Lastnosti $\vec{L}$

če imaš simetrijo na vrtenje, lahko najdeš stanja z istimi energijami in drugačnimi vrtilnimi količinami.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = -\vec{p} \times \vec{r}$$

$$L_i = \sum_{jk} \varepsilon_{ijk} r_j p_k$$

- $[L_i, L_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} L_k$ ker $[r_i, p_j] = i\hbar \delta_{ij}$

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z$$
$$[L_z, L_x] = i\hbar L_y$$

$\hbar$ ima enote vrtilne kol. $\rightarrow \hbar = \left[\frac{m^2}{s}\right]$

$\hbar\omega = [J]$

- $[L_i, x_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} x_k$
- $[L_i, p_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} p_k$

splošno: $\hat{A} = (A_x, A_y, A_z)$ $\rightarrow$ je vektor, se transformira kot vektor

operator

Primer: $\hat{x}, \hat{p}, \hat{\vec{L}} \dots$

Potem: $[L_i, A_j] = i\hbar \varepsilon_{ijk} A_k$

? $\rightarrow$ so še male omejitve. Velja zagotovo za $\vec{r}, \vec{p}$ in $\vec{L}$

če: A = skalar

$[L_i, A] = 0$

npr. $A = L^2 = \vec{L} \cdot \vec{L}$ skalar

prihodnjič:

$$L_\pm = L_x \pm i L_y \qquad L_+ = (L_-)^\dagger \quad L_- = (L_+)^\dagger$$

$$L_z \psi_\lambda(\varphi) = \lambda \psi_\lambda(\varphi)$$

$$L_z (L_+ \psi_\lambda) = (\lambda + 1)(L_+ \psi_\lambda)$$

se ne da obeh diagonalizira

$\hookrightarrow$ To pomeni, da ne moremo hkrati dobiti lastne vrednosti L_i in L_j, lahko pa za L_i in L^2....

$$[L_z, L_+] = [L_z, L_x + iL_y] = i\hbar L_y + i(-i\hbar) L_x = \hbar L_+$$

bo podobno kot $[n, a^\dagger]$

$$[L_z, L_-] = -\hbar L_-$$

$$[L_+, L_-] = [L_x + iL_y, L_x - iL_y] = -i(i\hbar)L_z - i(i\hbar)L_z = 2\hbar L_z$$

$$L_+ L_- = (L_x + iL_y)(L_x - iL_y) = L_x^2 + L_y^2 - i\underbrace{(L_x L_y - L_y L_x)}_{[L_x, L_y]} = L_x^2 + L_y^2 + \hbar L_z$$

$L_-L_+ = L_x^2 + L_y^2 - \hbar L_z$

★ $[L^2, L_\pm] = 0$

$L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 = L_+L_- - \hbar L_z + L_z^2 = L_-L_+ + \hbar L_z + L_z^2$

Zdaj pa gremo:

Kakšne so funkcije, kakšne so lastne vrednosti?

$\psi_{l_z}(\vec r)$ naj bo taka, da velja: $L_z\psi_{l_z} = l_z\psi_{l_z}$

pač izberemo si L_z komponento ne L_x al pa L_y ...

Če dva operatorja komutirata, lahko najdeš bazo za oba hkrati. Če pa ne komutirata pa ne moreš.

poglejmo: $L_z(L_+\psi_{l_z}) = L_+L_z\psi_{l_z} + \hbar L_+\psi_{l_z} =$

$[L_z, L_+] = \hbar L_+ = L_zL_+ - L_+L_z$

$= (l_z + \hbar)L_+\psi_{l_z}$ → je lastna funkcija

za $\hbar$ se poveča lastna vrednost

L_+ zvišuje.

pišimo: $l_z = m\hbar$

vemo: $[L^2, L_z] = 0$

torej ψ_{l_z} bo lastna tudi za L^2.

$L^2\psi_{lm} = \lambda\psi_{lm}$ $\underbrace{\langle\vec r|\psi_{lm}\rangle = \psi_{lm}(\vec r)}_{\text{različne pisave iste stvari}} = \langle\vec r|lm\rangle$

ψ_{l_z}...

$\underbrace{\langle lm|L^2|lm\rangle}$ $= \langle lm|\lambda lm\rangle =$

$= \lambda\underbrace{\langle lm|lm\rangle}_{\ge 0}$ → torej $\lambda \ge 0$

hermitski, sebiadjungiran

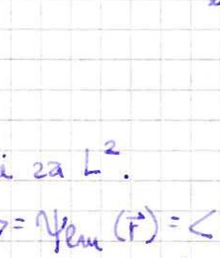
to je poz.

$\langle lm|L^2|lm\rangle = \langle lm|L^+L|lm\rangle =$

$= \langle Llm|Llm\rangle \ge 0$

Zapišimo: $\lambda = \hbar^2 l(l+1)$

za zdaj ne vemo kaj je l.



→ da bo $\lambda \ge 0$ vzamemo le $l > 0$. odložimo se tako. za vsako λ dobim en l. Pozitivno vejo vzamemo

stanje, ki ima za $\hbar$ večjo lastno vrednost kot ψ_{lm}

$L_+|\psi_{lm}\rangle_0$

$L^2 - \hbar L_z - L_z^2$ → To tako izrazimo, ker poznamo lastne vrednosti za L^2 in L_z

$\langle L_+\psi_{lm}|L_+|\psi_{lm}\rangle = \langle\psi_{lm}|L_-L_+|\psi_{lm}\rangle = \langle lm|(L^2 - \hbar L_z - L_z^2)|lm\rangle =$

→ rata $(L_+)^+$

$= \langle lm|(\hbar^2 l(l+1) - \hbar^2 m - \hbar^2 m^2|lm\rangle = \underbrace{\hbar^2[l(l+1) - m(m+1)]}\underbrace{\langle lm|lm\rangle}_{\ge 0} \ge 0$

to mora torej biti poz: za $m \ge 0$ $\underline{m \le l}$!

$$\langle L_-\psi_{lm} | L_-\psi_{lm}\rangle = [\hbar^2\, l(l+1) + \underbrace{\hbar^2 m - \hbar^2 m^2}_{\hbar^2 m(1-m)}] \langle lm | lm\rangle = \hbar^2 [l(l+1) - m(m-1)] \langle lm|lm\rangle$$

za $m \leq 0 \Rightarrow m \geq -l$

meja: $l(l+1) = m(m-1)$
ko $m = -l$
če je m manjši ni kul

Torej: $|m| \leq l$!

$$\lambda \geq \hbar^2 |m|(|m|+1)$$

Vprašamo se: Kaj lahko povemo o stanju ko $l = m$?

vemo: $L_+ |lm\rangle = C|l\, m+1\rangle$
$L_-|lm\rangle = C|l\, m-1\rangle$

to iz tuki potegnemo

$$L_-|ll\rangle = \hbar\sqrt{l(l+1) - m(m-1)}\, |l\, \underbrace{l-1}_{m_1}\rangle = \hbar\sqrt{2l}\, |l\, l-1\rangle$$

$$L_-^2|ll\rangle = D\,|l\, l-2\rangle$$

$\vdots$

$$L_-^k|ll\rangle = ?$$

primer: $L_- \langle 1,1\rangle \propto |1,0\rangle$

$L_-^2|1,1\rangle \propto |1,-1\rangle$

$L_-^3|1,1\rangle \propto |1,-2\rangle$ ← to ne gre! ker prideš do tega, da ko je $m = -l$,

$= 0 \Rightarrow$ to je prav

pride: $L_-|l,-l\rangle = \hbar\sqrt{\underbrace{l(l+1) - l(l+1)}_{\text{0 je nič!}}}\,|l,-l-1\rangle$

$= 0$

dobiš nič!

$$m = \left.\begin{matrix} l \\ l-1 \\ l-2 \\ \vdots \\ -l \end{matrix}\right\} k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \underset{\text{največji k možni}}{l - k} = -l$$

$2l = k \in \mathbb{N}$

Torej: $l = 0, 1, 2 \ldots$
ali
$l = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \ldots$

Naše ugotovitve:

$L_z|lm\rangle = \hbar m|lm\rangle$; $|m| \leq l$ → m-jev je $2l+1$

$L^2|lm\rangle = \hbar^2 l(l+1)|lm\rangle$

kakšne so te funkcije?

$\langle \vec{r}|lm\rangle = ?$

za: $l = 0 \quad m = 0$ ← to je konst. v kotnem delu. Je pa odvisno od radija lahko...

$Y_{lm}(\vec{r}) = \langle \vec{r}|lm\rangle = C = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}$ → to je ena rešitev

$$\int |Y|^2 \underbrace{d(\cos\vartheta)\, d\varphi}_{4\pi} = 1$$

↳ Kako dobiti ostale? Lahko se jih skonstruira. Mi ne bomo izpeljevali →

$\langle \vartheta, \varphi | lm \rangle = Y_{lm}(\vartheta, \varphi)$

$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$

$L_z \psi_{lm}(\vec{r}) = \hbar m \psi_{lm}(\vec{r})$ → ψ je tudi rešitev Schrödingerjeve enačbe: $\hat{H}\psi = E\psi$ → torej je ψ periodična v kotu → $\psi(\varphi) = \psi(\varphi + 2\pi)$

$-i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \psi(\varphi) = \hbar m \psi(\varphi)$

$\psi = C e^{im\varphi} = C e^{im(\varphi + 2\pi)}$

$\Rightarrow e^{im2\pi} = 1$

Pogoj periodičn. ← $\boxed{m \in \mathbb{Z}}$ → sledi, da mora biti tudi $l \in \mathbb{N}$

Primer: $f(\vartheta, \varphi) = \sqrt{\sin \vartheta}\, e^{i\frac{\varphi}{2}}$

$L^2 f = \xi f$ → nima celoštevilčnega m-ja → ta ni enolična rešitev, $m \notin \mathbb{Z}$

To je čudno...

Kaj je pa zdaj s tistimi polovicami na prejšnji strani? ←

→ Tam nismo upoštevali, da so rešitve Schröd. enačbe in nismo imeli pogoje enoličnosti/periodičnosti.

Ko bomo prišli do operatorje spina, ne bomo sploh govorili o krajevnem delu funkcije in ne bo pogoje enoličnosti. Bo le gor ali dol. Tam bo lahko polovično...

Centralni potencial

→ $V(\vec{r}) = V(r)$

Klasično: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\dot{\vec{r}}$

$$\dot{\vec{L}} = \cancel{\dot{\vec{r}} \times m\dot{\vec{r}}} + \vec{r} \times m\ddot{\vec{r}} = \vec{r} \times \underbrace{m\ddot{\vec{r}}}_{\vec{F}} = \vec{r} \times \vec{F}(\vec{r})$$

če je $\vec{F}(\vec{r}) = \vec{F}(r)$

oz. $\vec{F} = -\nabla V(r)$

→ $\dot{\vec{L}} = \vec{r} \times (-\nabla V(r)) = \emptyset$ → Vrtilne količine se ohranja. Lušno.

$[L^2, V(r)] = 0$

$[L^2, H] = 0$

$[L_z, H] = 0$