E_kt}{\hbar}}} + \sum_n V_{kn}e^{-i\frac{E_nt}{\hbar}}c_n$$

$V_{kn} = \langle k^\circ|V|n^\circ\rangle$ časovno odvisni matrični element

rezultat:

$$i\hbar\dot{c}_k = \sum_n V_{kn}e^{i\omega_{kn}t}c_n$$

$$\omega_{kn} = \frac{E_k-E_n}{\hbar}$$

→ do sedaj še nismo storili nobenega približka!

$$i\hbar\begin{pmatrix}\dot{c}_1\\ \dot{c}_2\\ \vdots\\ \dot{c}_N\\ \vdots\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}V_{11} & V_{12}e^{i\omega_{12}t} & \cdots & \\ V_{21}e^{i\omega_{21}t} & V_{22} & \cdots & \\ \vdots & & & \\ & & V_{nn} & \cdots\\ & & \vdots & \end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\\ \vdots\\ c_n\\ \vdots\end{pmatrix}$$

$$V_{12}e^{i\omega_{12}t} = V_{21}^* e^{-i\omega_{21}t}$$

Tu še ni motnje. Pač časovno odvisen H imamo.

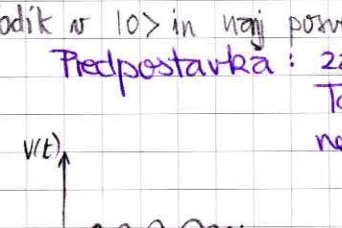
$\boxed{\text{PRIBLIŽNO}}$

Vodik v $|0\rangle$ in naj posveti s šibko svetlobo npr.

Predpostavka: za $t\to-\infty$ motnje ni bilo.

Takrat je bil sistem v nekem stanju $|s\rangle$: $c_n = \delta_{ns}$, $c_s = 1$, $c_{n\neq s} = 0$

E_s s



Ko pride motnja, kakšni so $c_n(t) = ?$

"In klavir sam zaigra." Raušak

predpostavka: za $n \neq 0$ $\quad C_n(t) \ll 1$ $\quad$ → rečemo, da bo najbrž ostal v tem stanju, z malo verjetnostjo se vzbudi. $C_n(t)$ so tipično $\sim 10^{-6}$.

$$C_s(t) = 1$$

potem pa je za $k \neq s$: $\quad i\hbar \begin{pmatrix} \dot{C}_1 \\ \dot{C}_2 \\ \vdots \\ \dot{C}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ldots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix}$ s

$$i\hbar \frac{\partial C_k}{\partial t} = V_{ks}(t)\, e^{i\omega_{ks} t}\, 1$$

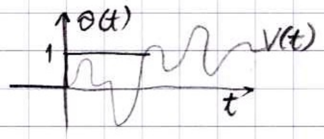
$$C_k(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} V_{ks}(t)\, e^{i\omega_{ks} t}\, dt$$

$C_k(-\infty) = 0$

formalno: $C_s(t) = 1 - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t} V_{ss}(t)\, dt$, čeprav vzamemo $C_s(t) = 1$

$-\infty$ → od časa ko se začne motnja

Posebni primeri: $\quad V(t) = \hat{V}_0(t)\, \Theta(t)$



- naj bo $\hat{V}_0(t) = V_0$

$$P_{ks}(t) = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_0^t V_{ks}\, e^{i\omega_{ks} t}\, dt \right|^2 = \frac{1}{\hbar^2} |V_{ks}|^2 \left| \frac{e^{i\omega_{ks} t} - 1}{i\omega_{ks}} \right|^2$$

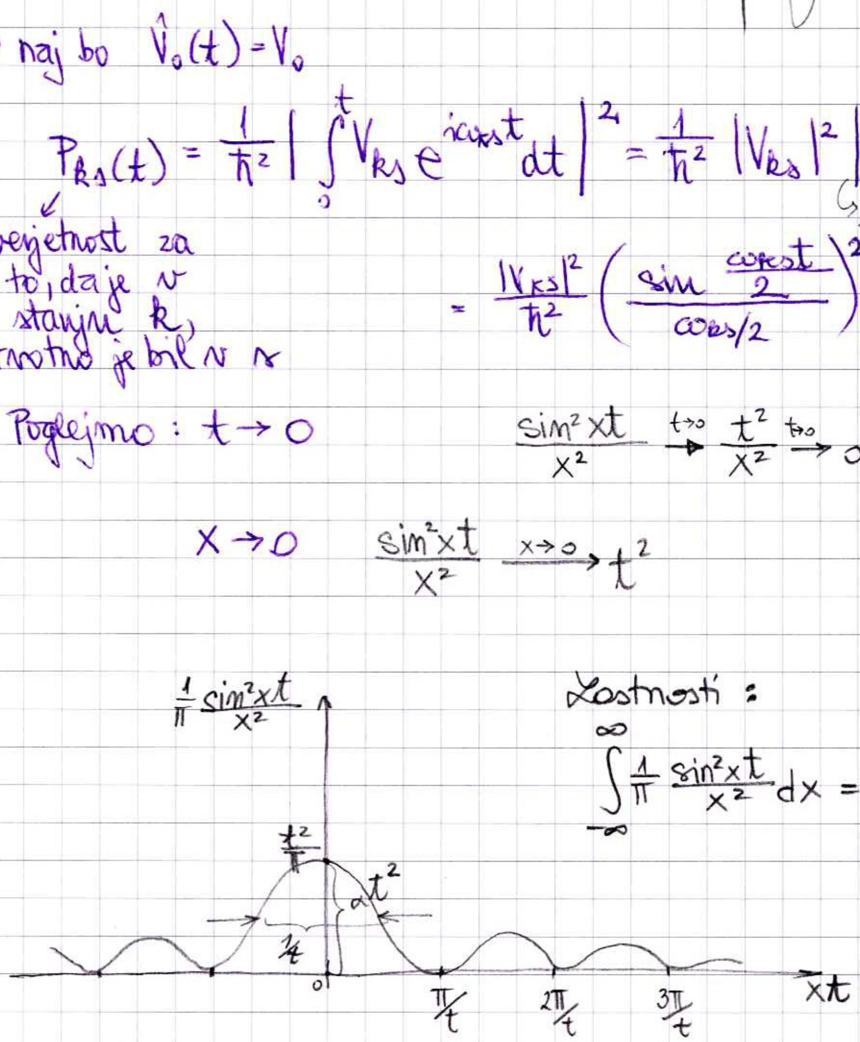
↳ izpostaviš $e^{\frac{i\omega_{ks}}{2} t}$

verjetnost za to, da je v stanju k, prvotno je bil v s

$$= \frac{|V_{ks}|^2}{\hbar^2} \left(\frac{\sin \frac{\omega_{ks} t}{2}}{\omega_{ks}/2} \right)^2$$

Poglejmo: $t \to 0$ $\qquad \frac{\sin^2 xt}{x^2} \xrightarrow{t \to 0} \frac{t^2}{x^2} \xrightarrow{t \to 0} 0$

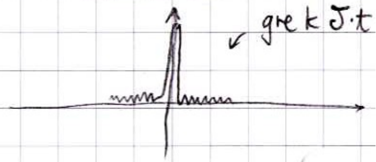
$x \to 0$ $\qquad \frac{\sin^2 xt}{x^2} \xrightarrow{x \to 0} t^2$



Lastnosti:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 xt}{x^2}\, dx = 1$$

za $t \gg 1$:



$$\frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 xt}{x^2} \xrightarrow{t \to \infty} \delta_t(x)\, t$$

→ Preveri: DN!

$\sqrt{5}-\frac{1}{2}$

$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin Nx}{x} \quad \text{za } N\to\infty$$

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\sin^2 xt}{x^2 t} \quad \text{za } t\to\infty$$

$$\delta(x)=\frac{1}{\pi}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2} \quad \text{za } \varepsilon\to 0$$

$$\delta(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{\varepsilon}}$$

torej za $t\to\infty$: $P_{ks}(t)=\frac{2\pi t}{\hbar}|V_{ks}|^2\delta_t(E_k-E_s)$

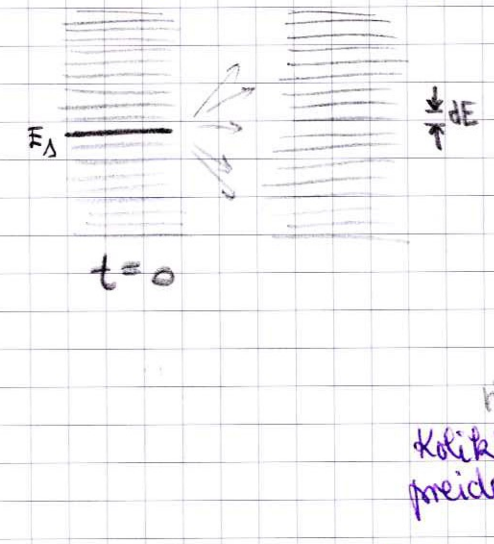
↳ največja je verjetnost, da bo ostal na isti energiji $E_k=E_s$

→ če še se bo spremenila energija, bo sprememba ΔE

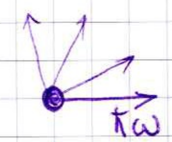
reda $\Delta E\sim\frac{\hbar}{\Delta t}$. → $\Delta E\,\Delta t=\hbar$ → po kratkem času je ΔE lahko znaten. Po $\Delta t=\infty$, je ΔE 0!

↳ širina krivulje

Fermijevo zlato pravilo



$t=0$



$\omega=ck$

↳ delec seva v katerokoli smer.

Smiselno je definirati gostoto stanj.

↳ $dN=\rho\,dE$

št. nivojev

Kolikšna je verjetnost da sistem iz E_s preide v katerega koli v novem sistemu?

$t\to\infty$, po dolgem času → $\frac{dP_s}{dt}=\int_{-\infty}^{\infty}\rho(E)\frac{2\pi t}{\hbar}|V_{ks}|^2\delta_t(E_k-E_s)\,dE_k=W_s$

↳ čez vsa stanja seštejemo.

$$\boxed{W_s=\frac{2\pi}{\hbar}|V_{ks}|^2\rho(E_k)}$$ ⇒ zlato Fermijevo pravilo in $E_k=E_s$

↳ končna energija je enaka začetni

$\frac{dP}{dt}$

PERIODIČNA MOTNJA

Kako se sistem vede, če:

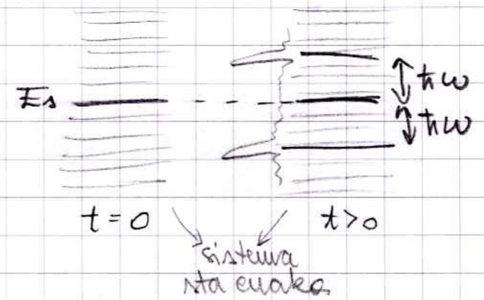
$$V(t) = \left(\hat F e^{-i\omega t} + \hat F^{\dagger} e^{i\omega t}\right)\Theta(t)$$

Primer: $V \propto \underbrace{i\nabla}_{\hat F} \cdot \underbrace{\vec A}_{A_0 e^{\pm i\omega t}}$

$P_{ks} = ?$ gre v k — začetno

$$\frac{d}{dt}P_{ks} = \frac{2\pi}{\hbar}|F_{ks}|^2\left[\delta_t(E_s - E_k - \hbar\omega) + \delta_t(E_s - E_k + \hbar\omega)\right]$$

emisija ali absorpcija. Energija se spremeni za kvant $\hbar\omega$.



Nivoji se ne spremenijo. Ampak $\rho = \frac{dN}{dE}$ pa se spremeni, zasedenost se spremeni.

Variacijska metoda

$H \Rightarrow$ radi bi našli osnovno stanje tega sistema $= E_0$

$H|n\rangle = E_n|n\rangle$ Recimo, da znamo najt $|n\rangle$.

Neka $|\psi\rangle = \sum_n' |n\rangle\langle n|\psi\rangle$ — poskusna funkcija

vzemimo $\langle\psi|H|\psi\rangle = \sum_n' \langle\psi|n\rangle\overbrace{\langle n|H|\psi\rangle}^{E_n\langle n|\psi\rangle} =$

$= \sum_n' E_n |\langle n|\psi\rangle|^2$ to vemo.

Zdaj pa vzemimo, da je $E_0 \leq E_n \ \forall n$. (osnovno stanje)

Potem je: $\langle\psi|H|\psi\rangle \geq \sum_n' E_0 |\langle n|\psi\rangle|^2$

$\geq E_0 \underbrace{\sum_n' |\langle n|\psi\rangle|^2}_{\langle\psi|\psi\rangle} = E_0\langle\psi|\psi\rangle$