BELLOVE NEENAČBE

Timon Mede

Mentor: prof. Anton Ramšak

Fakulteta za matematiko in fiziko,

Univerza v Ljubljani

20. februar 2008

UVOD

Verjetno ni fizika, ki se ne bi v zvezi s kvantno mehaniko nikoli spraševal, ali je svet okoli nas resnično tak, kot nam ga slika kvantna teorija, ali pa nam le-ta govori samo o tem, kar lahko izmerimo in torej tudi izvemo o svetu. Če povem nekoliko drugače – je nedoločenost temeljna lastnost same narave in torej sistem v resnici pred meritvijo nima dobro dolčenih vrednosti vseh merljivih količin, ali pa je le posledica naše meritve, ki sistem nujno vedno nekoliko zmoti. V najbolj odmevni obliki je bilo to vprašanje zastavljeno že leta 1935 v znamenitem članku Einsteina, Podolskega in Rosena, ki ga poznamo tudi pod imenom EPR-paradoks. Pot k razrešitvi te uganke, ki je znanstvenike begala naslednjih 30 let, je nakazal John Bell, ki je razpravo pripeljal s področja metafizike nazaj na trdna tla eksperimenta, ki lahko edini razloči in razsodi med obema možnostima. Vendar pa bi želel pri obravnavi te teme nekoliko preseči zgolj tehnični okvir izpeljave in se dotakniti tudi samih filozofskih temeljev kvantne mehanike in njihovega vpliva na naše intuitivne predstave o svetu, ter razlogov za to, da kvantna mehanika kljub vsem svojim uspehom še vedno vzbuja tako močan občutek nerazumljenosti (nerazumljivosti). Za konec bi želel predstaviti še predlog profesorja Antona Zeilingerja, enega vodilnih raziskovalcev na področju kvantnih informacij, za temeljni princip kvantne mehanike, izhajajoč iz Copenhagenske interpretacije. Njegovo prepričanje (kateremu tudi sam pritrjujem) je, da je prav odsotnost takega filozofskega konceptualnega temelja razlog, za tako števičlne in medsebojno nasprotujoče si interpretacije kvantne fizike (v nasprotju s posebno in splošno teorijo relativnosti, kjer ta temelj predstavljata Načeli relativnosti in ekvivalence, ki sta preprosti in intuitivno jasni). Ta vprašanja so bila moja ključna motivacija pri pripravi tega seminarja.

EPR PARADOKS

Dobrih sto let nazaj je Albert Einstein v fiziko vnesel koncept fotona – energijskega kvanta. Tako mu je bilo usojeno, da je postal eden od očetov in obenem največjih nasprotnikov revolucionarne, nove teorije – kvantne mehanike. Le tej je očital predvsem njen verjetnostni značaj. Absurdna se mu je zdela zamisel, da se delec pred meritvijo pravzaprav nahaja povsod in šele sama meritev določi njegov položaj v prostoru. Njegovo znamenito vprašanje zagovornikom kvantne teorije se je glasilo: »Resnično verjamete, da Lune ni tam, ko je ne gledamo?« Tako do svoje smrti ni mogel sprejeti ideje, da je naključnost (randomness) prirojena lastnost narave. Njegovo stališče najjasneje povzema njegova izjava: »Bog ne kocka.« Trdno je verjel, da je naloga fizike opisovati svet, ki je bil že vse od Newtona naprej razumljen kot nekakšen kozmičen urni mehanizem, katerega tek je bil za veke vekomaj določen z začetno nastavitvijo, ne pa zgolj podajati verjetnosti za posamezne dogodke.

Njegov najbolj daljnosežen napad je sledil v članku »Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?« , ki ga je leta 1935 objavil skupaj s sodelavcema Borisom Podolskyim in Nathanom Rosenom v Physical Review. V njem niso pod vprašaj postavljali napovedi kvantne mehanike, ki se v svojem statističnem okvirju odlično ujemajo z eksperimenti, ampak so poskušali pokazati, da kvantna mehanika ne more predstavljati dokončnega opisa sveta.

Po njihovem mora imeti vsaka zadovoljiva fizikalna teorija dve lastnosti:

1. Biti mora **pravilna**, kar pomeni, da se morajo napovedi teorije ujemati z eksperimenti.
2. Biti mora **kompletna** (complete), za kar je nujno, da vsakemu elementu fizikalne resničnosti ustreza element teorije. Element fizikalne resničnosti pripada vsaki fizikalni količini, katere vrednost lahko z gotovostjo napovemo, ne da bi pri tem kakorkoli zmotili sistem.

Heisenbergovo načelo nedoločenosti [1]: $\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{1}{2}\left|\langle [A, B] \rangle\right|$ v kvantni mehaniki nam prepoveduje hkratno poznavanje vrednosti obeh fizikalnih količin, ki pripadata paru komplementarnih (nekomutirajočih: AB≠BA) operatorjev – stanje delca torej ne more biti lastno stanje obeh operatorjev. Iz tega sledi, da bodisi kvantnomehanski opis sveta z valovno funkcijo ni kompleten, bodisi da fizikalne količine, ki pripadajo nekomutirajočim operatorjem nimajo sočasno realnega obstoja.

Zamislili so si sistem dveh delcev, katerima dopustimo, da v nekem časovnem intervalu interagirata, nato pa se interakcija prekine. David Bohm je kasneje to nazorno opisal na razpadu mirujočega nevtralnega piona v par elektron-pozitron, ki zaradi ohranitve gibalne količine odletita v nasprotnih smereh z enako velikostjo hitrosti. Sedaj si predstavljajmo, da po nekem času izmerimo položaj prvega delca. To bi nam v istem trenutku dalo vednost tudi o položaju drugega delca, ne da bi nanj kakorkoli vplivali. Toda analogno si lahko predstavljamo, da bi izmerili gibalno količino prvega delca in na ta način izvedeli tudi za gibalno količino drugega delca. Jedro zamisli se skriva v tem, da čeprav ne moremo hkrati izmeriti obojega za prvi delec, stanje drugega delca zaradi omejenosti hitrosti prenosa informacij s svetlobno hitrostjo, ne more biti odvisno od tega, kaj počnemo s prvim in ker lahko svobodno izberemo ali bomo merili položaj ali moment prvega delca in s tem posredno tudi drugega delca, pomeni, da morata obe količini biti vnaprej določeni, četudi jih ne moremo hkrati dejansko izmeriti[2]. Za obe količini tako lahko rečemo, da sta hkrati elementa fizikalne realnosti, česar pa ne moremo izluščiti iz valovne funkcije, ki torej ne podaja popolnega opisa sveta. Šibkost kvantne mehanike naj bi bila v tem, da ni zmožna natančno napovedati rezultata meritve neke količine z določeno vrednostjo, ampak podaja le verjetnosti za določen izmerek.

Sklep trojice Einstein-Podolsky-Rosen se je glasil, da je kvantna mehanika nepopolna teorija fizikalne realnosti, saj podaja le delni opis vesolja (v nasprotnem primeru bi pomenilo, da se lahko vpliv fizikalnih procesov prenaša hitreje od svetlobne hitrosti). Fundamentalno omejitev kvantnega pojmovanja sveta predstavlja načelo nedoločenosti, zaradi katerega nekaterih elementov fizikalne realnosti (npr. leg in pripadajočih hitrosti, komponent spina v različnih smereh,…) ne zmore opisati. Einstein je bil tako prepričan, da je možno kvantno mehaniko dopolniti z nekimi skrivnimi spremenljivkami, ki določajo stanje delca tudi v delu, ki nam ga sama meritev ne dopušča poznati.

Bohrov odgovor je sledil nekaj mesecev kasneje. V njem je zavrnil njihov kriterij fizikalne realnosti kot dvoumen v delu, da pri meritvi nikakor ne zmotimo sistema. S tem, ko izmerimo eno od količin, se odrečemo poznavanju druge, kar je posledica medsebojno izključujočih se eksperimentalnih metod za določanje ene ali druge komplementarne fizikalne količine. Merilna aparatura je tako neločljiv del kvantnega pojava, zato moramo v naših miselnih poizkusih vedno upoštevati tudi eksperimentalno postavitev. Njegov pogled lahko strnemo v besedah, da je s stališča fizike edina resničnost le tisto, kar lahko merimo, ali kot je dejal Pauli: »Če ne moremo v resnici izmeriti značilnosti, ki jih prepoveduje kvantna nedoločnost, zakaj je sploh pomembno, ali te kljub temu obstajajo v neki skriti globeli resničnosti.« Razprava se je s tem za nekaj desetletij preselila izključno na območje filozofije in metafizike.

BELLOVE NEENAČBE[3]

John Bell se je mnogo kasneje, leta 1964, problema lotil z drugega konca ter pokazal pot, po kateri naj eksperiment odloči med kvantno mehaniko in teorijami skritih spremenljivk. Privzel je, da je svet klasičen in odtod izpeljal svojo znamenito neenakost.

Pojem klasičnega sveta vsebuje dva pomembna koncepta: **realizem** in **determinizem.**

Realizem pomeni, da je vsaka merljiva količina ves čas dobro določena, tudi če je ne merimo v praksi,

Determinizem pa, da je izid vsake meritve natančno določen le s stanjem sistema in postavitvijo merilne opreme.

Predpostavimo še da velja **lokalnost interakcij** oziroma **kavzalnost**, kar pomeni, da ne dopuščamo interakcij, ki bi potovale hitreje kot s svetlobno hitrostjo. To je povezano z našim pojmovanjem prostora kot medija, ki ločuje in oddeljuje eno telo od drugega, torej se vpliv med njima lahko prenese le s pomočjo nekega posrednika, ki premaga razdaljo med njima (npr. elektro-magnetni val, gravitacijska motnja, …)

Potemtakem sledi, da je rezultat katerekoli meritve natanko določen za vsak nabor začetnih pogojev, ne glede na to, ali ga znamo tudi v resnici napovedati. Vzemimo primer delca s spinom 0 (npr. nevtralni pion), ki razpade v dva delca (v našem primeru elektron in pozitron) z velikostjo spina ½, ki odletita v nasprotnih smereh in z nasprotnima komponentama spina v poljubni izbrani smeri. Spin vsakega od obeh delcev je opisan s končnim nizom spremenljivk za katere ni nujno, da jih poznamo ali da smo jih sposobni meriti.

$$\text{spin delca } A = F_A(x_1^A,\ x_2^A, \ldots, x_N^A)$$

$$\text{spin delca } B = F_B(x_1^B,\ x_2^B, \ldots, x_M^B)$$

Sam mehanizem razpada nevtralnega piona ni nujno poznan. Zato ne vemo, kakšne vrednosti vsakokrat zavzamejo spremenljivke $x_1^A,\ x_2^A, \ldots, x_N^A, x_1^B, x_2^B, \ldots, x_M^B$. Navajamo zgolj verjetnosti, da se pojavi izbrana kombinacija le-teh in tako stanje nastalih elektrona in pozitrona običajno opišemo s skupno verjetnostno funkcijo $\rho(x_1^A \ldots, x_2^B, \ldots)$.

Sedaj predpostavimo, da delca po razpadu ne vplivata več drug na drugega (kavzalnost). Njun spin pomerimo z Stern-Gerlachovim aparatom. Meritev da za rezultat vrednost 1 ali -1 (izražen v enotah $\hbar/2$). Označimo rezultat meritve za prvi delec z *a*, za drugi delec pa z *b*. Izida *a* in *b* sta določena s stanjem sistema in orientacijo merilnega aparata:

$a = a(\theta_A) = f(\theta_A, x_1^A, x_2^A, \ldots) = \pm 1$

$b = b(\theta_B) = f(\theta_B, x_1^B, x_2^B, \ldots) = \pm 1$

Če Stern-Gerlachova aparata zasukamo v drugi smeri, se nam rezultat spremeni:

$a' = a(\theta'_A) = f(\theta'_A, x_1^A, x_2^A, \ldots) = \pm 1$

$b' = b(\theta'_B) = f(\theta'_B, x_1^B, x_2^B, \ldots) = \pm 1$

Sledi:

$ab + ab' + a'b - a'b' =$

$= a(b+b') + a'(b-b') = \pm 2$, saj je eden izmed členov *(b+b')* in *(b-b')* vselej enak *0*, in drugi bodisi *+2* bodisi *-2.*

Dobimo:

$a(\theta_A)b(\theta_B) + a(\theta_A)b(\theta'_B) + a(\theta'_A)b(\theta_B) - a(\theta'_A)b(\theta'_B) = \pm 2$

V tej enačbi so zajeti tako realizem kot determinizem in kavzalnost. Realizem se zrcali v predpostavki, da imata tako $a(\theta_A)$ kot $a(\theta_A')$ definirani vrednosti, čeprav jih v praksi ne moremo obeh meriti. Same vrednosti meritev spina *a* in *b* pa sta določeni deterministično s funkcijo *f*. Kavzalnost pa se kaže v predpostavki, da je *a* odvisen le od θ_A na pa tudi od θ_B. Ta eksperiment lahko mnogokrat ponovimo in nato izračunamo povprečno vrednost zgornjega izraza, kar ustreza povprečenju po vseh možnih razpadih nevtralnega piona:

$< a(\theta_A)b(\theta_B) + a(\theta_A)b(\theta'_B) + a(\theta'_A)b(\theta_B) - a(\theta'_A)b(\theta'_B) >=$

$= \int(a(\theta_A)b(\theta_B) + a(\theta_A)b(\theta'_B) + a(\theta'_A)b(\theta_B) - a(\theta'_A)b(\theta'_B))\, \rho(x_1^A \ldots, x_2^B, \ldots) d\, x_1^A \ldots, dx_2^B, \ldots$

Ker pri katerikoli vrednosti neodvisnih spremenljivk x_1^A, x_2^A, …, x_N^A, x_1^B, x_2^B, …, x_M^B izraz pod integralom daje vrednost +2 ali -2, sledi naslednja neenakost:

$$\left| < a(\theta_A)b(\theta_B)> + < a(\theta_A)b(\theta'_B)> + < a(\theta'_A)b(\theta_B)> - < a(\theta'_A)b(\theta'_B)> \right| \leq 2$$

To je Bellova neenakost, katero smo izpeljali v obliki CHSH[4] (Clauser-Horne-Shimony-Holt), ki je bolj praktično uporabna v eksperimentalne namene.

Sedaj pa poglejmo, kaj nam v resnici govori ta enačba.

V ta namen se spomnimo, kaj točno kvantnomehansko pomeni izraz $< a(\theta_A)b(\theta_B)>$. To je ravno pričakovana vrednost produkta projekcij spina na osi, v ravnini x-z zasukani za kota θ_A in θ_B glede na os-z.

$$< a(\theta_A)b(\theta_B)> = < \Psi \,|\, (\vec{n}(\theta_A)\cdot\vec{\sigma}_A)\otimes(\vec{n}(\theta_B)\cdot\vec{\sigma}_B) \,|\Psi >$$

kjer sta vektorja $\vec{n}(\theta_A) = (\sin\theta_A, 0, \cos\theta_A)$ in $\vec{n}(\theta_B) = (\sin\theta_B, 0, \cos\theta_B)$ enotska vektorja v smeri izbranih osi, in $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ vektor Paulijevih matrik, ki predstavlja operator spina za ustrezen delec v enotah $\hbar/2$.

$|\Psi>$ je skupna valovna funkcija elektrona in pozitrona, ki se po predpostavki nahajata v singletnem stanju, torej :

$$|\Psi\rangle = |S=0, M=0\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle\right)$$

pri čemer sta stanji $|\uparrow\rangle = |\chi_+\rangle = (1,0)$ in $|\downarrow\rangle = |\chi_-\rangle = (0,1)$ lastni stanji operatorja spina v smeri osi-z z lastnima vrednostima +1 in -1. Za izračun zgornje pričakovane vrednosti, moramo najprej razviti stanje $|\Psi>$ po lastnih funkcijah operatorja $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$, torej po vektorjih $|\chi_+'\rangle = (\cos\tfrac{\theta}{2}, \sin\tfrac{\theta}{2})$ in $|\chi_-'\rangle = (-\sin\tfrac{\theta}{2}, \cos\tfrac{\theta}{2})$ z lastnima vrednostima +1 in -1.[5]

$$|\Psi\rangle = c_+|\chi_+\rangle + c_-|\chi_-\rangle = d_+|\chi_+'\rangle + d_-|\chi_-'\rangle \,,$$

torej $(c_+, c_-) = (d_+\cdot\cos\tfrac{\theta}{2} - d_-\cdot\sin\tfrac{\theta}{2}, d_+\cdot\sin\tfrac{\theta}{2} + d_-\cdot\cos\tfrac{\theta}{2})$

od koder sledi, da se koeficienta d_+ in d_- izražata s koeficienti c_+ in c_- kot:

$$d_+ = c_+\cdot\cos\tfrac{\theta}{2} + c_-\cdot\sin\tfrac{\theta}{2}$$

$$d_- = -c_+\cdot\sin\tfrac{\theta}{2} + c_-\cdot\cos\tfrac{\theta}{2}$$

Stanje $|\Psi>$ se tako v novi bazi izraža:

$$|\Psi\rangle = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{\theta_A}{2}\cdot|\chi_+^A\rangle - \sin\frac{\theta_A}{2}\cdot|\chi_-^A\rangle)\cdot(\sin\frac{\theta_B}{2}\cdot|\chi_+^B\rangle + \cos\frac{\theta_B}{2}\cdot|\chi_-^B\rangle) - \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}(\sin\frac{\theta_A}{2}\cdot|\chi_+^A\rangle + \cos\frac{\theta_A}{2}\cdot|\chi_-^A\rangle)\cdot(\cos\frac{\theta_B}{2}\cdot|\chi_+^B\rangle - \sin\frac{\theta_B}{2}\cdot|\chi_-^B\rangle) \end{bmatrix}$$

Spomnimo se še, kaj naredi operator $\vec{n}\cdot\vec{\sigma}$ na stanjih $|\chi_+>$ in $|\chi_->$: $(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})|\chi_\pm\rangle = \pm|\chi_\pm\rangle$ in dobimo:

$$\langle a(\theta_A)\cdot b(\theta_B)\rangle =$$

$$= \langle\Psi|(\vec{n}(\theta_A)\cdot\vec{\sigma}_A)(\vec{n}(\theta_B)\cdot\vec{\sigma}_B)|\Psi\rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_A\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_B - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}_A\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}_B\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\begin{bmatrix}\cos\theta_A\\ \sin\theta_A\end{bmatrix}_A\begin{bmatrix}\sin\theta_B\\ -\cos\theta_B\end{bmatrix}_B - \begin{bmatrix}\sin\theta_A\\ -\cos\theta_A\end{bmatrix}_A\begin{bmatrix}\cos\theta_B\\ \sin\theta_B\end{bmatrix}_B\right) =$$

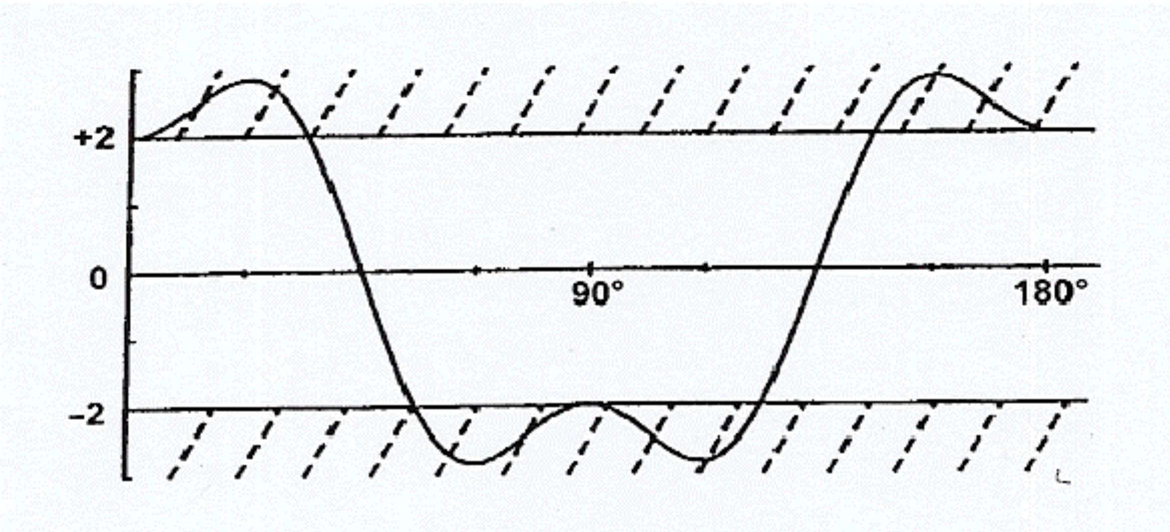
$$= \tfrac{1}{2}(-2\cdot\cos\theta_A\cdot\cos\theta_B - 2\cdot\sin\theta_A\cdot\sin\theta_B) =$$

$$= -(\cos\theta_A\cdot\cos\theta_B + \sin\theta_A\cdot\sin\theta_B) =$$

To ustreza ravno kosinusu razlike kotov, torej

$< a(\theta_A)b(\theta_B)> = -\cos(\theta_A - \theta_B)$

Ko to upoštevamo v Bellovi neenačbi, ugotovimo, da za določene postavitve Stern-Gerlachovih aparatov (za določene kote zasukov ϑ_A, ϑ_B, ϑ'_A, ϑ'_B) le-ta ni več izpolnjena. Spodnja slika prikazuje vrednost izraza $<a(\theta_A)b(\theta_B) + a(\theta_A)b(\theta'_B) + a(\theta'_A)b(\theta_B) - a(\theta'_A)b(\theta'_B)>$ za po kotu ekvidistantne razmike med merilnimi aparaturami, torej za primer, ko je $\varphi = \theta_B - \theta_A = \theta'_A - \theta_B = \theta'_B - \theta'_A$ in $\theta'_B - \theta_A = -\varphi$. V tem primeru se izraz poenostavi v $\cos 3\varphi - 3\cos\varphi$.



Če pa vzamemo razmike $\varphi = \theta_B - \theta_A = \theta'_A - \theta_B = \theta'_B - \theta'_A$ in $\theta'_B - \theta_A = 3\varphi$, se izraz prepiše v $-\cos 3\varphi - 2\cos\varphi + \cos 2\varphi$.

Če to drži, če narava res krši Bellovo neenakost, potem svet ni klasičen, kot je Einstein veroval, niti ne velja lokalnost interakcij. Delca v prepletenem stanju potemtakem res ohranjata povezavo tudi na velike razdalje

Zaključek, ki ga razkrijejo eksperimenti[6] je, da so lokalno realistične teorije, ki pripisujejo objektom stanja, ki določajo vrednosti merljivih količin in ki postulirajo, da efekti lokalne akcije (na primer samo merjenje) ne morejo potovati hitreje kot svetloba, napačne. Potrjena je kvantnomehanska slika resničnosti.[7]

Bell-ov teorem: »Nobena fizikalna teorija lokalnih skritih spremenljivk ne more proizvesti vseh napovedi kvantne mehanike.«

Odločilno za uspeh Bellovega premisleka je morda nekoliko nenavadno dejstvo, da bi že sam obstoj skritih spremenljivk, čeprav za nas nedoločljivih in nemerljivih, pustil sled v strukturi realnosti, katere obstoj lahko eksperimentalno preverjamo.

V ozadju kršitve Bellove neenakosti se skriva kvantna prepletenost, ki je le ena izmed elementov kvantne fizike, ki nima ustrezne predstave v klasični fiziki. Skupaj z komplementarnostjo in kolapsom valovne funkcije predstavlja največji izziv za vsako interpretacijo kvantne mehanike, ki si prizadeva podati zadovoljivo sliko teh neklasičnih elementov.

TEMELJNI PRINCIPI KVANTNE MEHANIKE

Soobstoj množice povsem različnih interpretacij kvantne mehanike[8] nosi pomembno sporočilo o tem, da splošno sprejeti konceptualni temelji teorije še vedno niso bili odkriti. Pri tem ne gre za odsotnost aksiomatizirane formalizacije matematičnih temeljev, ki povezujejo teorijo z eksperimenti. Ti so bili do sedaj v vseh ozirih potrjeni. Gre za odsotnost interpretacije na meta-nivoju, ki ustreza odgovoru na vprašanje, kaj teorija pomeni za naš pogled na svet. Spodaj je opisan eden možnih predlogov za tak fundamentalni princip, Princip kvantizacije informacij prof. Antona Zeilingerja.

Fizikalni opis sveta lahko razčlenimo v trditve, katere lahko eksperimenti le potrdijo ali ovržejo. Najbolj elementarni sistem tako predstavlja odgovor na eno samo trditev, torej nosi 1 bit informacije. Informacija o kateremkoli sistemu je torej vedno kvantizirana. Dvonivojski sistem, na primer polovični spin, predstavlja tak elementarni sistem. Spin gor v smeri osi-z tako nosi odgovor le na vprašanje meritve spina vzdolž osi-z. Meritev okoli katerekoli druge izbrane smeri mora tako nujno vsebovati element naključnosti, katere stopnja zavisi od korelacije med predhodno meritvijo, ki nam daje informacijo o stanju sistema in pa bodočim merjenjem. Korelacija je seveda odvisna le od kota med obema postavitvama merilne naprave. Te naključnosti v kvantnem merjenju ne moremo več zreducirati, saj je posledica tega, da elementarni sistem ne more vsebovati dovolj informacije, da bi dal natančne odgovore na vsa možna vprašanja, katera lahko zastavimo eksperimentalno. Po vsaki meritvi najdemo sistem v novem končnem stanju – v procesu meritve je bila spontano ustvarjena nova informacija, ki ni določena s poprejšnjo. Tak pogled predstavlja razširitev Copenhagenske interpretacije, ki pravi da se točno poznavanje komplementarnih količin medsebojno izključuje. Na zgornjem primeru polovičnega spina to pomeni, da je verjetnost za določen izmerek v smeri ortogonalni na lastno stanje spina, ravno 50%, torej je rezultat meritve povsem nedoločen. Razlog je ponovno v tem, da lahko elementarni sistem nosi le 1 bit informacije in torej ne vsebuje nikakršne vednosti o meritvi komplementarne količine.

Naslednja temeljna lastnost kvantne mehanike je prepletenost. Gledano matematično so prepletena stanja taka stanja $|\Psi_{AB}\rangle$ iz skupnega Hilbertovega prostora H_{AB} (ki je tenzorski produkt prostorov H_A in H_B), katerih ne moremo izraziti kot tenzorski produkt stanj $|\Psi_A\rangle \in H_A$ in $|\Psi_B\rangle \in H_B$. Za primer si poglejmo dva dvodimenzionalna sistema, na primer delca s spinom ½ , z ortonormiranima bazama $\{|\uparrow\rangle_1, |\downarrow\rangle_1\}$ in $\{|\uparrow\rangle_2, |\downarrow\rangle_2\}$. Skupni prostor H_{AB} razpenjajo stanja $|\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2$, $|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2$, $|\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2$ in $|\downarrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2$.

Faktorizabilna (neprepletena) stanja so oblike $|\Psi_{AB}^{non}\rangle = \left(C_\uparrow^1|\uparrow\rangle_1 + C_\downarrow^1|\downarrow\rangle_1\right) \otimes \left(C_\uparrow^2|\uparrow\rangle_2 + C_\downarrow^2|\downarrow\rangle_2\right) =$

$$= (C_\uparrow^1 C_\uparrow^2)|\uparrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 + (C_\uparrow^1 C_\downarrow^2)|\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2 + (C_\downarrow^1 C_\uparrow^2)|\downarrow\rangle_1 \otimes |\uparrow\rangle_2 + (C_\downarrow^1 C_\downarrow^2)|\downarrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2$$

$= (C_{\uparrow}^{1}C_{\uparrow}^{2})\left|\uparrow\uparrow\right\rangle + (C_{\uparrow}^{1}C_{\downarrow}^{2})\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + (C_{\downarrow}^{1}C_{\uparrow}^{2})\left|\downarrow\uparrow\right\rangle + (C_{\downarrow}^{1}C_{\downarrow}^{2})\left|\downarrow\downarrow\right\rangle$, torej sta stanji

$\left|S=1, M=0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle + \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right)$ in $\left|S=0, M=0\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|\uparrow\downarrow\right\rangle - \left|\downarrow\uparrow\right\rangle\right)$ prepleteni.[9] Če ne bi bili, bi za njiju moralo veljati:

$$C_{\uparrow}^{1}C_{\uparrow}^{2} = 0$$

$$C_{\downarrow}^{1}C_{\downarrow}^{2} = 0$$

$$C_{\uparrow}^{1}C_{\downarrow}^{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$C_{\downarrow}^{1}C_{\uparrow}^{2} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$, kar pa očitno ne more biti izpolnjeno, saj iz drugih dveh pogojev v nasprotju s prvima dvema sledi, da so vsi koeficienti različni od 0.

Za prepletena stanja velja, da ni mogoče pripisati čistega kvantnega stanja kateremukoli od njegovih delcev.

Kvantna mehanika dopušča prepletena stanja, v katerih se vez med telesi ohranja kljub razdalji in prostor ne zagotavlja ločenosti med njimi. Prepletena delca sta tako (čeprav prostorsko ločena) dela ene same fizikalne entitete, zato kakršnakoli meritev vpliva na oba delca hkrati. Toda izkaže se, da to ne nasprotuje posebni teoriji relativnosti, saj je svetlobna hitrost zgornja meja le za prenos informacij, katere pa prenaša le snov in energija. Prepletenih stanj namreč ne moremo izkoristiti za komunikacijo na razdaljo, saj nimamo nikakršnega vpliva na dogodek, ki se zgodi tu (npr. na meritev vrednosti spina v izbrani smeri) in je kvantne narave, torej v osnovi naključen. Zato torej tudi ne moremo nadzorovano ustvariti sporočila, katerega bi želeli poslati prejemniku na drugem koncu prepletenega stanja. To spoznanje v kvantni informacijski tehnologiji zajamemo v t.i. »no-communication teoremu«, ki prepoveduje izkoriščanje kršitve Bellove neenakosti za izmenjavo informacij hitreje od hitrosti svetlobe. Tako se učinek prepletenosti kaže izključno kot nelokalna korelacija med dvema dogodkoma, na primer med dvema meritvama. Vseeno so prepletena stanja v zadnjem času izjemno pomembna na nekaterih revolucionarno novih tehnoloških področjih, npr. v kvantni kriptografiji, kvantnem računalništvu, kvantni teleportaciji,…

Opis prepletenega stanja sledi tudi iz zgoraj pojasnjenega principa kvantizacije informacij. Bistvo ideje se skriva v tem, da predpostavimo, da se količina informacije med interakcijo delcev ohranja, če ni izmenjave informacij z okoljem, nič pa ji ne preprečuje, da se ne bi prerazporedila med delci, v skrajnem primeru tako, da noben delec ne nosi več informacije sam zase, ampak vedno le v povezavi z drugimi delci – taka stanja imenujemo prepletena. Oglejmo si to ponovno na našem primeru dveh delcev s spinom ½: tak sistem nosi 2 bita informacije, ki v najpreprostejšem primeru odgovarjata na vprašanji o spinu vsakega posameznega delca v smeri osi-z. Tedaj dobimo 4 možne odgovore oblike (da-da, da-ne, ne-da, ne-ne) na trditvi: spin prvega delca v smeri osi-z kaže gor ter spin drugega delca v smeri osi-z kaže navzgor, ki ustrezajo valovnim funkcijam:

$$\left|\Psi\right\rangle_1 = \left|+z\right\rangle_1 \left|+z\right\rangle_2,$$

$$\left|\Psi\right\rangle_2 = \left|+z\right\rangle_1 \left|-z\right\rangle_2,$$

$$\left|\Psi\right\rangle_3 = \left|-z\right\rangle_1 \left|+z\right\rangle_2 \text{ in}$$

$$\left|\Psi\right\rangle_4 = \left|-z\right\rangle_1 \left|-z\right\rangle_2.$$

V tem primeru vsak spin zase nosi 1 bit informacije. Namesto teh dveh trditev pa lahko sistem popolnoma opišemo tudi z dvema drugačnima trditvama, ki se nanašata zgolj na lastnosti obeh delcev kot enega samega sistema, na primer: skupni spin delcev v smeri osi-z je različen od nič in skupni spin delcev v smeri osi-x je različen od nič. Iz prve trditve sledi, da je sistem bodisi v stanju $\left|+z\right\rangle_1 \left|+z\right\rangle_2$ bodisi v stanju $\left|-z\right\rangle_1 \left|-z\right\rangle_2$ in sicer v kateremkoli od obeh z enako verjetnostjo, saj iz druge trditve ne moremo sklepati nič določenega o vrednosti izmerka v smeri z-osi. Torej lahko zapišemo valovno funkcijo sistema ob upoštevanju ortogonalnosti obeh stanj in normalizacije kot:

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+z\right\rangle_1 \left|+z\right\rangle_2 + \left|-z\right\rangle_1 \left|-z\right\rangle_2\right) \text{ ali } \left|\Phi^-\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+z\right\rangle_1 \left|+z\right\rangle_2 - \left|-z\right\rangle_1 \left|-z\right\rangle_2\right)$$

Obe funkciji se razlikujeta le za fazni faktor.

Iz druge trditve pa sledi podobno za spin v smeri osi-x: valovno funkcijo sistema lahko zapišemo kot

$$\left|\chi^+\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+x\right\rangle_1 \left|+x\right\rangle_2 + \left|-x\right\rangle_1 \left|-x\right\rangle_2\right) \text{ ali } \left|\chi^-\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+x\right\rangle_1 \left|+x\right\rangle_2 - \left|-x\right\rangle_1 \left|-x\right\rangle_2\right)$$

Od prej se spomnimo, kako se transformira valovna funkcija pri zasuku za nek kot θ:

$$|+z\rangle_{1,2} = \cos\tfrac{\theta}{2}\,|+\theta\rangle_{1,2} - \sin\tfrac{\theta}{2}\,|-\theta\rangle_{1,2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|+x\rangle_{1,2} - |-x\rangle_{1,2}\right)$$

$$|-z\rangle_{1,2} = \sin\tfrac{\theta}{2}\,|+\theta\rangle_{1,2} + \cos\tfrac{\theta}{2}\,|-\theta\rangle_{1,2} = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|+x\rangle_{1,2} + |-x\rangle_{1,2}\right)$$

Od tod sledi, da

$$\left|\Phi^+\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+z\right\rangle_1 \left|+z\right\rangle_2 + \left|-z\right\rangle_1 \left|-z\right\rangle_2\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|+x\rangle_1\,|+x\rangle_2 + |-x\rangle_1\,|-x\rangle_2\right)$$

Torej ustreza trditvi, da je spin tako v smeri osi-z kot osi-x različen od 0

$$\left|\Phi^-\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+z\right\rangle_1 \left|+z\right\rangle_2 - \left|-z\right\rangle_1 \left|-z\right\rangle_2\right) = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(|+x\rangle_1\,|-x\rangle_2 + |-x\rangle_1\,|+x\rangle_2\right)$$

Ta valovna funkcija pa ustreza trditvama, da spin v smeri osi-z je različen od 0, v smeri osi-x pa ni. Torej fazni faktor določa odgovor na drugo trditev, glede skupnega spina v smeri osi-x, izbor kombinacije lastnih vektorjev spina v smeri osi-z za posamezen delec - torej člena v valovni funkciji zapisani v bazi z-ja pa določata odgovor na prvo trditev.

Taka stanja so potem maksimalno prepletena, saj je vsa informacija podana v obliki skupnih značilnosti in ne vsebujejo nikakršne informacije o posameznih delcih. Tudi načelno ne obstaja več nikakršna možnost, da bi iz danega stanja sistema uspeli razbrati vrednost posameznega spina. Štirje možni odgovori na zgornji trditvi tako ustrezajo valovnim funkcijam – t.i. Bellovim stanjem:

$$\left|\Phi^{+}\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+z\right\rangle_1\left|+z\right\rangle_2 + \left|-z\right\rangle_1\left|-z\right\rangle_2\right),$$

$$\left|\Phi^{-}\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+z\right\rangle_1\left|+z\right\rangle_2 - \left|-z\right\rangle_1\left|-z\right\rangle_2\right),$$

$$\left|\Psi^{+}\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+z\right\rangle_1\left|-z\right\rangle_2 + \left|-z\right\rangle_1\left|+z\right\rangle_2\right)$$

$$\left|\Psi^{-}\right\rangle = \tfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|+z\right\rangle_1\left|-z\right\rangle_2 - \left|-z\right\rangle_1\left|+z\right\rangle_2\right)$$

Ta način nudi tudi naravno podporo kvantni teleportaciji – predstavljajmo si zopet nevtralni pion, ki razpade v par elektron-pozitron. Zaradi ohranitvenih zakonov imata delca nasproten spin za poljubno izbrano smer, torej ju opišemo s skupno valovno funkcijo $\left|\Psi^{-}\right\rangle$, ki ustreza trditvama, da je skupni spin v smereh osi-x in z enak 0. Ko sedaj pomerimo spin prvega delca, je vse kar se spremeni, le nabor trditev, ki opisujejo sistem, ne da bi posledično z našo meritvijo prenesli kakršnokoli informacijo na drugi delec. Stanje sistema opisujemo z valovno funkcijo:

$\left|\psi^{+}\right\rangle = \left|+z\right\rangle_1 \left|+z\right\rangle_2 = \tfrac{1}{2}\left(\left|+x\right\rangle_1 \left|+x\right\rangle_2 + \left|-x\right\rangle_1 \left|-x\right\rangle_2 - \left|+x\right\rangle_1 \left|-x\right\rangle_2 - \left|-x\right\rangle_1 \left|+x\right\rangle_2\right)$, če smo izmerili spin prvega delca v smeri +z oziroma

$\left|\psi^{-}\right\rangle = \left|-z\right\rangle_1 \left|-z\right\rangle_2 = \tfrac{1}{2}\left(\left|+x\right\rangle_1 \left|+x\right\rangle_2 + \left|-x\right\rangle_1 \left|-x\right\rangle_2 + \left|+x\right\rangle_1 \left|-x\right\rangle_2 + \left|-x\right\rangle_1 \left|+x\right\rangle_2\right)$, če smo izmerili spin prvega delca v smeri – z.

Vidimo, da se novi dve trditvi, ki izčrpata vso informacijo, ki jo vsebuje sistem, glasita: Skupni spin v smeri osi-z je različen od 0 in spin prvega delca v smeri osi-z kaže gor/dol. Prav tako lahko delamo tudi z ekvivalentnima trditvama: Spin prvega delca v smeri osi-z kaže gor/dol in spin drugega delca v smeri osi-z kaže gor/dol. Na račun meritve pa odpade trditev o spinu v smeri osi-x. Le-ta je sedaj popolnoma nedoločen, kar sledi tudi iz zgornjih valovnih funkcij, v katerih enakovredno nastopajo vse možne kombinacije obeh spinov.

Lepota tega pristopa je v tem, da tako prepletena stanja, kot tudi nelokalnost sledita iz osnovnega preprostega principa o kvantizaciji informacije. V njegovem osrčju se skrivata dve najpomembnejši in obenem sporni lastnosti kvantne mehanike – naključnost posameznega dogodka in prepletenost. Sam kvant pa postane posledica tega, kar lahko povemo o svetu. Če torej zaključim z mislijo še enega od očetov kvantne mehanike, Nielsa Bohra: »Narobe je misliti, da je naloga fizike ugotoviti, kakšna je Narava v resnici. Fizika se ukvarja le s tem, kar lahko rečemo o naravi. « V predstavljenem pogledu na kvantno teorijo sta v tem vidiku izenačena pojma realnosti in informacije.

OPOMBE:

[1]nedoločenost vrednosti opazljivke sledi direktno iz same strukture kvantnih pravil za reprezentacijo stanj in meritev

[2]enako bi lahko vzeli dva elektrona v singletnem stanju in merili njun spin v različnih med seboj ortogonalnih smereh, za katere operatorji tudi ne komutirajo

[3]originalno Bellovo neenačbo in tudi druge kasnejše izpeljave podobnih neenačb drugih avtorjev poimenujemo s skupnim imenom Bellove neenačbe

[4]originalna Bellova neenačba se glasi: $1+C(b,c)\geq|C(a,b)-C(a,c)|$; kjer C(a,b) pomeni korelacijo para delcev v postavitvah merilne naprave v polžaja a in b, in bi se torej v notaciji naše izpeljave glasila:

$$1+ < a(\theta_B)b(\theta_C)> \geq |< a(\theta_A)b(\theta_B)> - < a(\theta_A)b(\theta_C)>| ,$$

vendar pa ni praktično uporabna, saj velja le za dvonivojske sisteme in le za omejen nabor teorij skritih spremenljivk, namreč take, pri katerih je rezultat meritve na nasprotnih straneh postavitve vedno antikoreliran, ko sta analizatorja vzporedna

[5]lastni vektorji projekcije spina na izbrano os so:

$(\vec{n}\cdot\vec{\sigma})|\psi\rangle = (\sin\tfrac{\theta}{2}\cdot\sigma_x + \cos\tfrac{\theta}{2}\cdot\sigma_z)|\psi\rangle = \lambda|\psi\rangle$, torej:

$(\cos\tfrac{\theta}{2}-\lambda)\cdot c_+ + \sin\tfrac{\theta}{2}\cdot c_- = 0$ in $\sin\tfrac{\theta}{2}\cdot c_+ + (-\cos\tfrac{\theta}{2}-\lambda)\cdot c_- = 0$

Lastna vrednost λ lahko zavzame vrednosti ±1, od koder sledita ortonormirana lastna vektorja:

$|\chi_+'\rangle = (\cos\tfrac{\theta}{2},\sin\tfrac{\theta}{2})$ in $|\chi_-'\rangle = (-\sin\tfrac{\theta}{2},\cos\tfrac{\theta}{2})$

[6]večino eksperimentov delajo s parom prepletenih fotonov in potem merijo polarizacijo v različnih smereh

[7]obstaja sicer teoretična možnost, da bi bilo možno zaradi neučinkovitih detektorjev – t.i. »loopholes« reinterpretirati eksperimentalne podatke in vseeno rešiti teorijo skritih spremenljivk, a se ni zdi ravno verjetno

[8]Copenhagenska ortodoksna interpretacija, interpretacija mnogoterih svetov (Many-Worlds interpretation), transakcijska interpretacija (Transactional interpretation), Bohmova interpretacija kvantnih potencialov, Merminova Ithaca interpretacija,…

[9]singletno skupno stanje pri razpadu nevtralnega piona nastalih elektrona in pozitrona je torej prepleteno stanje

LITERATURA:

Einstein, A., Podolsky, B., Rosen, N., »Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?«, Physical Review, Vol. 47, 777 (1935)

Bohr, N., »Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?«, Physical Review, Vol. 48, 696 (1935)

Bell, J.S., »On the Einstein Podolsky Rosen Paradox«, Physics 1, 195 (1964)

Zeilinger, A., »On the Interpretation and Philosophical Foundation of Quantum Mechanics«, in: »Vastakohtien todellisuus«, Festschrift for K. V. Laurikainen, U. Ketvel et al. (Eds.), Helsinki University Press (1996)

Zeilinger, A., »A Foundational Principle for Quantum Mechanics«, Foundations of Physics, vol. 29, 631 (1999)

Cohen, D., »Lecture Notes in Quantum Mechanics«, quant-ph/0605180 v1 (2006)

Greene, B., »Tkanina vesolja«, Učila International (2005)

Feynman, R.P., Leighton, R.B., Sands, M., »The Feynman Lectures on Physics«, Vol. 3, Addison-Wesley Publishing Company, Reading (1966)

Everett, H., »''Relative State'' Formulation of Quantum Mechanics«, Reviews of Modern Physics, Vol. 29, №3 (1957)

Byrne, P., »The Many Worlds of Hugh Everett«, Scientific American, Vol. 297, N°6, 98 (December 2007) http://minty.stanford.edu/Ph125a/midrev.pdf

http://plato.stanford.edu/entries/qt-epr/#3.1

http://en.wikipedia.org/wiki/EPR_paradox

http://en.wikipedia.org/wiki/CHSH_inequality

http://en.wikipedia.org/wiki/Bell%27s_theorem

http://en.wikipedia.org/wiki/Schroedinger%27s_cat

http://en.wikipedia.org/wiki/No-communication_theorem