Enačbe renormalizacijske grupe za preprost Landau-Wilson-ov model

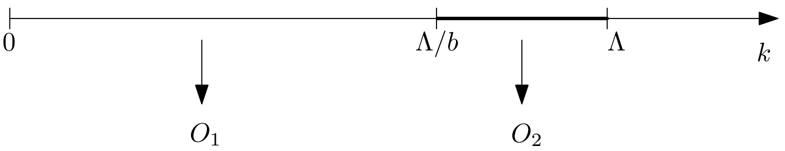
March 19, 2010

Literatura: Kerson Huang - Statistical Mechanics (str. 458).

Sistem opišemo s Hamiltonovo funkcijo v d dimenzijah

$$H[m] = \int \mathrm{d}^d r \frac{1}{2}|\nabla m|^2 + \frac{1}{2} r_0 m^2 + u_0 m^4 \,, \qquad m = m(r)\,.$$

Integracijsko območje v k prostoru razdelimo na dva dela. O_1 je d-dim. sfera z radijem Λ/b, O_2 pa območje med to sfero in sfero z radijem Λ, kot ponazarja spodnja skica. Λ predstavlja naravni "cut-off" sistema, ki ga lahko razumemo



kot posledico končne razsežnosti. Znotraj območja O_2 imamo N stanj, kjer je

$$N = \frac{1}{2} V S_d(\Lambda) \Delta k\,.$$

$S_d(\Lambda)$ označuje površino d-dim. sfere z radijem Λ

$$S_d = \frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2+1)} \Lambda^{d-1}\,, \tag{1}$$

Δk pa je razpon valovnih vektorjev, ki ustrezajo območju O_2

$$\Delta k = \Lambda \log b\,. \tag{2}$$

Polje $m(r)$ bomo parametrizirali kot vsoto dveh prispevkov

$$m(r) = \bar{m}(r) + \delta m(r)\,.$$

$\delta m(r)$ vsebuje samo valovne komponente iz O_2. Ta del bomo poskusili zintegrirati ven iz sistema. Analiziramo ga s pomočjo valovnih paketov $\phi_1(r), \ldots, \phi_N(r)$, ki vsebujejo samo valovne vektorje območja O_2. Privzamemo naslednje lastnosti

- $\int \mathrm{d}r \Big[\phi_i(r)\Big]^2 = 1\,,$
- $\int \mathrm{d}r \Big[\phi_i(r)\Big]^n = 0\,,$ n - liho število,
- $\int \mathrm{d}r \Big[\phi_i(r)\phi_j(r)\Big] \approx 0\,,$ približna ortogonalnost.

Za krajšo notacijo uporabljamo $\mathrm{d}r \equiv \mathrm{d}^d r$. S pomočjo teh valovnih funkcij torej zapišemo

$$m(r) = \bar{m}(r) + \sum_{i=1}^{N} c_i \phi_i(r)\,.$$

Uporabili bomo še nadaljne tri aproksimacije

- $\bar{m}(r)$ konstanten na območjih, kjer so $\phi_i \neq 0$,
- $\int \mathrm{d}r |\nabla\phi_i|^2 \approx \Lambda^2$,
- $(\delta m)^4 \to 0$.

1. korak renormalizacije

Zapišemo H z m razcepljenim na dva dela

$$H[m] = \int \mathrm{d}r \frac{1}{2}|\nabla\bar{m} + c_i\phi_i|^2 + \frac{r_0}{2}(\bar{m} + c_i\phi_i)^2 + u_0(\bar{m} + c_i\phi_i)^4\,.$$

Ko vpoštevamo zgornje lastnosti valovnih funkcij ϕ_i in dodatne tri navedene predpostavke, lahko H zapišemo kot

$$\begin{aligned} H[m] \quad &= \quad H[\bar{m}] + \frac{1}{2}\sum_i |c_i|^2\Lambda^2 + \sum_i |c_i|^2\frac{r_0}{2} + 6u_0\sum_i |c_i|^2\bar{m}^2(r_i) + \\ &\quad + \sum_i |c_i|^2\Big[\frac{1}{2}(\Lambda^2 + r_0) + 6u_0\bar{m}^2(r_i)\Big]\,, \end{aligned}$$

kjer je r_i težišče i-te valovne funkcije ϕ_i. Sedaj definiramo novo Hamiltonovo funkcijo H', ki ima zintegrirano območje $[\Lambda/b, \Lambda]$, torej je njen "cut-off" prestavljen iz Λ na Λ/b

$$\mathrm{e}^{-H'[\bar{m}]} = \int_{-\infty}^{\infty}(\prod_{i=1}^{N}\mathrm{d}c_i)\ \mathrm{e}^{-H[m]} = \mathrm{e}^{-H[\bar{m}]}\int_{-\infty}^{\infty}(\prod_{i=1}^{N}\mathrm{d}c_i)\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_i^N |c_i|^2(\Lambda^2 + r_0 + 12u_0\bar{m}^2(r_i))\Big]\,.$$

Po "Gaussovi" integraciji in uporabi logaritma dobimo

$$H'[\bar{m}] = H[\bar{m}] + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\log\Big[\frac{\Lambda^2}{2\pi}(1 + \frac{r_0}{\Lambda^2} + 12\frac{u_0}{\Lambda^2}\bar{m}^2(r_i))\Big]\,. \tag{3}$$

Vsoto po i bomo zamenjali z integralom.

$$\sum_{i=1}^{N} \to S_d(\Lambda)\Delta k \int \mathrm{d}r = \underbrace{\frac{d\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2-1)}}_{C_d} \Lambda^d \log b \int \mathrm{d}r \,,$$

kjer smo uporabili enačbi (1,2). Preden izvršimo integracijo naredimo razvoj logaritma v enačbi (3), kjer pozabimo na konstantne člene in člene višjih redov

$$\frac{1}{2}\log\left[\frac{\Lambda^2}{2\pi}(1+\frac{r_0}{\Lambda^2}+12\frac{u_0}{\Lambda^2}\bar{m}^2(r_i))\right] \approx 6\bar{m}^2(r_i)\left[\frac{u_0}{\Lambda^2}-\frac{r_0 u_0}{\Lambda^4}\right] - 36\frac{u_0^2}{\Lambda^4}\bar{m}^4(r_i)\,.$$

H' zapišemo namesto z vsoto sedaj z integralom

$$H'[\bar{m}] = H[\bar{m}] + C_d\Lambda^d \log b \int \mathrm{d}^d r \underbrace{6\bar{m}^2(r)\left[\frac{u_0}{\Lambda^2}-\frac{r_0 u_0}{\Lambda^4}\right]}_{\text{dodatek k kvad. členu}} - \underbrace{36\bar{m}^4(r)\frac{u_0^2}{\Lambda^4}}_{\text{dodatek k kvart. členu}} \,.$$

Definiramo spremenjene sklopitvene konstante

$$\begin{aligned} H'[\bar{m}] &= \int \mathrm{d}^d r \frac{1}{2}|\nabla\bar{m}|^2 + \frac{1}{2}\tilde{r}_0\bar{m}^2 + \tilde{u}_0\bar{m}^4 \,, \\ \tilde{r}_0 &= r_0 + 12C_d \log b\Big(\Lambda^{d-2}u_0 - \Lambda^{d-4}u_0 r_0\Big) \,, \\ \tilde{u}_0 &= u_0 - 36C_d \log b \Lambda^{d-4}u_0^2 \,. \end{aligned}$$

2. korak renormalizacije

Spremenimo koordinato: $r \to r' = r/b$. S tem restavriramo prvotni "cut-off" v k prostoru na Λ, saj je transformirani valovni vektor $k' = bk$.

$$\int \mathrm{d}^d r \frac{1}{2}|\nabla\bar{m}|^2 + \frac{1}{2}\tilde{r}_0\bar{m}^2 + \tilde{u}_0\bar{m}^4 = \int \mathrm{d}^d r' b^d \left[\frac{1}{b^2}\frac{1}{2}|\nabla'\bar{m}|^2 + \frac{1}{2}\tilde{r}_0\bar{m}^2 + \tilde{u}_0\bar{m}^4\right] . \quad (4)$$

3. korak renormalizacije

V tretjem koraku zahtevamo, da je prvi člen Hamitonove funkcije na desni strani enačbe (4) normiran na standarden način. To pomeni, da je edini predfaktor $1/2$, vse ostalo pospravimo v redefinicijo polja

$$m'^2 = b^{d-2}\bar{m} \,.$$

To povzroči, da moramo redefinirati tudi sklopitvene konstante

$$r_0' = b^2\tilde{r}_0 \,, \qquad u_0' = b^{4-d}\tilde{u}_0 \,.$$

Da dobimo enačbe renormalizacijske grupe moramo povezati r_0' in u_0' z originalnimi parametri r_0 in u_0. Ker predpostavljamo, da je $b \approx 1$ lahko naredimo sledeča razvoja

$$b^2 \approx 1 + 2\log b \,, \qquad b^{4-d} \approx 1 + (4-d)\log b \,.$$

Tako dobimo

$$\begin{aligned} r_0' - r_0 &= \log b \Big[2r_0 - 12C_d(\Lambda^{d-2}u_0 - \Lambda^{d-4}u_0 r_0) \Big] , \\ u_0' - u_0 &= \log b \Big[(4-d)u_0 - 36C_d\Lambda^{d-4}u_0^2 \Big] . \end{aligned}$$

Faktorja C_d se lahko znebimo z redefinicijo Λ in r_0. Enačbi še pozvezimo, tako da si predstavljamo infinitizimalen korak v b in definiramo $\tau = \log b$. Tako dobimo diferencialni enačbi renormalizacijske grupe

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} &= 2r + 12\Lambda^{d-2}u - 12\Lambda^{d-4}ur , \\ \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\tau} &= (4-d)u - 36\Lambda^{d-4}u^2 . \end{aligned}$$

Vpeljemo lahko še brezdimenzijski spremenljivki $x = r/\Lambda^2$, $y = u/\Lambda^{4-d}$ in $d = 4 - \epsilon$

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau} &= 2x - 12xy + 12y , \\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau} &= \epsilon y - 36y^2 . \end{aligned}$$

Poiščemo lahko fiksne točke za katere mora veljati

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau}(x^*, y^*) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}(x^*, y^*) = 0 .$$

Taki točki sta dve

$$T_1^* = (0,0) , \qquad T_2^* = (-\epsilon/6, \epsilon/36) .$$