$\hookrightarrow E_0 \leq \dfrac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$ za $\forall|\psi\rangle$

$|\psi\rangle = |\psi\,\overbrace{\xi\,\eta\,\zeta}^{\text{parametri, ki določajo }\psi}\rangle$

$E_0 \leq \tilde{E}_0 = \underset{\xi\eta\zeta}{\min} \dfrac{\langle\psi|H|\psi\rangle}{\langle\psi|\psi\rangle}$

$\tilde{E}_0$ = najmanj kar lahko načaraš s spreminjenjem $\xi\eta\zeta$.

~~Heisenbergova reprezentacija~~

Feynmanov pristop

(a) $\vec{F} = m\vec{a} \iff \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L(x,\dot{x},t)}{\partial \dot{x}} - \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0$ → Euler-Lagrange

$L(x,\dot{x},t) = T(\dot{x}) - V(x,t)$

Lagrangeve enačbe so ekvivalentne Newtonovemu zakonu.

(b) variacijski princip delec se giblje po $x(t)$.

$S[x] = \int_{t_1}^{t_2} L(\overset{x(t)}{x}, \overset{\dot{x}(t)}{\dot{x}}, t)\,dt$

funkcional

akcija

$S(x(t))$ pot po kateri gre delec

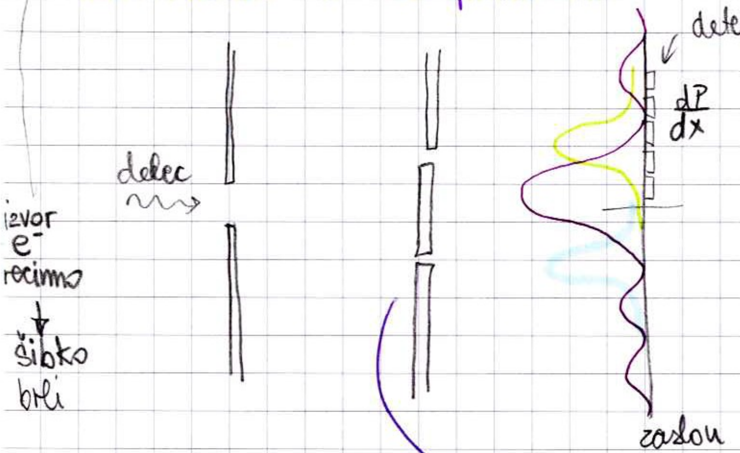
S = ekstremen ; δS okoli ekstrema = 0 ⇒ dobiš Euler-Lagrangeove enačbe

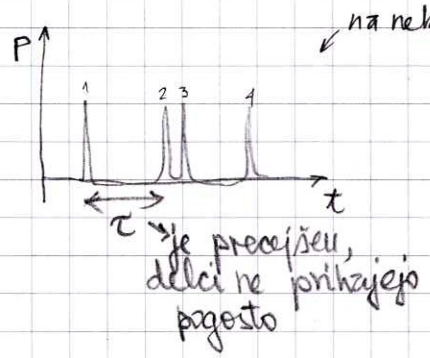
Kako je pa s Schrödingerjevo enačbo? ↓

$i\hbar \dfrac{\partial \psi}{\partial t} = H\psi$ → kako do tega, kot smo preko akcije prišli do Newtonovega zakona

↳ po knjigi Feynman - Hibbs → fajn knjiga, prekopiraj par poglavij "žakaj pa ne bi metal štruc kruha?" Jaka

zamislimo si eksperiment:

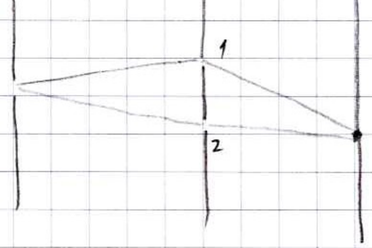




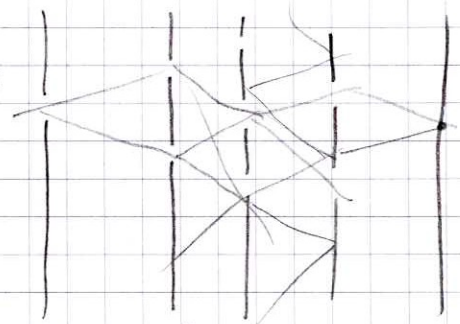
Sedaj pa recimo, da eno zaslonko zapreš. Potem je $\frac{dP}{dx}$ z zeleno narisan.
Ko ta drugo zapreš, prvo odpreš je pa z modro.

Če sta obe zaslonki odprti, dobiš pa z vijolično narisano interferenčna slika. Dobiš tudi ničle. Tam kjer je pri posamezni zaslonki bil $\frac{dP}{dx}>0$, je nekje zdaj $\frac{dP}{dx}=0$.

Vveš pa da gre sa en delec. Rezultat je drugačen kot pričakuješ.
delec gre hkrati skozi obe luknji:



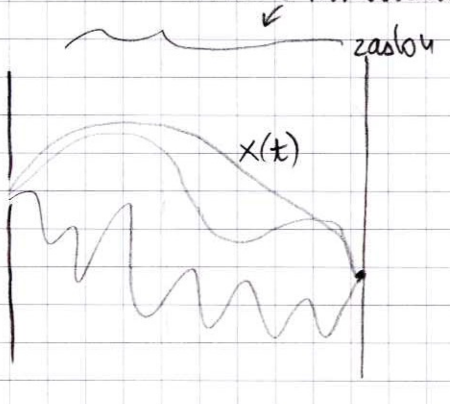
ali pa:



se tudi odbije lahko vmes

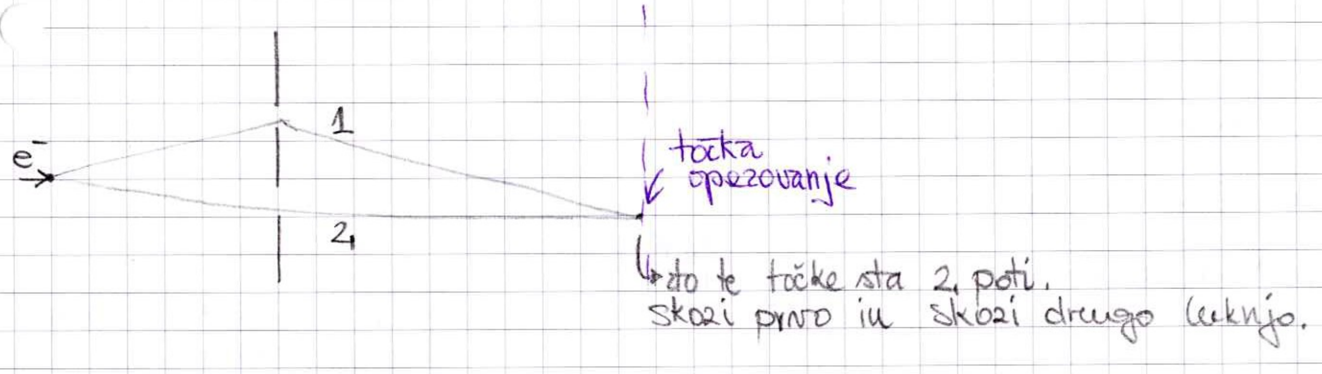
Za kvantno mehaniko je verjetnost torej najbrž Σ po vseh možnih poteh.

vmes naredimo več in več lukenj v zaslon, in več in več zaslonov



klasično vemo: $S[x] \Rightarrow x = x_{kl}(t)$

KVANTNA - predavanja



$K_1 \Rightarrow$ amplituda ko gre skozi 1

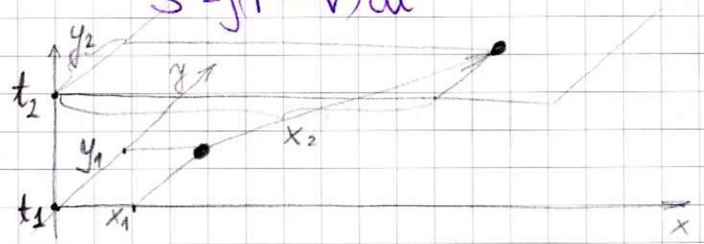
$K_2 \Rightarrow$ — '' — 2.

v točki opazovanje: $|K_1 + K_2|^2 = |K_1|^2 + |K_2|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,K_1 K_2$

Kako bi dobili K_1 in K_2 brez Schrödingerjeve enačbe?

Poglejmo, če imamo prost, klasičen delec:

$$S = \int (T - V)\,dt$$



ob času t_1, delec se giblje v ravnini xy, je na (x_1, y_1)

ob času t_2 je na (x_2, y_2)

Kako delec pride iz (x_1, y_1) do (x_2, y_2)?

Po premici: /ni potenciala/
$$S = \frac{1}{2} m v^2 (t_2 - t_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{t}\right)^2 t m$$
rečemo: $\left\{ t = t_2 - t_1,\ \vec{v} = (v_x, 0, 0),\ x = x_2 - x_1 \right.$

Klasično lahko točko 1 povežemo s točko 2 na mnogo načinov. $\exists$ mnogo poti. Čas gre od t_1 do t_2, ne gre pa nazaj.

Kdaj gre delec po klasični poti? $\Rightarrow \Delta S = 0 \ldots$

Bi videli, da dobimo Newtonovo enačbo, ker ni sile je v konst.

Akcija bo minimalna po tapravi poti.

$\psi = A e^{i\frac{px}{\hbar} - i\frac{E}{\hbar}t}$ → ustrezni ravni val /v praznem prostoru smo/

$p = mv = m\frac{x}{t}$

$E = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{x}{t}\right)^2$

$px - Et = m\frac{x}{t}x - \frac{1}{2}m\left(\frac{x^2}{t^2}\right)t = \frac{1}{2}m\frac{x^2}{t}$

za prost delec je torej: $\psi = A e^{i\frac{S[\vec{r}_c(t)]}{\hbar}}$

$S[\vec{r}_c(t)]$ je klasična akcija. Akcija po klasični poti delca

To je Feynmanu dalo misliti, da sta kvantna in klasična mehanika povezani preko akcije S...

označimo:

$K(2,1)$ → verjetnostna amplituda, da pride delec iz 1 v 2 (od časa t_1 do t_2) v času $t_2 - t_1$

Ne vemo pa kateri poti gre. Pustimo vse možnosti odprte

$$K(2,1) = \sum_{\text{vse poti}} C e^{i\frac{S}{\hbar}[\vec{r}(t)]}$$

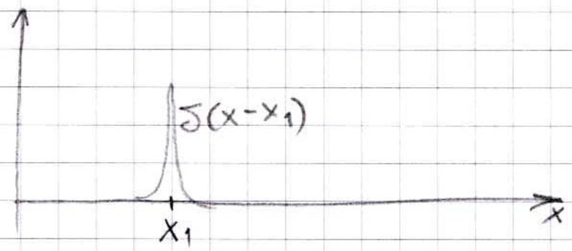
⇒ popotni integral = Feynmanov integral

vse poti = vse krivulje, ki povezujejo 1 in 2

C → konstanta, da je normirano

popotni integral = funkcionalni integral

Feynmanov integral ← nov integral je uvedel

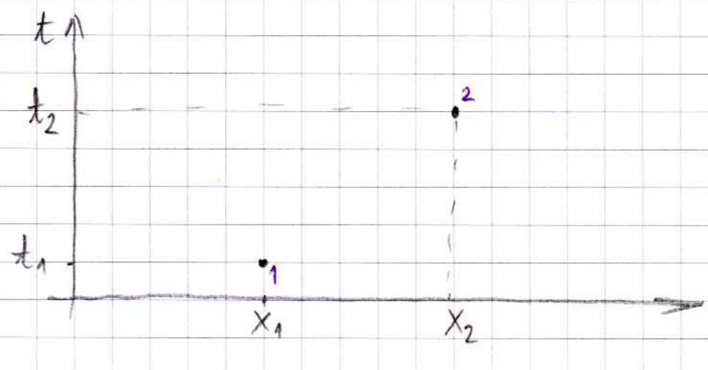


$\hat{x}\delta(x-x_1) = x_1\delta(x-x_1)$

lastna funkcija za operator $\hat{x}$.

jedobra baze

$\psi(x) = \int \psi(x_1)\delta(x-x_1)\,dx_1$



ob t_1 naj bo : $\psi(x,t_1)=\delta(x-x_1)$

↳ to misli Feynman, ko reče, da je ob t_1 delec v x_1

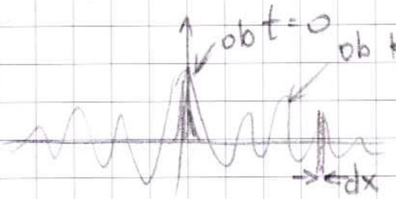
amplitudna verjetnost → $\psi(x_2,t_2)$

verjetnost, da bo ta isti delec od t_2 na x_2 : $\psi(x_2,t_2)=?$

$$\text{po Feynmanu: } \overset{\|}{K(2,1)}$$

$t_1=0$, $x_1=0$

vemo : $\psi(x,0)=\delta(x)$



$$\psi(x,0)=\int\varphi_k e^{ikx}dk$$ → razvijemo po ravnih valovih

$$\psi(x,t)=\int\varphi_k e^{ikx-i\frac{\hbar^2k^2}{2m\hbar}t}dk$$

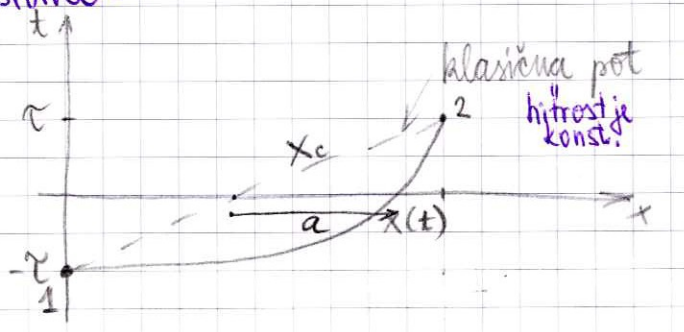
$$\psi(x_2,t_2)=K(2,1)$$

$x=x_2$, $t=t_2$

$$\psi(x,t)=\left(\frac{2\pi i\hbar t}{m}\right)^{-1/2}e^{i\frac{mx^2}{2\hbar t}}$$ ← spet ima vezo z $S[\vec{r}_c(t)]$

$$\| \\ K(2,1)$$

Delec naj ima pravico potovati po kakršni koli poti, vse mu pustimo:



Delec ima dan čas t_2-t_1 v katerem mora priti iz 1 v 2. Energija pa ni treba, da je konst. recimo. Če se bo obiral, bo moral pol pohitet

Klasično bo šel: po premici

$$x(t)=v_0(t+\tau)-\underbrace{\frac{a}{\tau}(t-\tau)(t+\tau)}_{}$$

neko tako dodatno "parabolo" dodamo k klasični poti

a → neka razdalja

torej: $K(2,1) = c\Big[\underbrace{\sum_a \ldots}_{K_a} + \sum_{\text{druge poti}} \ldots\Big]$

$$K_a(2,1) = \int e^{i\frac{S(\tilde{x}(t))}{\hbar}}\, da$$

→ različne poti, odvisno od a

prispevek paraboličnih poti

rekli smo: $x(t) = v_0(t+\tau) - \frac{a}{\tau^2}(t+\tau)(t-\tau)$

$$\dot{x}(t) = v_0 - \frac{2a}{\tau^2}t$$

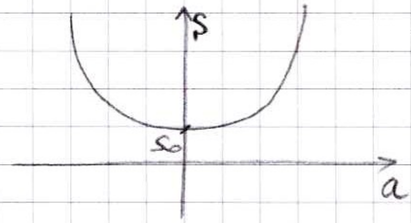
$$L = \frac{1}{2}mv^2(t) = \frac{1}{2}m\left(v_0^2 - \frac{4a}{\tau^2}t + \frac{4a^2}{\tau^4}t^2\right)$$

$$S = S(a) = \int_{-\tau}^{\tau} L\,dt = \ldots = \frac{1}{2}mv_0^2\, 2\tau + \frac{4a^2}{3\tau^4}\, 2\tau^3$$

$S = S[x(t)]$

$$= S_0 + \alpha a^2 \qquad \alpha = \frac{4}{3}\frac{m}{\tau}$$

S_0: klasična akcija



→ S bo min, bo S_0, za $a = 0$.
↓
premica

tu smo le eno družino funkcij zajeli med poti /dodali smo točku 2 a/

Poiskati želimo $K(2,1) = c\sum_{\text{vse poti}} e^{i\frac{S[x(t)]}{\hbar}} =$

$$K_a = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\frac{S_0}{\hbar}} e^{i\frac{\alpha a^2}{\hbar}}\, da$$

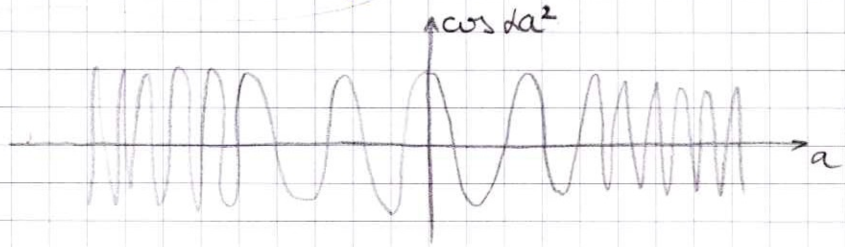
$$\mathrm{Re}\, K_a \propto \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\alpha a^2}{\hbar}\right) da$$ → ta integral konvergira

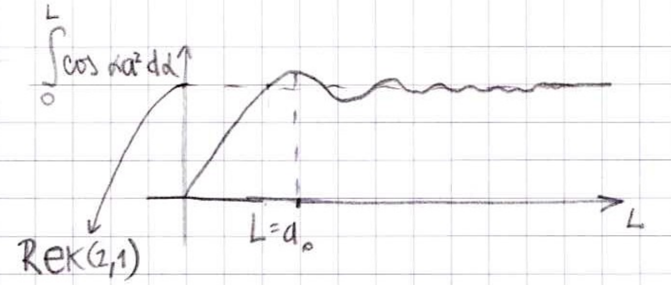
prva ničle:

$$\frac{\alpha a_0^2}{\hbar} = \frac{\pi}{2} = \frac{4}{3}\frac{m}{\tau}a_0^2$$

$$a_0^2 = \frac{\pi}{2}\frac{3}{4}\frac{\tau}{m}\hbar$$

$a^2 = x$
dobiš
$\int \frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$
⋮





$$a_0 \propto \sqrt{\frac{\tau}{m} \hbar}$$

$$\hbar \sim 10^{-34}\ Js$$

Recimo, da je delec zelo težek $\rightarrow m = 1\ kg$. Pa naj pride čez v $1s = \tau$.

Klasično je a_0 zelo majhen. Torej odstopa od premice zelo malo.

v integralu: $\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\frac{\alpha a^2}{\hbar}\right) da$ je praktično enak $\int_0^{a_0} \cos\left(\frac{\alpha a^2}{\hbar} da\right)$ če je delec težek.

To je klasična limita. In $S \sim S_0$.

Če je pa delec izredno lahek. Ali zelo hiter.

$m \propto 10^{-31}\ kg$

In $a_0 \sim 1$. Potem je delec manj omejen, odstopa od klasične poti, od premice.

Kvantna izpiti:
8.6. pisni
15.6. ustni
22.6. pisni
29.6. ustni

FUNKCIONALNI INTEGRAL (Feynmanov integral)

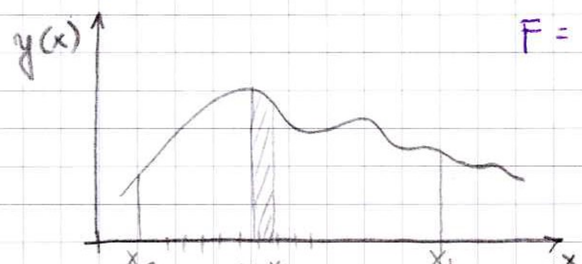
da pride delec iz a v b

$$K(b,a) = C \sum_{\text{vse poti}} e^{i \frac{S}{\hbar}[x(t)]}$$

$x(t)$ je pot

Klasična limita: $\hbar \rightarrow 0$ $\Rightarrow K(b,a) = C \sum e^{i \frac{S_0}{\hbar}} e^{i \frac{\Delta S}{\hbar}}$

Riemmanov integral:



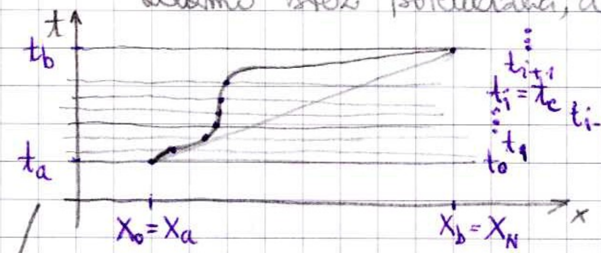
$$F = \sum_{i=0}^{N} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) \rightarrow \sum f(x_i) \underbrace{\Delta x_i}_{\frac{x_b - x_a}{N}}$$

Riemmann $\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \text{oz. } N \rightarrow 0}} F$ gre v integral.

$$= \int_{x_a}^{x_b} f(x) dx$$

Kako pa bi seštevali po funkcijah? To se je pa Feynman spomnil. In to tako, da je potem ven potegnil Schrödingerjevo enačbo.

Delamo brez potenciala, a je isto. V samo v S vtakneš.



Čas razbijemo na intervale, čas diskretiziramo

Definiramo $\varepsilon = \frac{t_B - t_a}{N}$ = časovni korak. Naj bo skos enak.

Prispevek ene poti: $\phi = C e^{i\frac{S}{\hbar}[x(t)]}$

$x(t) = x_0, x_1, \dots, x_N$ zaporedje x-ov ob časih $t_0, t_1 \dots$

$$S[x(t)] = \int_{t_0}^{t_N} L(x(t), \dot{x}(t), t)\,dt$$

med x_i in x_{i+1} aprox pot s premico

$$= \int_{t_0}^{t_N} L(x(t), \dot{x}(t), t)\,dt$$

je premica med x_i in x_{i+1}

Rabimo $K(b,a) = C \sum_{\text{vse poti}} \phi[x(t)]$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_1}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_2}{A} \int \dots \int \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_{i-1}}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_i}{A} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_{i+1}}{A} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx_{N-1}}{A} \cdot e^{i\frac{S[x(t)]}{\hbar}}$$

x_0 ostane enak, x_1 naj bo karkoli, $x_2, x_3 \dots$ so taki kot so bili

A - neka konstanta

Riemannov integral po x_1

$$\boxed{S = \int (T - V)\,dt}$$

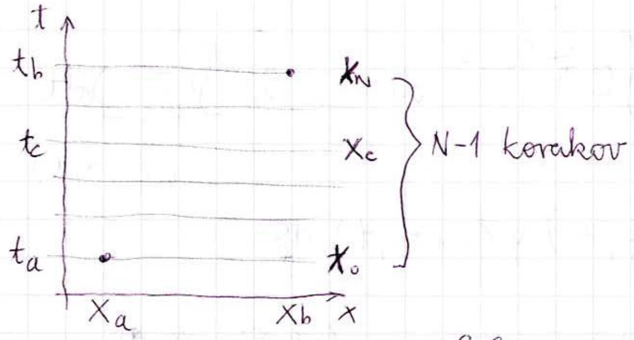
tako se to napiše

Def: $$\boxed{K(b,a) = \int_a^b e^{i\frac{S[x(t)]}{\hbar}} \mathcal{D}x(t)}$$

$$A = \sqrt{\frac{2\pi i \hbar}{m}\varepsilon}$$

"Že sama misel na to, da vemo kje je, je heretična."
Ramšak

Schrödingerjeva enačba



$$S[b,a] = \int_{t_a}^{t_c} L\,dt + \int_{t_c}^{t_B} L\,dt = $$
$$= S[c,a] + S[b,c]$$

$$K(x_b, x_a) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{A} \int_{x_1}\int_{x_2}\dots\int_{x_{c-1}} e^{\frac{i}{\hbar}S[b,a]} \frac{dx_c}{A} \int \dots \int \frac{dx_{N-1}}{A}$$

$$= \int K(b,c)\, K(c,a)\, dx_c$$

klasično: $P(b,a) = \sum_c \underbrace{P(b,c)P(c,a)}$

$P(b,a)$ pri tem, da je šel skozi nek c

↳ Iz tega formalizma hočemo izpeljat Schrödingerjevo enačbo.

valovna funkcija: $\overrightarrow{\quad x \quad x+dx \quad} x$

$\psi(x,t)$ → govori o verjetnosti, da je delec na nekem mestu ob fiksnem nekem času

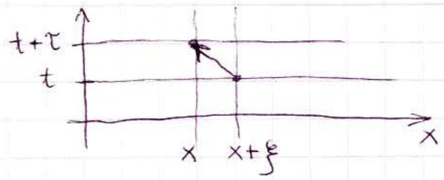
Torej: $$\psi(x_b, t_b) = \int K(x_b, t_b; x_a, t_a)\, \psi(x_a, t_a)\, dx_a$$

ni važno od kje je prišel na ta x_b ob času t_b. Zato čez vse pointegriramo.

→ je Greenova funkcija $t_a < t_b$

če: $t_b = t_a$, je $K = \delta(x - x_a)$

Najti je treba ta K. Im valovna funkcija je tale integral.
→ integralna enačba
Schröd. en. je pa diferencialna.
Pokazati hočemo, da sta enaki, enako pomenita.



$$\psi(x,t) = \int K(x,t;x',t')\,\psi(x',t')\,dx'$$

$$K = \int e^{\frac{i}{\hbar}S[b,a]}\,\mathcal{D}x\,; \quad S = \int \underbrace{(T-V)}_{= L(x,\dot{x},t)}\,dt$$

$$\psi(x,t+\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} K(x,t+\tau;x+\xi,t)\,\psi(x+\xi,t)\,d\xi$$

$$K(x,t+\tau;x+\xi,t) = \int e^{\frac{i}{\hbar}\int_t^{t+\tau} L\,dt'}\,\mathcal{D}x = \int e^{\frac{i}{\hbar}\tau\left(\frac{m}{2}\frac{\xi^2}{\tau^2} - V(x,t)\right)}\,\mathcal{D}x =$$

$$\dot{x} = \frac{\xi}{\tau} \qquad \int_t^{t+\tau} L\,dt \sim L\tau$$

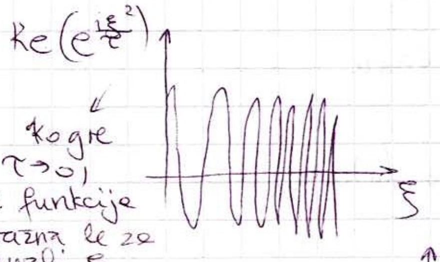
$$= \frac{1}{A}\, e^{\frac{i}{\hbar}\tau\left(m\frac{\xi^2}{2\tau^2} - V\right)}$$

To vstavimo v integralno enačbo

τ je majhen!

$$\psi(x,t) + \tau\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{A}\underbrace{e^{\frac{i}{\hbar}\tau\left(m\frac{\xi^2}{2\tau^2} - V\right)}}_{=\; e^{i\frac{m}{2\hbar}\frac{\xi^2}{\tau}}\;\underbrace{e^{-i\frac{\tau}{\hbar}V}}_{=\;1-\frac{i\tau}{\hbar}V+O(\tau^2)}}\left(\psi(x,t) + \xi\frac{\partial}{\partial x}\psi(x,t) + \frac{1}{2}\xi^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi(x,t)\right)d\xi$$

treba je iti še do višjega reda! ker se bo 1. red zintegriral v ϕ, liha f...



ko gre $\tau \to 0$, je funkcija važna le za mali ξ, večji ne prispeva. Jih τ pobije. Ale:

$$\psi(x,t) + \tau\frac{\partial}{\partial t}\psi(x,t) = \left(1 - \frac{i\tau}{\hbar}V(x,t)\right)\left[I_1\,\psi(x,t) + I_2\,\frac{\partial\psi}{\partial x}(x,t) + I_3\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t)\right]$$

kjer:
$$I_1 = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{im\xi^2}{2\hbar\tau}}\,d\xi = \ldots = \frac{1}{A}\sqrt{\frac{2\pi i\hbar\tau}{m}}$$

$$I_2 = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty} \xi\, e^{\frac{im\xi^2}{2\hbar\tau}}\,d\xi = 0$$

$$I_3 = \frac{1}{A}\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2\, e^{\frac{im\xi^2}{2\hbar\tau}}\,d\xi = \text{bomo kasneje}$$