Bohrov model ni znal razložiti, zakaj elektron ne seva. Tudi mi ne znamo.

$$\hbar\omega_{m,n} = E_m - E_n = E_1\left(-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)$$

Dva sosednja nivoja:

$$-\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{n^2} = \frac{n^2+2n+1-n^2}{(n+1)^2 n^2} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{2}{n^3}$$

$\hbar\cdot\omega = \frac{2E_1}{n^3}$ – energija, ki jo izseva elektron, ko preskoči med visokima sosednjima nivojema.

Ta zadeva ustreza frekvenci kroženja pri Keplerjevem problemu

$\to \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \omega^2 m r$; $\hbar n = \omega\cdot m r^2$ → kvantizacija vrtilne količine – zahteva, da se izide valovna dolžina

Nabit delec v magnetnem polju

$\vec{A}, \phi$

$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}$; $\vec{E} = -\nabla\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t}$

$\vec{F} = m\cdot\vec{a} = e\vec{v}\times\vec{B} + e\vec{E}$

$H = \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - e\vec{A}\right)^2 + e\phi$ – klasično

$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \left[\frac{1}{2m}\left(-i\hbar\nabla - e\vec{A}\right)^2 + e\phi\right]\psi$ – kvantno

$$(\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla)\psi = \nabla\cdot\psi\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla\psi = (\nabla\psi)\cdot\vec{A} + \psi\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}\cdot\nabla\psi = 2\vec{A}\cdot\nabla\psi + \psi\nabla\vec{A}$$

Coulombova umeritev: $\nabla\cdot\vec{A} = 0$ – za nas OK, čeprav ni relativistično invariantna

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = -\frac{\hbar^2\nabla^2}{2m}\psi + \frac{i\hbar e}{m}\vec{A}\cdot\nabla\psi + \frac{e^2}{2m}A^2\psi + e\phi\psi + C\psi\overset{0}{\nabla\cdot\vec{A}}$$

Omejimo se na konstantno magnetno polje.

$\vec{B} = \vec{B}_0 = $ konst.

$\vec{A} = -\frac{1}{2}(\vec{r}\times\vec{B}_0) \Rightarrow \nabla\times\vec{A} = \vec{B}_0$

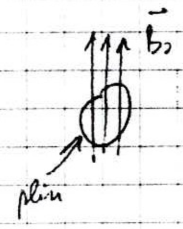
$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{1}{2}\vec{\nabla}\cdot(\vec{r}\times\vec{B}_0) = 0$ $\left(\nabla\cdot(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{v}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{w}) - \vec{w}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{v})\right)$

ta

- $\frac{i\hbar e}{m}\vec A\cdot\nabla\psi = -\frac{1}{2}\frac{i\hbar e}{m}\underbrace{(\vec r\times\vec B_0)\cdot\nabla\psi}_{-(\vec r\times\nabla\psi)\cdot\vec B_0} = \frac{i\hbar e}{2m}(\vec r\times\nabla)\cdot\vec B_0\psi =$

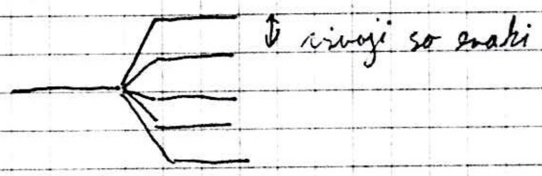
$$= -\underbrace{\frac{e}{2m}\vec L}_{\hat{\vec p}_m}\cdot\vec B_0\psi \qquad \text{ker} \quad H = -\vec p_m\cdot\vec B$$

Dobimo Zeemanov razcep: vsaka energija se razcepi na $2l+1$ nivojev



$$H' = -\frac{e}{2m_e}\underbrace{\vec L\cdot\vec B_0}_{B_0 L_z = B_0\hbar m}\psi_{nlm}$$

$$\Delta E = -\frac{\hbar m e}{2m_e}B_0$$

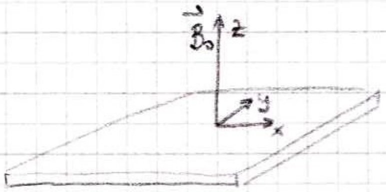


- $\frac{e^2A^2}{2m}\psi$ – pomembno, če je A velik. Navadno imamo opravka z majhnimi in statičnimi polji zato je to zanemarljivo. Če imamo samo magnetno polje (brez električnega), potem ne moremo zanemariti

$\vec\mu = \frac{e}{e_0}\mu_B\vec L$ $\qquad$ μ_B – Bohrov magneton $= \frac{\hbar e_0}{2m} = 9{,}3\cdot 10^{-24}\ m^2A$

Nabit delec v homogenem $\vec{B} = \vec{B}_0$

Landau



$$\vec{B}_0 = \nabla \times \vec{A}$$

$$\vec{A} = -\hat{e}_x B_0 y = (-B_0 y, 0, 0)$$

→ tako umeritev izberemo, ker bo fino za računat. Lahko vzameš kakršno hočeš umeritev, ampak ta je **najbolj** praktična.

Iščemo lastno funkcijo Ψ, stacionarno stanje:

$$\left[\frac{(-i\hbar\nabla - e\vec{A})^2}{2m} + U\right]\Psi = E\Psi$$

$$\frac{1}{2m}\left[\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} + eB_0 y\right)^2 + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 + \left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial z}\right)^2\right]\Psi + U\Psi = E\Psi$$

Omejimo se pri U-ju. Vzamemimo, da je $U(x,y,z)$ le funkcija $U(y)$.

$$\Psi(x,y,z) = e^{ik_z z}\, e^{ik_x x}\, \chi_{k_x}(y)$$

z tako nastopa, da je v z-ju rešitev ravni val

→ funkcija y-a, ki je odvisna od k_x v resnici

→ tudi v x predpostavimo ravne valove.
→ To v bistvu ni rešitev, ampak je nastavek. Bomo nesli v enačbo in videli kaj rata?

$$\frac{1}{2m}\left[(p_x + eB_0 y)^2 + p_y^2 + p_z^2\right] e^{ik_x x} e^{ik_z z} \chi_{k_x}(y) + U\Psi = E\Psi$$

k p_x-u je $e^{ik_x x}$ lastna vrednost. In $(p_x + eBy)^2$ je funkcija operatorja p_x, ki ima $e^{ik_x x}$ za lastno funkcijo. Torej lahko:

→ In $k_x\hbar$ je lastna vrednost

$$\left[\frac{1}{2m}\left[(\hbar k_x + eB_0 y)^2\right] + \frac{p_y^2}{2m} + \underbrace{\frac{(\hbar k_z)^2}{2m}}_{E_z} + U(y)\right]\chi_{k_x}(y) = E\chi_{k_x}(y)$$

dobili smo enodimenzionalno enačbo v y

Je navadna Schrö. enačba v y-u.

→ Je pa odvisna od k_x. zato smo χ-ju indeks k_x dali.

k_z se pa s časom ne spreminja in je v bistvu lahko karkoli.

Postavimo $U(y) \equiv 0$, ker se zdaj ne bomo s tem ukvarjali. Lahko bi vzeli za U harmonski oscilator... probaj

$(\hbar k_x + eB_0 y)^2 = e^2 B_0^2 (y - y_{kx})^2$ da bomo zapisali v znano obliko

Dobimo: $\left[-\frac{\hbar^2 \partial^2}{2m\partial y^2} + \frac{1}{2}k(y-y_{kx})^2 + E_z\right]\chi_{kx}(y) = E\chi_{kx}(y)$

kjer: $\frac{1}{2}k = \frac{1}{2m}e^2B_0^2$

in

$y_{kx} = -\frac{\hbar k_x}{eB_0}$

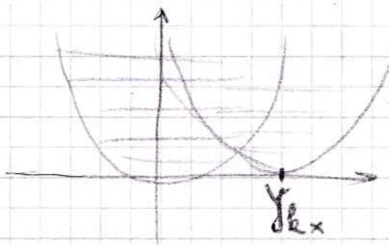
↳ Dobili smo premaknjen harmonski oscilator! To pa vemo kako izgleda.

↳ energijski spekter se ne spremeni čeprav je premaknjen

vpeljemo: $\omega^2 = \frac{k}{m}$

v tem je $\omega_0 = \frac{|eB_0|}{m}$

običajna frekvenca



"Izhodišče nima veze. Je stvar geodetov."

Torej: $E = E_z + \hbar\omega(n+\frac{1}{2}) = E_{n,k_z}$

Landauovi nivoji

Lastne funkcije so:

$\chi_{nk_x}(y) = U_n(y - y_{kx})$

$U_n(y) = H_n(\frac{y}{y_0})e^{-\frac{y/y_0}{2}}$

→ v smeri y je nihanje z ω_0 → je v bistvu ciklotronska frekvenca

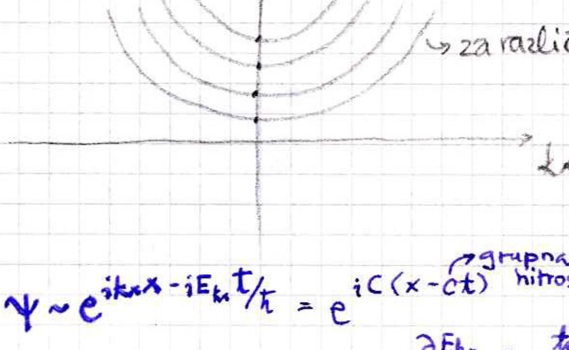
Rešitev je hecna. Ni nobenega kroženja videt.

Skrivnost je v tem, da k_x sploh ne stopi v energijo $E \neq E(k_x)$.

Torej imamo v x smeri ravni val katerega energija ni odvisna od k_x. Kakršen koli je, energija je enaka.

Spomnimo se: za $B_0 = 0$ /prost delec/

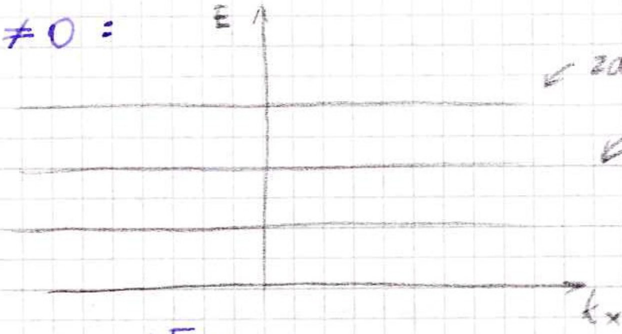
je: $E = E_z + \frac{(\hbar k_y)^2}{2m} + \frac{(\hbar k_x)^2}{2m}$ parabolično v k_x



$\Psi \sim e^{ik_x x - iE_{k_x}t/\hbar} = e^{iC(x-ct)}$ grupna hitrost → s tako hitrostjo se širi paket ← to je odvod parabole

$c = \frac{\partial E_{k_x}}{\partial k_x} = \frac{\hbar^2 k_x}{m}$

če pa $B_0 \neq 0$:



$$\psi = e^{ik_x x - i\frac{E}{\hbar}t}$$

$\frac{\partial E}{\partial k_x} = 0$ → hitrost vala je ∅! Ta val ne gre naprej. Ne potuje.

Mislimo si, da iz teh ravnih valov naredimo paket: $\psi_{paket} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{k_x} e^{ik_x x - i\frac{E}{\hbar}t} dk_x$

ker je E neodvisen od k_x:

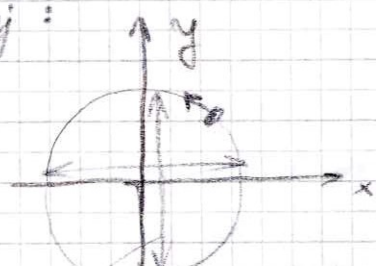
$$\psi_{paket} = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{k_x} e^{ik_x x} dk_x$$

in $|\psi_{paket}|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{k_x} e^{ik_x x} dk_x \right|$ → (to je pri danem k_z in k_y) E ni konst. je odvisen od k_z in k_y

↳ ni več odvisno od časa.

Ti lahko tak paket postaviš tja in se ne premika!

od zgoraj:



v y smeri maš nekimo koherentno stanje in pridno niha

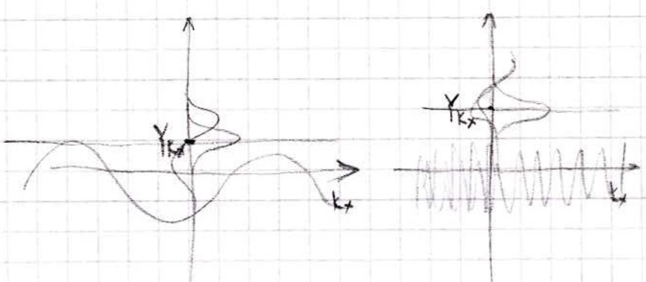
↳ iz teh funkcij, ki se ne spreminjejo s časom lahko tako skombiniramo, da pride nekaj kar niha v x smeri.

→ In dobiš kroženje v xy ravnini.

ampak le za $n \to \infty$

klasična limita

razvijemo po različnih n. lastne f. res miruje, če narediš pa kombinacijo, pa lahko dobiš nihanje.



Razmazanost delca mora bit dovolj majhna v primerjavi z radijem po katerem kroži, da lahko govoriš o klasični limiti.