

LIJEVE GRUPE

Borut Bajc^{a,1}

^a *Institut J. Stefan, 1000 Ljubljana, Slovenija*

Povzetek

Te skripte so namenjene polsemesterskemu predavanju - (30,15)/2 ur (teorije,vaj) - predmeta Grupe na podiplomskem študiju fizike. Se bodo stalno obnavljale in dopolnjevale, nobena verzija ni nujno dokončna². Med uporabno literaturo spadajo zagotovo npr [1, 2, 3, 4].

Kazalo

1	Uvod v Lijeve grupe, definicije	2
1.1	Nekaj podobnosti in razlik s končnimi grupami	2
1.2	Klasifikacija kompaktnih enostavnih Lijevih grup	4
1.3	Lijeva grupa na vektorski prostor	5
1.4	Generatorji	11
1.5	Enostavne grupe in algebre	14
1.6	Stanja	15
1.7	Tenzorski operatorji	16
1.8	Tenzorski produkt, Clebsch-Gordanovi koeficienti	17
1.9	Wigner-Eckartov izrek	19
1.10	Kaj se želimo naučiti	20
2	Malo bolj konkretno	21
2.1	Tenzorske metode	21
2.1.1	SO(3)	21
2.1.2	SO(N)	24
2.1.3	SU(3)	25
2.1.4	SU(N)	26
2.2	Youngovi diagrami	27
2.2.1	Dimenzija nerazcepne upodobitve	27
2.2.2	Produkt upodobitve	29
2.2.3	Dynkinov zapis	31
2.2.4	Konjugirana upodobitev	32

¹borut.bajc@ijs.si

²Zadnjič spremenil 20.1.2017 ob 12:15 po Ljubljanskem času.

3	Nekaj fizike	33
3.1	Spontani zlom simetrije	33
3.2	Nambu-Goldstonov teorem	35
3.3	Druge upodobitve	36
3.4	Podgrupe	41
3.5	Dršenje sklopitvenih konstant	47
3.5.1	Normalizacija $U(1)$	47
4	Podrobnosti	49
4.1	$\text{rang}(G) = 1$: $SU(2)$	50
4.2	$\text{rang}(G) > 1$	52
4.3	Zapisi v različnih bazah	54
4.4	Produkt uteži	55
4.5	Poseben primer: $SU(3)$	57
4.6	Kaj lahko še naredimo v Dynkinovem zapisu	61
4.6.1	Dimenzija upodobitve	62
4.6.2	Kvadratni Casimir	62
4.6.3	Računanje nivojev	63
4.6.4	Degeneracija stanj	63
4.7	Dynkinovi diagrami	64
5	Dodatne (rezervne) vaje	65

1 Uvod v Lijeve grupe, definicije

1.1 Nekaj podobnosti in razlik s končnimi grupami

Pri končnih grupah so vsi elementi recimo

$$g_1, g_2, \dots, g_d \tag{1.1}$$

Če poznamo vse produkte

$$g_i g_j = g_k \quad i, j, k = 1, \dots, d \tag{1.2}$$

to je, če poznamo tabelo produktov, potem je s tem grupa enolično definirana.

Druga možnost je, in s to se bomo ukvarjali do konca semestra, da je vsak element grupe določen preko nekih zveznih realnih parametrov. Namesto indeksa $i = 1, \dots, d$, imamo zdaj zvezne realne parametre $\alpha_1, \dots, \alpha_d$, grupni element je pa definiran kot funkcija teh parametrov (d različnih α_i bomo na kratko označili kar z α)

$$g(\alpha) = g(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \tag{1.3}$$

Takih možnosti (število elementov g) je seveda neskočno, saj so α zvezni. Zato da ti elementi tvorijo grupo, morajo zadoščati ekvivalentu multiplikativne tabele, to je

$$g(\alpha)g(\beta) = g(\gamma) \quad (1.4)$$

To pomeni, da obstaja pravilo, preskripcija,

$$\gamma = \gamma(\alpha, \beta) \quad (1.5)$$

S to posplošitvijo, lahko marsikaj iz končnih grup uporabimo tudi za zvezne grupe.

Pri tem se bomo skoraj izključno omejili na kompaktne grupe, Lijeve grupe. To pomeni nekaj takega kot grupe, v katerih je prostor parametrov kompakten, končen. Te so v splošnem klasificirane, več o tem v naslednjem poglavju.

Seveda moramo določene operacije pravilno razumet. Tako se mora vsota po vseh elementih končne grupe prevest v pravilno utežen integral po zveznih parametrih

$$\sum_{i=1}^d f(g_i) \rightarrow \int d\alpha \rho(\alpha) f(g(\alpha)) \quad (1.6)$$

kjer smo upeljali utežno funkcijo $\rho(\alpha)$, ki zadošča

$$\int d\alpha \rho(\alpha) = 1 \quad (1.7)$$

ki je seveda različna za različne grupe. Za nekatere primere jo bomo določili v predavanjih.

Upodobitev Lijeve grupe je, tako kot v primeru končnih grup, preslikava grupnih elementov v operatorje

$$g \rightarrow T(g) \quad (1.8)$$

za katere velja

$$T(e) = \mathbb{I} \quad (1.9)$$

$$T(g_1)T(g_2) = T(g_1g_2) \quad (1.10)$$

kjer je \mathbb{I} operator identitete. V glavnem bomo obravnavali matrične upodobitve. Te so **razcepne** (ali reducibilne), če jih lahko zapišemo v bločno diagonalni obliki (vsi elementi grupe morajo imeti enake bloke), vsak blok pa predstavlja po tem postopku **nerazcepno upodobitev** (ali ireducibilno). Če je nerazcepna upodobitev $T(g)$ matrika velikosti $D \times D$, govorimo o D -razsežni ali D -dimenzionalni upodobitvi.

Pri končnih grupah je število vseh nerazcepnih upodobitev dane grupe enako številu razredov, in torej končno. Pri Lijeveh grupah pa je število vseh možnih nerazcepnih upodobitev neskončno. Na predavanjih se bomo naučili, kako jih določiti, to je kakšne dimenzije so pri vsaki grupi možne, ter v nekaterih primerih tudi njihova eksplicitna matrična upodobitev.

Vaja 1. Iz pogoja, da integral po grupi poljubne funkcije $f(g(\alpha))$ zadošča

$$\int d\alpha \rho(\alpha) f(g(\alpha)) = \int d\alpha \rho(\alpha) f(g(\alpha)g(\beta)) \quad (1.11)$$

kjer je β poljuben a fiksen, določi gostoti $\rho(\alpha)$ za primer $SO(2)$ in $SO(3)$. \triangle

1.2 Klasifikacija kompaktnih enostavnih Lijevih grup

Vse kompaktne *enostavne* (pojem enostavnosti bomo definirali pozneje) Lijeve grupe so znane in klasificirane ter predstavljene v tabeli 1, drugih možnosti ni. Indeksi pri oznakah v tabeli ($n = 1, 2, \dots$) predstavljajo **rang** grupe. V poljubni matrični upodobitvi je to maksimalno število matrik, ki jih lahko istočasno spravimo v diagonalno obliko. To število ni odvisno od upodobitve, ampak od grupe. Vsaka grupa ima rang določen. Seveda velja, da rang podgrupe H grupe G ne more biti večji od ranga celotne grupe G .

grupe	A_n	B_n	C_n	D_n	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
alternativno ime	SU(n+1)	SO(2n+1)	Sp(2n)	SO(2n)	izjemne grupe				

Tabela 1: Klasifikacija kompaktnih Lijevih grup. Pozitivni celi indeksi označujejo rang grupe.

Primer 1. Kakšen je rang grupe $SO(10)$? Iz tabele 1 razberemo, da je $n = 10/2 = 5$, torej je rang grupe $SO(10)$ enak 5. \diamond

V teku predavanj bomo malo boljše spoznali, kaj vsaj nekatere od teh grup predstavljajo, za sedaj je pa dobro si zapomnit, da so vse znane in klasificirane. Delimo jih lahko v dve skupini:

1. Klasične grupe imenujemo grupe A_n , B_n , C_n in D_n . Njihov nazoren pomen je sledeči:

- grupa $SU(N)$ predstavlja rotacije v N -dimenzionalnem kompleksnem prostoru: N -dimenzionalna matrična upodobitev rotira vektor

$$(c_1, \dots, c_N)^T, \quad c_i \in \mathbb{C} \quad (1.12)$$

- grupa $SO(N)$ predstavlja rotacije v N -dimenzionalnem realnem prostoru: N -dimenzionalna matrična upodobitev rotira vektor

$$(r_1, \dots, r_N)^T, \quad r_i \in \mathbb{R} \quad (1.13)$$

- grupa $\text{Sp}(2N)$, ali *simpleklična grupa*, predstavlja rotacije v N -dimenzionalnem kvaternionskem prostoru: $2N$ -dimenzionalna matrična upodobitev rotira vektor

$$\sigma_\mu (q_1^\mu, \dots, q_N^\mu)^T, \quad q_i^\mu \in \mathbb{R} \quad (1.14)$$

kjer je sumacija po μ od 1 do 4 implicitna in je

$$\sigma_\mu = (\mathbb{I}, i\sigma_1, i\sigma_2, i\sigma_3) \quad (1.15)$$

σ_i ($i = 1, 2, 3$) so Paulijeve matrike, ki zadoščajo komutacijskim relacijam

$$[\sigma_i, \sigma_j] = i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad (1.16)$$

kjer je ϵ_{ijk} poponoma antisimetrični tenzor Levi-Civite ($\epsilon_{123} = 1$). Kot vemo, so te matrike eksplicitno

$$\mathbb{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.17)$$

- Medtem ko je klasičnih grup neskončno, je izjemnih grup (E_6, E_7, E_8, F_4, G_2) samo 5. Te so povezane z rotacijami *oktonionov*, zaradi neasocijativnosti oktonionskega produkta pa je število možnosti omejeno. Žal zaradi pomanjkanja časa o njih ne bomo dosti govorili, čeprav zavzemajo v fiziki delcev zanimivo in pomembno vlogo (npr. grupa E_6 v teoriji poenotenja in predvsem grupa E_8 v teoriji strun).

Vaja 2. *Nekatere grupe iz tabele 1 so homomorfne³ drugim, npr. $SO(2) \sim U(1)$, $SO(3) \sim SU(2)$, $SO(4) \sim SU(2) \times SU(2)$, $SO(6) \sim SU(4)$, itd. Za večino aplikacij sta si taki grupi ekvivalentni: med njimi ni razlike lokalno gledano v prostoru parametrov, globalno pa se razlikujejo. Razloži razliko med grupami $SO(2)$ in $U(1)$ in predvsem med $SO(3)$ in $SU(2)$.* △

1.3 Lijeva grupa na vektorski prostor

Abstraktne lastnosti grupe lahko študiramo in boljše razumemo, če z grupo delujemo na vektorski prostor. Grupni elementi so v tem primeru operatorji na ta vektorski prostor. Preko obnašanja vektorskega prostora nad akcijo grupnih elementov dobimo tako informacijo o grupi sami. To bomo s pridom uporabili v naslednjem. Obravnavali bomo v glavnem dva taka primera vektorskega prostora:

³Dve grupi, G in H , sta izomorfni, ko obstaja relacija med elementi $g_i \leftrightarrow h_i$, $g_i \in G$, $h_i \in H$, tako ob $g_1 g_2 = g_3$ velja tudi $h_1 h_2 = h_3$. Če relacija ni $1 : 1$, potem sta homomorfni.

- vektorski prostor je \mathbb{R}^n ali \mathbb{C}^n . Ti so nazorni in uporabni pri definiciji grupe, kot smo videli v prejšnjem poglavju: grupni element $g(\alpha)$ deluje na vektor \vec{r} kot matrika rotacij $T(g(\alpha))$:

$$(T(g(\alpha))\vec{r})_i \rightarrow \sum_j T(g(\alpha))_{ij} r_j \quad (1.18)$$

- pri obravnavi više dimenzionalnih upodobitev elementov grup pa je še bolj prikladen prostor funkcij $f(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ ali \mathbb{C}^n :

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{ali} \quad \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} \quad (1.19)$$

V tem primeru definiramo upodobitev $T(g)$, $g \in G$ preko transformacije

$$T(g)f(\vec{x}) = f(T^{-1}(g)\vec{x}) \equiv f'(\vec{x}) \quad (1.20)$$

Pri tem je ključno, da je na desni strani enačbe *druga funkcija* (f' namesto f) *istega argumenta* (obakrat \vec{x}). Zato je tudi pogoj (1.10), ki mora veljati za upodobitve, zadoščen: po eni strani je namreč

$$T(g_1)T(g_2)f(\vec{x}) = T(g_1)f'(\vec{x}) = f'(T^{-1}(g_1)\vec{x}) = f(T^{-1}(g_2)T^{-1}(g_1)\vec{x}) \quad (1.21)$$

po drugi strani pa

$$T(g_1g_2)f(\vec{x}) = f(T^{-1}(g_1g_2)\vec{x}) \quad (1.22)$$

kar je isto, saj za operatorje (matrike) velja

$$A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1} \quad (1.23)$$

Pogoj (1.9) pa tudi velja ($f' = f$ v tem primeru).

Na prostor funkcij (1.19) delujeta grupi $SO(n)$ oz. $SU(n)$. Funkcijo razvijemo po baznih vektorjih $e_i(\vec{x})$

$$f(\vec{x}) = \sum_i f_i e_i(\vec{x}) \quad (1.24)$$

akcijo upodobitve $T(g)$ na bazni vektor $e_i(\vec{x})$ pa zapišemo kot

$$T(g)e_i(\vec{x}) = \sum_j e_j(\vec{x})T(g)_{ji} \quad (1.25)$$

Navidezno je matrika na napačni strani, ampak le navidezno. Konvencija je namreč taka, da se komponente transformirajo kot smo navajeni:

$$f'(\vec{x}) = T(g)f(\vec{x}) = \sum_i f_i T(g)e_i(\vec{x}) = \sum_{i,j} f_i e_j(\vec{x}) T(g)_{ji} = \sum_j f'_j e_j(\vec{x}) \quad (1.26)$$

kjer ima zarotirana komponenta običajno obliko

$$f'_j = \sum_i T(g)_{ji} f_i \quad (1.27)$$

Oglejmo si par primerov, ki ju pravzaprav že dobro poznamo.

Primer 2. Vzemimo grupo $SO(2)$, ki v 2-dimenzionalnem ($\rightarrow 2$) realnem prostoru opisuje ortogonalne ($\rightarrow O$) rotacije z enotsko determinanto ($\text{Det}(O) = 1 \rightarrow S$ -special): vektor

$$xe_x + ye_y \quad (1.28)$$

zarotiramo za kot α . To lahko naredimo tako da pri fiksni bazni vektorjih e_i zarotiramo komponente iz (x, y) v (x', y') tako kot v (1.27)

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

ali pa da pri fiksni komponentah x, y zarotiramo (v nasprotno smer) bazne vektorje e_i v nove bazne vektorje $T(\alpha)e_i$ tako kot v (1.25)

$$T(\alpha) \begin{pmatrix} e_x & e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_x & e'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_x & e_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.30)$$

ali pa preko transponirane matrike

$$T(\alpha) \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e'_x \\ e'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} \quad (1.31)$$

Na kratko,

$$T(\alpha)(xe_x + ye_y) = x'e_x + y'e_y = xe'_x + ye'_y \quad (1.32)$$

◇

Primer 3. Element prostora vseh polinomov na \mathbb{R}^2 zapišemo

$$f(\vec{x}) = c_1 + (c_x x + c_y y) + (c_{x^2} x^2 + c_{xy} xy + c_{y^2} y^2) + \dots \quad (1.33)$$

Funkcije

$$e_i = 1, x, y, x^2, xy, y^2, \dots \quad (1.34)$$

obravnavamo zdaj kot bazne vektorje, komponente v tej bazi pa so

$$(c_1, c_x, c_y, c_{x^2}, c_{xy}, c_{y^2}, \dots) \quad (1.35)$$

Če se zdaj omejimo na linearne polinome

$$f(\vec{x}) = c_x x + c_y y \quad (1.36)$$

deluje grupa $SO(2)$ na ta prostor kot

$$T(\alpha)f(\vec{x}) = c'_x x + c'_y y \quad (1.37)$$

kjer se komponente transformirajo kot

$$\begin{pmatrix} c'_x \\ c'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} \quad (1.38)$$

ali, ekvivalentno, se transformirajo bazni vektorji

$$T(\alpha) \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.39)$$

Vidimo, da se zdaj x in y transformirata različno kot v prejšnjem primeru: v (1.39) sta x oz. y bazna vektorja, medtem ko sta v (1.29) komponenti. Važno je torej vedeti, na kateri prostor grupa deluje: v prejšnjem primeru je prostor bil kar \mathbb{R}^2 , v tem primeru pa je to prostor linearnih polinomov na \mathbb{R}^2 . \diamond

Primer 4. Ne glede na kakšen prostor smo si izbrali, v obeh prejšnjih primerih smo prišli do 2-dimenzionalne upodobitve grupe $SO(2)$:

$$O(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.40)$$

Vendar je dimenzija upodobitve le navidezno 2-dimezionalna, v resnici lahko v $SO(2)$ shajamo z 1-dimenzionalnimi upodobitvami.

Če namesto s prostorom \mathbb{R}^2 shajamo s prostorom kompleksne ravnine \mathbb{C} , potem se stvari poenostavijo:

$$(e_x, e_y) \rightarrow (1, i) \quad (1.41)$$

$$(x, y) \rightarrow r(\cos \phi, \sin \phi) \quad (1.42)$$

odkoder

$$xe_x + ye_y \rightarrow re^{i\phi} \quad (1.43)$$

Ekvivalent (1.40) je zdaj

$$U(\alpha) = e^{i\alpha} \quad (1.44)$$

ekvivalent (1.29) pa

$$e^{i\phi'} = e^{i\alpha} e^{i\phi} \quad (1.45)$$

oz. rotacija kota ϕ za kot α :

$$\phi' = \phi + \alpha \quad (1.46)$$

Torej je ta upodobitev 1-dimenzionalna. Ker smo rotacije v \mathbb{R}^2 zamenjali z rotacijami v \mathbb{C} , imenujemo grupo le-teh raje $U(1)$ namesto $SO(2)$. \diamond

Primer 5. Naj bo linearni prostor, na katerega grupa $SO(2)$ deluje, prostor funkcij kompleksne ravnine $f(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Vemo, da lahko tako funkcijo razvijemo po Fourieru

$$f(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r) e^{im\phi} \quad (1.47)$$

Na funkcijo delujmo z upodobitvijo grupe

$$T(\alpha)f(z) = f(T^{-1}(\alpha)z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f_m(r) e^{im(\phi-\alpha)} \quad (1.48)$$

kjer smo uporabili dejstvo, da predstavljajo funkcije

$$e^{im\phi} \quad (1.49)$$

bazo razvoja po Fourieru in da deluje $U(1)$ na to bazo z upodobitvami

$$U_m(\alpha) = e^{-im\alpha} \quad (1.50)$$

Teh je neskončno (ena za vsak cel m , $-\infty < m < \infty$), vse pa so 1-dimenzionalne.

Na prvi pogled bi si lahko mislili, da smo prišli do protislovja če izberemo kot poseben primer

$$f(z) = z \quad (1.51)$$

kajti po eni strani je po rotaciji (1.45)

$$z \rightarrow z' = e^{i\alpha} z \quad (1.52)$$

in bi si torej naivno mislili, da

$$T(\alpha)f(z) = T(\alpha)z = e^{i\alpha} z \quad (1.53)$$

po drugi strani pa smo po (1.45) videli, da je

$$T(\alpha)f(z) = f(T^{-1}(\alpha)z) = e^{-i\alpha} z \quad (1.54)$$

Katera verzija je torej pravilna in zakaj?

Po zgornji uporabi besede "naivno" lahko sklepate, da je pravilna (1.54) in seveda bolj splošna (1.45), narobe pa (1.53). Razlog za to je, da moramo s $T(\alpha)$ delovati na funkcijo $f(z)$, ne pa na funkcijsko vrednost $f(z) = z$. Ali drugače, $T(\alpha)$ deluje kot operator na f , ne pa na $f(z)$. \diamond

Primer 6. V $SO(3)$ gre stvar zelo podobno, le da imamo opravka s tremi smermi (namesto dveh)

$$\vec{r} = (x, y, z) = r(\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta) \quad (1.55)$$

in tremi Eulerjevimi koti (namesto enega), tako da je splošna matrična upodobitev

$$O(\alpha, \beta, \gamma) \quad (1.56)$$

lahko več kot 1-dimenzionalna. Take rotacije v \mathbb{R}^3 tvorijo grupo $SO(3)$.

Študirajmo zdaj prostor funkcij na \mathbb{R}^3 . Te lahko razvijemo po sfernih harmonikih

$$f(\vec{r}) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.57)$$

$(2l + 1)$ -dimenzionalni bazni vektorji

$$(Y_{l,l}, Y_{l,l-1}, \dots, Y_{l,-l+1}, Y_{l,-l})(\theta, \phi) \quad (1.58)$$

se pri rotaciji $(\theta, \phi) \rightarrow (\theta', \phi')$ transformirajo preko $(2l + 1)$ -dimenzionalne nerazcepne upodobitve $O^{(l)}(\alpha)$ grupe $SO(3)$ kot

$$Y_{l,m}(\theta', \phi') = \sum_{m'=-l}^l Y_{lm'}(\theta, \phi) O_{m'm}^{(l)}(\alpha) \quad (1.59)$$

Ekvivalentno bi lahko namesto sferičnih harmonikov zarotirali koeficijente

$$f'_{lm}(r) = \sum_{m'=-l}^l O_{mm'}^{(l)}(\alpha) f_{lm'}(r) \quad (1.60)$$

tako da je

$$\begin{aligned} T(\alpha)f(\vec{r}) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f'_{lm}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm}(r) Y_{lm}(\theta', \phi') \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l f_{lm'}(r) Y_{lm}(\theta, \phi) O_{mm'}^{(l)}(\alpha) \end{aligned} \quad (1.61)$$

V prihodnjih poglavjih bomo nakazali, kako lahko matrike $O_{m'm}^{(l)}(\alpha)$ določimo. \diamond

1.4 Generatorji

Sedaj pa pojdimo spet nazaj k produktu grupnih elementov. Namesto tabele produktov imamo pri Lijevis grupah relacije med generatorji. Upodobitev poljubnega elementa $g(\alpha)$

$$T(\alpha) \equiv T(g(\alpha)) \quad (1.62)$$

lahko namreč zapišemo kot

$$T(\alpha) = e^{i\alpha_a X_a} \quad (1.63)$$

kjer je sumacija po a od 1 do d implicitna. Ker je upodobitev grupe unitarna ($T^\dagger = T^{-1}$) so **generatorji** X_a Hermitski

$$X_a^\dagger = X_a \quad (1.64)$$

Pri tem smo izbrali, da je upodobitev grupnega elementa izhodišča parametričnega prostora identiteta

$$T(0) = I \quad (1.65)$$

Jasno je, da je inverzni element tedaj

$$(T(\alpha))^{-1} = T(-\alpha) \quad (1.66)$$

Še enkrat poudarimo: poljubno upodobitev grupnega elementa se da zapisat preko generatorjev kot v (1.63).

Vpeljava generatorjev je dobra iz dveh razlogov.

- generatorji X_a tvorijo bazo za vektorski prostor: če sta X_1 in X_2 vektorja, potem je $aX_1 + bX_2$ ($a, b \in \mathbb{R}$) tudi vektor;
- v tem vektorskem prostoru definiramo komutator

$$[X_a, X_b] = if_{abc}X_c \quad (1.67)$$

kjer je na desni implicitna sumacija po $c = 1, \dots, d$, in kjer po konstrukciji velja antisimetrija prvih dveh indeksov

$$f_{abc} = -f_{bac} \quad (1.68)$$

Komutator (1.67) definira **Lijevo algebro**. Generatorji X_a zadoščajo Jacobijevi identiteti

$$[X_b, [X_c, X_a]] + [X_a, [X_b, X_c]] + [X_c, [X_a, X_b]] = 0 \quad (1.69)$$

Algebro poznamo, če poznamo **strukturne konstante** f_{abc} . Upodobitve grupe pa nato dobimo preko (1.63).

Obratno pa, če poznamo upodobitev grupnih elementov, lahko dobimo generatorje preko

$$X_a = \frac{1}{i} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \alpha_a} T(\alpha) \quad (1.70)$$

Produkt grupnih elementov je določen ko poznamo generatorje:

$$e^{i\gamma_c X_c} = e^{i\alpha_a X_a} e^{i\beta_b X_b} \quad (1.71)$$

kjer uporabimo na desni strani Baker-Campbell-Hausdorffovo formulo. Naš namen tu ni to formulo zares uporabljat, pač pa s tem pokazat, da je dovolj poznat komutatorje generatorjev, da poznamo že vse produkte grupnih elementov.

Primer 7. *Vzemimo spet $SO(2)$, to je rotacije v \mathbb{R}^2 . Pri tem en samo kot (α) določa rotacijo, upodobitev dobimo iz (1.40):*

$$T(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (1.72)$$

Edini generator dobimo kot

$$X = \frac{1}{i} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial \alpha} T(\alpha) = \frac{1}{i} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \begin{pmatrix} -\sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \quad (1.73)$$

Če gremo sedaj v obratno smer

$$T(\alpha) = e^{i\alpha X} = I + i\alpha X + \frac{(i\alpha X)^2}{2!} + \dots \quad (1.74)$$

lahko eksplicitno preverimo konsistenco, dobiti moramo (1.72). \diamond

Primer 8. *Drugi primer upodobitve, prisoten v vsaki grupi, dobimo na sledeči način. vsakemu generatorju priredimo upodobitev*

$$(X_a)_{bc} = -if_{abc} \quad (1.75)$$

Da je to res, moramo preverit, ali taka izbira zadošča komutacijskim relacijam (1.67):

$$\begin{aligned} & [X_a, X_b]_{cd} - if_{abe} (X_e)_{cd} \\ &= (-i)f_{ace}(-i)f_{bed} - (-i)f_{bce}(-i)f_{aed} - if_{abe}(-i)f_{ecd} \\ &= f_{cae}f_{bed} + f_{bce}f_{aed} + f_{abe}f_{ced} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.76)$$

kjer smo pri pri prehodu iz druge v tretjo vrsto v prvi in zadnji strukturalni konstanti uporabili antisimetrijo prvih dveh indeksov $f_{ace} = -f_{cae}$ oz. $f_{ecd} = -f_{ced}$, pri prehodu iz tretje v četrto vrstico pa se poslužili Jacobijeve identitete (1.69) po dvakratni uporabi (1.67) za izračun komutatorjev.

Iz upodobitve generatorjev (1.75) dobimo upodobitev grupe seveda kot

$$\begin{aligned}
T(\alpha)_{bc} &= (e^{i\alpha_a X_a})_{bc} \\
&= \delta_{bc} + i\alpha_{a_1} (X_{a_1})_{bc} + \frac{i^2}{2!} \alpha_{a_1} \alpha_{a_2} (X_{a_1})_{be} (X_{a_2})_{ec} + \dots \\
&= \delta_{bc} + \alpha_{a_1} f_{a_1 bc} + \frac{1}{2!} \alpha_{a_1} \alpha_{a_2} f_{a_1 be} f_{a_2 ec} + \dots
\end{aligned} \tag{1.77}$$

Tako nerazcepno upodobitev imenujemo **adjungirana upodobitev**, in je prisotna pri vsaki grupi. To je d -dimenzionalna upodobitev, kjer je d dimenzija grupe, to je število generatorjev. \diamond

Linearen prostor generatorjev v adjungirani upodobitvi lahko spremenimo v vektorski prostor, če definiramo ustrezen skalaren produkt:

$$Tr(X_a X_b) \tag{1.78}$$

Z redefinicijo generatorjev preko ustrezne linearne kombinacije

$$X_a \rightarrow U_{ab} X_b \tag{1.79}$$

spravimo zgornji produkt v obliko

$$Tr(X_a X_b) = c_a \delta_{ab} \tag{1.80}$$

Obravnavali bomo samo grupe s $c_a > 0$: to so **kompaktne grupe**. Tedaj lahko normiramo generatorje ($\lambda > 0$)

$$X_a \rightarrow \sqrt{\frac{\lambda}{c_a}} X_a \tag{1.81}$$

in (1.80) spravimo v obliko

$$Tr(X_a X_b) = \lambda \delta_{ab} \tag{1.82}$$

V tej bazi so strukturne konstante antisimetrične na vse tri indekse, ne samo na prva dva. To zato, ker je

$$f_{abc} \equiv \frac{1}{i\lambda} Tr([X_a, X_b] X_c) \tag{1.83}$$

nato pa samo uporabimo splošne lastnosti sledi in komutatorja.

1.5 Enostavne grupe in algebre

Naj bo $H \subset G$. Pravimo, da je H **podgrupa** grupe G , če

$$\forall h_1, h_2 \in H, h_1 h_2^{-1} \in H \quad (1.84)$$

Taka H je grupa, vsebovana v večji grupi. Trivialni podgrupi sta seveda grupa z enotskim elementom $\{e\}$ in cela grupa G .

Invariantna podgrupa pa je tista podgrupa, za katero velja

$$\forall h \in H, \forall g \in G, g^{-1} h g \in H \quad (1.85)$$

Enostavna grupa je tista, ki ima za invariantne podgrupe le trivialni podgrupi.

Podobno lahko govorimo o algebrah: naj bo (simbolično)

$$g = e^{iX}, \quad h = e^{iY} \quad (1.86)$$

potem razpenjajo Y **podalgebro** če

$$[Y, Y] = Y \quad (1.87)$$

in **invariantno podalgebro** če

$$[Y, X] = Y \quad (1.88)$$

Enostavne podalgebre so tiste, ki imajo za invariantno podalgebro le trivialni podalgebri.

Včasih dobimo invariantno podalgebro z enim samim elementom: komutator je tu seveda nič, algebra je Abelova. **Polenostavna algebra** je tista, ki nima Abelovih invariantnih podalgeber. Tedaj je

$$X = Y_1 + \dots + Y_n, \quad [Y_i, Y_i] \neq 0 \quad (1.89)$$

Polenostavna grupa pa je sestavljena iz polenostavne algebre:

$$G = G_1 \times \dots \times G_n \quad (1.90)$$

kjer poljuben $g_i \in G_i$ lahko simbolično zapišemo kot $g_i = e^{iY_i}$.

Primer 9. Vzemimo za grupo $SU(3)$. 3-dimenzionalni generatorji so Gell-Mannove matrike $T_i = \lambda_i/2$, $i = 1, \dots, 8$.

$$\begin{aligned}
T_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
T_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
T_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{1.91}$$

Podgrupa grupe $SU(3)$ je zagotovo $SU(2)$, njeno algebro pa razpenjajo npr. matrike T_1, T_2, T_3 (v tej obliki je seveda 3-dimenzionalna ampak trivialno razcepna, nerazcepen 2-dimenzionalen del je zgornje levi blok 2×2 , to je Paulijeve matrike $\sigma_i/2$ (1.17)).

Grupa $SU(3)$ je enostavna grupa, nima invariantnih podgrup. Pač pa grupa $SU(3) \times U(1)$ ni enostavna (in niti polenostavna) zaradi $U(1)$, ki je invariantna podgrupa.

Primer polenostavne grupe pa je npr. $SU(3) \times SU(2)$. ◇

1.6 Stanja

Kot smo že omenili, deluje grupa na nek linearen vektorski prostor V . Ta prostor je v splošnem lahko tudi neskončno razsežen, vendar ga lahko, s pomočjo nerazcepnih upodobitev grupe, razdelimo na neskončno končnih, nerazcepnih delov.

Najprej definicija: pravimo, da se **stanja**, to so vektorji ψ_i^r iz vektorskega prostora V , transformirajo preko nerazcepne upodobitve $T^r(\alpha)$, če za vsak $i = 1, \dots, D(r)$

$$\psi_i^{r'} \equiv (T(\alpha)\psi^r)_i = \sum_{j=1}^{D(r)} \psi_j^r T_{ji}^r(\alpha) \tag{1.92}$$

kjer je $D(r)$ dimenzija upodobitve r . V ψ_i^r torej z r označimo upodobitev, z i pa stanje v upodobitvi. Seveda se pod i lahko skriva več različnih kvantnih števil.

Zahvaljujoč se zapisu upodobitve preko generatorjev (1.63), lahko definicijo (1.92) poenostavimo z

$$(X_a \psi^r)_i = \sum_{j=1}^{D(r)} \psi_j^r (X_a^r)_{ji} \tag{1.93}$$

Včasih malo ohlapno rečemo, da so funkcije ψ_i^r iz V v upodobitvi r grupe G , ko zadoščajo (1.92) oz. (1.93). Podobno kot smo neskončno dimenzionalno razcepno upodobitev grupe ali algebre razdelili na neskončno število končnih nerazcepnih upodobitev

$$G(\alpha) \rightarrow T^{r_1}(\alpha), T^{r_2}(\alpha), \dots \tag{1.94}$$

$$X_a \rightarrow X^{r_1}, X^{r_2}, \dots \tag{1.95}$$

razdelimo tudi vektorski prostor V , na katerega grupa G deluje, na neskočno končnih delov

$$V \rightarrow V^{r_1} \oplus V^{r_2} \oplus \dots \quad (1.96)$$

Ta stanja ψ^r predstavljajo ortonormirano bazo za celoten prostor V :

$$\int \psi_{i_1}^{r_1*} \psi_{i_2}^{r_2} = \delta^{r_1 r_2} \delta_{i_1 i_2} \quad (1.97)$$

Stanja včasih označujemo v notaciji bra-ket kot $|ri\rangle$. Tedaj se (1.97) zapiše kot

$$\langle r_1 i_1 | r_2 i_2 \rangle = \delta^{r_1 r_2} \delta_{i_1 i_2} \quad (1.98)$$

Primer 10. Upodobitve grupe $SO(3)$ poznamo iz vrtilne količine v kvantni mehaniki: ti operatorji so generatorji grupe. Vse upodobitve označimo s kvantnim številom l , kjer gre $l = 0, 1, \dots$. Upodobitve se klasificirajo kot

$$l = 0 \rightarrow \{X_a^{0,0}\} \quad (1.99)$$

$$l = 1 \rightarrow \{X_a^{1,1}, X_a^{1,0}, X_a^{1,-1}\} \quad (1.100)$$

$$l = 2 \rightarrow \{X_a^{2,2}, X_a^{2,1}, X_a^{2,0}, X_a^{2,-1}, X_a^{2,-2}\} \quad (1.101)$$

...

kjer so $X_a^{l,m}$ matrice velikosti $(2l+1) \times (2l+1)$ in $a = 1, 2, 3$. Kako eksplicitno zgledajo matrične upodobitve $X_a^{l,m}$ bomo videli pozneje.

Vektorski prostor V , na katerega grupa oziroma generatorji delujejo, je tu prostor funkcij koordinat 3-dimenzionalnega prostora (\vec{r}), oz. sferičnih koordinat (θ, ϕ) . Stanja, ki se transformirajo kot (1.92) oz. (1.93) so sferični harmoniki:

$$V^1 = \{Y_{0,0}\}(\theta, \phi) \quad (1.102)$$

$$V^3 = \{Y_{1,1}, Y_{1,0}, Y_{1,-1}\}(\theta, \phi) \quad (1.103)$$

$$V^5 = \{Y_{2,2}, Y_{2,1}, Y_{2,0}, Y_{2,-1}, Y_{2,-2}\}(\theta, \phi) \quad (1.104)$$

...

kjer smo na levi s številom označili dimenzijo $(2l+1)$ nerzcepne upodobitve l , na desni pa v zavutih oklepajih zapisali bazna stanja, ki razpenjajo podprostor. Sferični harmoniki predstavljajo ortonormirano bazo. \diamond

1.7 Tenzorski operatorji

Na stanja prostora V lahko delujejo tudi drugi operatorji, S , ne samo grupa G . Po analogiji s stanji rečemo, da se operatorji S_i^r , ki delujejo na linearen vektorski prostor V , transformirajo preko upodobitve $T^r(\alpha)$, če

$$S_i^{r'} \equiv (T(\alpha)S^r [T(\alpha)]^{-1})_i = \sum_{j=1}^{D(r)} S_j^r T_{ji}^r(\alpha) \quad (1.105)$$

kar zopet najlaže zapišemo z generatorji

$$[X_a, S_i^r] = \sum_{j=1}^{D(r)} S_j^r (X_a^r)_{ji} \quad (1.106)$$

1.8 Tenzorski produkt, Clebsch-Gordanovi koeficienti

Imejmo dve nerazcepni upodobitvi grupe G , $T^{r_1}(\alpha)$ in $T^{r_2}(\alpha)$. Produkt upodobitev je definiran kot

$$T^{r_1 \times r_2}(\alpha) = T^{r_1}(\alpha) \times T^{r_2}(\alpha) \quad (1.107)$$

Ta deluje na produktni prostor sestavljen is $\psi_i^{r_1} \psi_k^{r_2}$, tako da

$$(T^{r_1 \times r_2}(\alpha) \psi_i^{r_1} \psi_k^{r_2})_{ij} = \sum_{k=1}^{D(r_1)} T_{ki}^{r_1}(\alpha) \psi_k^{r_1} \sum_{l=1}^{D(r_2)} T_{lj}^{r_2}(\alpha) \psi_l^{r_2} \quad (1.108)$$

kar v komponentah pomeni

$$T_{kl;ij}^{r_1 \times r_2}(\alpha) = T_{ki}^{r_1}(\alpha) T_{lj}^{r_2}(\alpha) \quad (1.109)$$

oz. za generatorje

$$(X_a^{r_1 \times r_2})_{kl;ij} = (X_a^{r_1})_{ki} \delta_{lj} + \delta_{ki} (X_a^{r_2})_{lj} \quad (1.110)$$

Kaj to pravzaprav pomeni? Ta kombinacija je razcepna, dimenzija produkta upodobitve je namreč $(D(r_1)D(r_2)) \times (D(r_1)D(r_2))$. Ena naših glavnih nalog bo dobiti, v vsoto kakšnih nerazcepnih upodobitev se razcepi tenzorski produkt nerazcepnih upodobitev.

$$T^{r_1}(\alpha) \times T^{r_2}(\alpha) = \sum_n T^{r_n}(\alpha) \quad (1.111)$$

kjer mora veljati

$$D(r_1)D(r_2) = \sum_n D(r_n) \quad (1.112)$$

to je, kakšne r_n imamo na desni. V nadaljevanju se bomo večkrat posluževali zapisa, v katerem z dimenzijo $D(r)$ označimo kar upodobitev $T^r(\alpha)$. Tako je npr. 4 od $SU(4)$ kar 4-dimenzionalna upodobitev od $SU(4)$. V takem zapisu sta (1.111) in (1.112) v bistvu ena in ista stvar.

Za primer $SU(2)$ to že poznamo, ni nič drugega kot seštevanje vrtilnih količin/spinov. Za druge grupe se vsaj v primeru nizko-dimenzijskih upodobitev da uganit ko poznamo dimenzije upodobitev, saj je relacija (1.112) dokaj restriktivna.

Primer 11. *Vzemimo grupo $SO(3)$. Iz dveh upodobitev 3 ($l = 1$) lahko sestavimo v produktu samo $l = 0, 1, 2$ (če $\vec{L} = \vec{l}_1 + \vec{l}_2$ potem je $|l_1 - l_2| \leq L \leq l_1 + l_2$). Ker je dimenzija upodobitve $D = 2l + 1$ imamo*

$$3 \times 3 = (2 * 0 + 1) + (2 * 1 + 1) + (2 * 2 + 1) = 1 + 3 + 5 \quad (1.113)$$

kar sovпада z (1.112).

V splošnem velja za $SO(3)$ enačba (1.112) v obliki (privzamemo $l_1 \geq l_2$)

$$(2l_1 + 1) \times (2l_2 + 1) = \sum_{i=l_1-l_2}^{l_1+l_2} (2i + 1) \quad (1.114)$$

kar ni težko eksplicitno analitično preveriti, saj za vsako linearno funkcijo $f(x)$ velja

$$\sum_{i=a}^b f(i) = (b - a + 1) \frac{1}{2} (f(a) + f(b)) \quad (1.115)$$

Enačbo (1.114) seveda že poznamo iz kvantne mehanike. \diamond

Tako kot tenzorski produkt za upodobitve (matrike), poznamo tenzorski produkt za stanja vektorskega prostora, na katerega grupa deluje. Ta del vektorskega prostora se razcepi kot

$$V^{r_1 \times r_2} = \sum_n V^{r_n} \quad (1.116)$$

podobno kot (1.111). Torej se produkt stanj $\psi_{i_1}^{r_1} \in V^{r_1}$ in $\psi_{i_2}^{r_2} \in V^{r_2}$ tudi razcepi na nerazcepna stanja $\psi_{i_n}^{r_n} \in V^{r_n}$ kot

$$\psi_{i_1}^{r_1} \psi_{i_2}^{r_2} = \sum_{r_n, i_n} C_{r_1 i_1, r_2 i_2}^{r_n i_n} \psi_{i_n}^{r_n} \quad (1.117)$$

kjer so $C_{r_1 i_1, r_2 i_2}^{r_n i_n}$ Clebsch-Gordanovi koeficienti.

V $SO(3)$ se to zapiše v že znani obliki:

$$Y_{l_1 m_1}(\theta, \phi) Y_{l_2 m_2}(\theta, \phi) = \sum_{LM} C_{l_1 m_1, l_2 m_2}^{LM} Y_{LM}(\theta, \phi) \quad (1.118)$$

ali, z uporabo notacije bra-ket kot

$$|l_1 m_1 \rangle |l_2 m_2 \rangle = \sum_{LM} \langle LM | l_1 m_1, l_2 m_2 \rangle |LM \rangle \quad (1.119)$$

kjer je vsota omejena na $|l_1 - l_2| \leq L \leq |l_1 + l_2|$ in $M = m_1 + m_2$.

Za grupo $SU(N)$ lahko uporabimo računalniški program, ki numerično izračuna poljubne Clebsch-Gordanove koeficiente. Razlago postopka in povezavo s programom se da dobit v [5]. Na razpolago je tudi online verzija na [6].

1.9 Wigner-Eckartov izrek

To ste gotovo že slišali, zato ne bomo izgubljali dosti besed.

Zaradi (1.106) nosijo tudi tenzorji kvantna števila. Tako se npr. stanje

$$S_{i_1}^{r_1} \psi_{i_2}^{r_2} \quad (1.120)$$

iz vektorskega prostora V transformira pod akcijo generatorja X_a kot

$$\begin{aligned} X_a S_{i_1}^{r_1} \psi_{i_2}^{r_2} &= [X_a, S_{i_1}^{r_1}] \psi_{i_2}^{r_2} + S_{i_1}^{r_1} X_a \psi_{i_2}^{r_2} \\ &= S_j^{r_1} (X_a^{r_1})_{ji_1} \psi_{i_2}^{r_2} + S_{i_1}^{r_1} \psi_j^{r_2} (X_a^{r_2})_{ji_2} \\ &= S_j^{r_1} \psi_k^{r_2} \left((X_a^{r_1})_{ji_1} \delta_{ki_2} + \delta_{ji_1} (X_a^{r_2})_{ki_2} \right) \\ &= S_j^{r_1} \psi_k^{r_2} (X_a^{r_1 \times r_2})_{jk; i_1 i_2} \end{aligned} \quad (1.121)$$

povsem analogno kot se to dogaja s produktom stanj

$$\psi_{i_1}^{r_1} \psi_{i_2}^{r_2} \quad (1.122)$$

To pomeni, da lahko uporabimo analog razvoja (1.119) pri računu matričnega elementa. V primeru $SO(3)$ pomeni, da lahko tenzorje tudi razdelimo na take z dobrimi kvantnimi števili (lm), podobno kot to velja za stanja. Tedaj lahko uporabimo pravilo za produkt dveh upodobitev, kar dobimo pa pomnožimo še s tretjo.

Povejmo le bistvo: poljuben matrični element je lahko različen od nič le, če so kvantna števila obeh stanj (bra-ja in ket-a) ter operatorja (tenzorja) med njima kompatibilna, to je če so vsa kvantna števila elementa enaka nič. Rezultat je

$$\langle l_3 m_3 | S_{l_1 m_1} | l_2 m_2 \rangle = \langle l_3 m_3 | l_1 m_1; l_2 m_2 \rangle \langle l_3 | \hat{S}_{l_1} | l_2 \rangle \quad (1.123)$$

kjer $\langle l_3 | \hat{S}_{l_1} | l_2 \rangle$ ni treba posebej definirat, važno je le, da je neodvisen od m_1, m_2, m_3 . Še najboljše da se te količine znebimo v razmerju:

$$\frac{\langle l_3 m_3 | S_{l_1 m_1} | l_2 m_2 \rangle}{\langle l_3 m'_3 | S_{l_1 m'_1} | l_2 m'_2 \rangle} = \frac{\langle l_3 m_3 | l_1 m_1; l_2 m_2 \rangle}{\langle l_3 m'_3 | l_1 m'_1; l_2 m'_2 \rangle} \quad (1.124)$$

Na ta način je za dano trojico l_1, l_2, l_3 dovolj izračunati samo en neničelni matrični element, to je za eno samo trojico m_1, m_2, m_3 , za vse ostale pa poskrbi teorija grup z enačbo (1.124) (seveda moramo poznati Clebsch-Gordanove koeficiente).

1.10 Kaj se želimo naučiti

Namen teh predavanj je v glavnem razumet vsaj del tabel Slanskega [7]⁴, ali novejših tabel v [9] oz. v enem izmed najdaljših člankov nasploh (1851 strani, 836 tabel, prosim ne tiskati!) [10]. Pri tem ima [9] tudi opis in povezavo na (zastonj) kodo LieArt napisana za Mathematico. Obstaja tudi manj izdelana a kljub temu uporabna online verzija pripomočka za Lijeve grupe [11].

Vzemimo kot primer stran 190 (92). V tabeli 23 so v drugi koloni zapisane dimenzije nekaj najnižjih (z najmanjšo dimenzijo) nerazcepnih upodobitev grupe $SU(3)$. naučili se bomo, kako do teh števil pridemo pri grupi $SU(3)$, a tudi bolj splošno. Prva kolona iste tabele pa uporablja Dynkinov zapis upodobitve (pravzaprav, kot se bomo pozneje naučili, najvišje uteži nerazcepne upodobitve). Število nenegativnih celih števil je pri tem zapisu enako rangi grupe. Dynkinov zapis na enostaven in kompakten način klasificira vse nerazcepne upodobitve poljubne enostavne Lijeve grupe. Za $SU(3)$ so to enostavno $(m_1 m_2)$, kjer sta $m_{1,2} \geq 0$. Kako iz takega zapisa dobimo dimenzijo upodobitve oz. njegove lastnosti, bomo še zvedeli.

Tabela 24 na strani 191 (92) pa kaže, kako se produkti upodobitev razcepijo v vsote nerazcepnih upodobitev. Števila direktno povejo dimenzijo nerazcepne upodobitve. Vidimo nekaj zanimivosti:

- prečna črta nad številom (upodobitvijo) pomeni konjugirana upodobitev; če je upodobitev $T(\alpha)$ kompleksna, potem obstaja tudi konjugirana upodobitev $T^*(\alpha)$; za generatorje je to prehod $X_a \rightarrow -X_a^T$;
- indeksa s ali a pomenita simetrično ali anisimetrično upodobitev;
- včasih imamo lahko dve upodobitvi (ali več) enake dimenzije: razliko označimo z eno črtico (ali več);
- nekatere upodobitve so same sebi konjugirane (realne): izkaže se, da so to v primeru $SU(3)$ vse tiste upodobitve, za katere je Dynkinov zapis oblike (mm) , zato bomo npr. zamanj iskali $\bar{8}$ v tabeli 24;
- vsi produkti upodobitve in konjugirane upodobitve ($r \times \bar{r}$) vsebujejo v razcepu (na desni strani tabele 24) enojko (singlet); isto velja za produkt dveh enakih realnih upodobitev;
- produkti na levi morajo dati isti rezultat (stanj) kot vsote na levi (prečne črte in druge dodatne oznake tu niso važne, važna je samo dimenzija). Na primer $8 \times \bar{6} = 48$, isto kot je vsota $3 + \bar{6} + 15 + 24 = 48$;
- vsako od relacij lahko konjugiramo, npr.

⁴ Ta revijalni članek lahko v obliki preprinta dobimo na [8]. Kjerkoli bom omenil stran tega članka, bo v oklepaju še stran za tiste, ki imajo objavljeno verzijo. Na srečo oznake tabel, ki jih omenjam, v obeh verzijah sovpadajo

$$\bar{3} \times \bar{3} = 3_a + \bar{6}_s \rightarrow 3 \times 3 = \bar{3}_a + 6_s \quad (1.125)$$

Za SU(4) in višje grupe imamo tudi tabelo razvejitenih pravil (npr. tabela 27 na strani 194 (93)), to je kako se nerazcepna upodobitev dane grupe razdeli na več nerazcepnih upodobitev podgrupe. Tudi tukaj vidimo nekaj reda:

- na desni in levi se število stanj ujema; 20 je namreč isto kot $3 + 3 + 6 + 8$;
- v oklepaju so zapisani U(1) naboji stanj; vsota vseh U(1) nabojev poljubne upodobitve je nič, in to ne samo za grupo SU(4), pač pa za poljubno enostavno grupo. Preverimo to na primeru 35, vsota U(1) nabojev je res nič:

$$1 \times 4 + 3 \times \frac{8}{3} + 6 \times \frac{4}{3} + 10 \times 0 + 15 \times \left(-\frac{4}{3}\right) = 0 \quad (1.126)$$

Naučili se bomo take tabele razumet, uporabljat, in jih izpeljat. Seveda je to že ogromno, dokazov zato v glavnem ne bomo izpeljevali.

Primer 12. *Vzemimo grupo SU(3). Iz Slanskega [7] razberemo npr. da je (pri štetju stanj prečne črte in druge oznake ne igrajo nobene vloge, le dimenzionalnost je važna)*

$$3 \times 3 = \bar{3}_a + 6_s \quad (1.127)$$

To bi lahko skoraj uganili s tem malim kar smo povedali. Dimenzije upodobitev do $3 \times 3 = 9$ so 1, 3, 6, 8 (to preberemo iz Slanskega). Če se omejimo le na možnosti, v katerih nastopa dana dimenzija ne več kot enkrat (to sicer v splošnem sploh ni res, je pa obratno nenavadno pri majhnih dimenzijah), lahko dobimo 9 le z vsotama $3 + 6$ ali $1 + 8$. Singlete 1 dobimo pri produktu realne upodobitve s samo seboj, ali pa pri produktu upodobitve in njej konjugirane upodobitve. Ker 3 ni sebi konjugirana upodobitev (njen Dynkin indeks (10) ni oblike (mm)), je $1 + 8$ rezervirana za

$$3 \times \bar{3} = 1 + 8 \quad (1.128)$$

ostane torej le možnost (1.127). V Slanskem je sicer zapisana konjugirana verzija.

Indeksa s in a in kje leži prečna bomo razumeli v naslednjem poglavju, kjer bomo tudi prejšnje razmišljanje podprli z "izpeljavo". ◇

2 Malo bolj konkretno

2.1 Tenzorske metode

2.1.1 SO(3)

Vzemimo grupo SO(3) in upodobitev 3 (s številko bomo večkrat označevali upodobitev, in istočasno njeno dimenzijo), to je vektor. Dva taka vektorja zapišemo v bazi e_i , $i = 1, 2, 3$, kot

$$a_i e_i \quad , \quad b_i e_i \quad (2.1)$$

Komponente se transformirajo pod SO(3) kot

$$a'_i = O_{ij} a_j \quad , \quad b'_i = O_{ij} b_j \quad (2.2)$$

kjer je O_{ij} ortogonalna matrika 3×3 z determinanto 1:

$$O_{ik} O_{jk} = O_{ki} O_{kj} = \delta_{ij} \quad , \quad Det(O) = 1 \quad (2.3)$$

Z (2.1) lahko sestavimo $3 \times 3 = 9$ kombinacij. Produkt

$$3_i \times 3'_j = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & a_1 b_2 & a_1 b_3 \\ a_2 b_1 & a_2 b_2 & a_2 b_3 \\ a_3 b_1 & a_3 b_2 & a_3 b_3 \end{pmatrix}_{ij} = a_i b_j \quad (2.4)$$

razdelimo lahko na tri dele:

- na simetrično brezsledno kombinacijo ($a \cdot b \equiv a_k b_l \delta_{kl}$)

$$\frac{1}{2} \left(a_i b_j + a_j b_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} a \cdot b \right) \quad (2.5)$$

- na sled

$$\frac{1}{12} \delta_{ij} a \cdot b \quad (2.6)$$

- in na antisimetrično kombinacijo

$$\frac{1}{2} (a_i b_j - a_j b_i) \quad (2.7)$$

Po številu prostostnih stopenj imamo res

$$5_{ij} = a_i b_j + a_j b_i - \frac{2}{3} \delta_{ij} a \cdot b \quad (2.8)$$

$$1 = a \cdot b \quad (2.9)$$

$$3_k = \epsilon_{kij} a_i b_j \quad (2.10)$$

in torej

$$3 \times 3 = 1 + 3 + 5 \quad (2.11)$$

Kako se pa stanja (2.8), (2.9), (2.10) transformirajo? Zaradi (2.2) in ker velja⁵

$$O_{ik}O_{jl}\delta_{kl} = \delta_{ij} \quad (2.12)$$

$$O_{ia}O_{jb}O_{kc}\epsilon_{ijk} = \epsilon_{abc} \quad (2.13)$$

izpeljemo, da

$$5'_{ij} = O_{ik}O_{jl}5_{kl} \quad (2.14)$$

$$1' = 1 \quad (2.15)$$

$$3'_i = O_{ij}3_j \quad (2.16)$$

Zapomnimo si:

- uporabili smo dva tenzorja δ_{ij} in ϵ_{ijk} (zaradi (2.12) in (2.13) ju imenujemo invariantna tenzorja), drugih takih tenzorjev ni;
- indekse smo zapisali vse spodaj, lahko bi jih tudi drugače, v ortogonalnih grupah $SO(N)$ je to nepomembno;
- število ortogonalnih matrik na desni strani (2.14), (2.15), (2.16) je enako številu indeksov na levi strani; 1 v (2.15) se res obnaša kot singlet, 3 pa, tako kot v (2.2), kot triplet;
- dva 3-vektorja lahko sestavimo v skalarni produkt, to je singlet 1, ali v vektorski produkt, to je triplet 3. Oboje smo zgoraj dobili. Zadnja možnost je brezsledni tenzor, to je 5.

Zdaj lahko postopek nadaljujemo, npr. (2.4) pomnožimo še s c_k . Pridemo do sledečih zaključkov:

- poljuben tenzor ima obliko

$$T_{i_1 \dots i_n} \quad (2.17)$$

in se transformira kot

$$T'_{i_1 \dots i_n} = O_{i_1 j_1} \dots O_{i_n j_n} T_{j_1 \dots j_n} \quad (2.18)$$

⁵Prva relacija ni nič drugega kot $(OO^T)_{ij} = \delta_{ij}$. Drugo enačbo pa dobimo tako, da opazimo, da je leva stran popolnoma antisimetrična na izmenjavo poljubnih dveh indeksov izmed a, b, c , in torej sorazmerna edinemu takemu tenzorju s tremi indeksi, ϵ_{abc} ; sorazmerni faktor določimo iz relacije $1 = \text{Det}(O) \equiv \frac{1}{3!} \epsilon_{abc} \epsilon_{ijk} O_{ai} O_{bj} O_{ck}$ in seveda $\epsilon_{abc} \epsilon_{abc} = 3!$.

- s takimi tenzorji plus z invariantnima tenzorjema δ_{ij} in ϵ_{ijk} lahko sestavimo druge tenzorje;
- invariante (singlete) dobimo, če pri poljubnem takem zmnožku vsi indeksi nastopajo dvakrat (implicitna sumacija je seveda že cel čas v teku), npr

$$A_{ij}B_{jklm}\epsilon_{ikl}C_n\delta_{mn} \quad (2.19)$$

- še najbolj zapleteno je tukaj iskanje nerazcepnih upodobitev, npr. brezslednih tenzorjev in podobno.

Primer 13. Naj $SO(3)$ deluje na prostor linearnih polinomov na \mathbb{R}^3 . Baza je

$$x, y, z \quad (2.20)$$

ta prostor je ireducibilen. Tenzorski produkt dveh takih upodobitev tvori prostor vseh kvadratnih polinomov na \mathbb{R}^3 , z bazo

$$x^2, y^2, z^2, xy, xz, yz \quad (2.21)$$

Vidimo, da jih ni $3 \times 3 = 9$ kot prej, to pa zato, ker antisimetrične kombinacije $\epsilon_{ijk}e_i e_j$ ni (pravzaprav je identično enaka 0, saj je produkt simetrične kombinacije $e_i e_j$ z antisimetrično ϵ_{ijk}). 6-dimenzionalni prostor je reducibilen, saj se kombinacija

$$x^2 + y^2 + z^2 \quad (2.22)$$

obnaša pod $SO(3)$ kot singlet.

V tem primeru bi torej bolj informativen zapis bil pravzaprav

$$3 \times 3 = 1 + 3_a + 5_s \quad (2.23)$$

◇

2.1.2 $SO(N)$

Vse kar je bilo rečeno za $SO(3)$ lahko ponovimo za $SO(N)$. Je pa ena bistvena razlika: čeprav ostane simetričen tenzor δ_{ij} enake oblike, ima tenzor

$$\epsilon_{i_1 \dots i_N} \quad (2.24)$$

zdaj N indeksov, popolnoma antisimetričnih na zamenjavo.

2.1.3 SU(3)

V primerjavi s SO(3) je tukaj glavna razlika ta, da imamo lahko indekse zgoraj, ali pa spodaj, in imajo različen pomen. Tako imamo lahko upodobitev 3 ali $\bar{3}$ (to je 3 konjugirana):

$$3 \rightarrow a^i \quad , \quad \bar{3} \rightarrow \bar{b}_i \quad (2.25)$$

Tudi nad grupnimi transformacijami se obnašata stanji različno:

$$a^{i'} = U^i_j a^j \quad (2.26)$$

$$\bar{b}'_i = \bar{b}_j (U^\dagger)^j_i \quad (2.27)$$

Taka definicija avtomatično upošteva, da je kombinacija $\bar{b}.a$ ($\equiv \bar{b}_k \delta^k_l a^l$) invarianta:

$$(\bar{b}.a)' = \bar{b}'_i a^{i'} = \bar{b}_j (U^\dagger)^j_i U^i_k a^k = \bar{b}_j \delta^j_k a^k = \bar{b}_j a^j = \bar{b}.a \quad (2.28)$$

Podobno kot prej pridemo do sledečih ugotovitev:

- invariantni tenzorji so zdaj δ_j^i (en indeks zgoraj, en spodaj), ϵ_{ijk} (3 indeksi spodaj) ali ϵ^{ijk} (3 indeksi zgoraj)
- dva indeksa se lahko ponovita (sumacija je tudi tukaj implicitna) samo če je en indeks zgoraj, drugi pa spodaj;
- tenzor z n indeksi zgoraj in m indeksi spodaj se pod SU(3) transformira kot zmnožek n vektorjev tipa a^i in m vektorjev tipa \bar{b}_i :

$$T_{j_1 \dots j_m}^{i_1 \dots i_n'} = U^{i_1}_{k_1} \dots U^{i_n}_{k_n} (U^\dagger)^{l_1}_{j_1} \dots (U^\dagger)^{l_m}_{j_m} T_{l_1 \dots l_m}^{k_1 \dots k_n} \quad (2.29)$$

- kombinacija tenzorjev je singlet, če se vsi indeksi zgoraj in spodaj kontrahirajo:

$$T_k^{ij} \delta^{kl} \epsilon_{ijs} S_l^s \quad (2.30)$$

Primer 14. Sedaj imamo že dovolj informacije, da razumemo primer 12 boljše. Iz dveh kompleksnih 3-vektorjev lahko sestavimo antisimetričen del

$$\bar{c}_i = \epsilon_{ijk} a^j b^k \quad (2.31)$$

in ga zato označimo s 3_a , ali pa simetričen del

$$T^{ij} = a^i b^j + a^j b^i \quad (2.32)$$

in ga zato označimo s 6_s . Z razliko od podobnega produkta v SO(3) tukaj nimamo sledi, saj dva indeksa zgoraj ne moremo kontrahirati (to lahko naredimo v SU(3) samo z enim indeksom zgoraj, enim spodaj). Skratka,

$$a^i b^j = \frac{1}{2} \epsilon^{ijl} \bar{c}_l + \frac{1}{2} T^{ij} \quad (2.33)$$

oz., kot pravi Slansky,

$$3 \times 3 = \bar{3}_a + 6_s \quad (2.34)$$

Pač pa imamo primer z brezslednostjo pri tenzorskem produktu $3 \times \bar{3}$, ki ga lahko zapišemo kot (pri $SU(3)$ velja $\delta^i_j \delta^j_i = 3$)

$$a^i \bar{b}_j = \left(a^i \bar{b}_j - \delta^i_j \frac{1}{3} a \cdot \bar{b} \right) + \delta^i_j \frac{1}{3} a \cdot \bar{b} \quad (2.35)$$

kar predstavlja

$$3 \times \bar{3} = 8 + 1 \quad (2.36)$$

◇

Primer 15. Kot smo videli je 6 dva indeksa simetrični tenzor ($6^{ij} = 6^{ji}$). Iz produkta 6×3 lahko sestavimo

$$6^{ij} 3^k = \frac{1}{3} (6^{ij} 3^k + 6^{ik} 3^j + 6^{kj} 3^i) + \frac{1}{3} (6^{ij} 3^k - 6^{ik} 3^j + 6^{ji} 3^k - 6^{jk} 3^i) \quad (2.37)$$

◇

V prvem oklepaju je popolnoma simetrična kombinacija treh indeksov, z $\frac{3 \times 4 \times 5}{3 \times 2 \times 1} = 10$ neodvisnimi komponentami, v drugem pa

$$\begin{aligned} (6^{ij} 3^k - 6^{ik} 3^j) + (6^{ji} 3^k - 6^{jk} 3^i) &= (\delta_a^j \delta_b^k - \delta_b^j \delta_a^k) 6^{ia} 3^b + (\delta_a^i \delta_b^k - \delta_b^i \delta_a^k) 6^{ja} 3^b \\ &= \epsilon^{jkn} \epsilon_{abn} 6^{ia} 3^b + \epsilon^{ikn} \epsilon_{abn} 6^{ja} 3^b \end{aligned} \quad (2.38)$$

nastopa adjungirana kombinacija

$$\Sigma_n^m = \epsilon_{abn} 6^{ma} 3^b \quad (2.39)$$

torej

$$6 \times 3 = 10 + 8 \quad (2.40)$$

2.1.4 $SU(N)$

Kar se tiče transformacij je stvar zelo podobna kot pri $SU(3)$, edino ϵ je treba ustrezno zapisati z N popolnoma antisimetričnimi indeksi (ali vsi zgoraj ali vsi spodaj).

2.2 Youngovi diagrami

Zgornja tenzorska metoda sicer nazorno pokaže, kako in zakaj razstavimo razcepno upodobitev pri produktu v vsoto nerazcepnih upodobitev. Na ta način tudi dobimo vse nerazcepne upodobitve: to so enostavno tenzorji z indeksi spodaj in/ali zgoraj, ter z dodatnimi pogoji o brezslednosti, simetričnosti in/ali antisimetričnosti. Vendar pa postane recept hitro dolgovezen, tako da je težko dobit nerazcepne upodobitve, njene dimenzije, da niti ne govorimo o razcepu pri produktu. Na srečo pa obstaja zelo nazorna metoda preko takoimenovanih Youngovih diagramov, ki jo bomo v naslednjih nekaj straneh razložili.

Youngov diagram, ki ponazarja nerazcepno upodobitev grupe $SU(N)$ je skupek povezanih kvadratov (celic) z maksimalno številom vrstic $N - 1$ in poljubnim številom stolpcev, tako da se vse vrstice začnejo na isti vertikali in da se dolžina vrstic ne večja v smeri navzdol. Tako so npr.

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \square & \square \\ \hline \square & \\ \hline \end{array}, \quad
 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & & & \\ \hline \end{array}, \quad
 \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2.41)$$

dovoljeni, medtem ko to ni res za npr.

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square \\ \hline \end{array}, \quad
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array}, \quad
 \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array} \quad (2.42)$$

Še nekaj: če imamo v diagramu slučajno (to se bo v prihodnjem zgodilo) stolpec z N celicami, ga lahko direktno izpustimo.

2.2.1 Dimenzija nerazcepne upodobitve

Dimenzijo nerazcepne upodobitve grupe $SU(N)$ ponazorjene z Youngovim diagramom dobimo iz sledečega razmerja:

- števec kot zmnožek celih števil, s katerimi napolnimo Youngov diagram tako da:
 - v 1. vrstici začnemo na levi z N , nadaljujemo z $N + 1$, nato $N + 2$, itd.
 - v 2. vrstici začnemo z $N - 1$, nato N , nato $N + 1$, itd.
 - itd.
- imenovalec kot zmnožek celih števil, s katerimi napolnimo Youngov diagram tako da je v vsakem polju napisano število kvadratov v istem stolpcu spodaj plus število kvadratov v isti vrstici na desni plus ena.

Primer 16. *Vzemimo grupo $SU(3)$ in Youngov diagram naj bo*

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \square & & \\ \hline \end{array} \quad (2.43)$$

Da dobimo dimenzijo (2.43) izračunamo najprej števec kot produkt vseh števil

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 4 & 5 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \quad (2.44)$$

to je

$$\check{S} = 3 \times 4 \times 5 \times 2 \quad (2.45)$$

nato pa še imenovalec iz

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 1 \\ \hline 1 & & \\ \hline \end{array} \quad (2.46)$$

kot

$$I = 4 \times 2 \times 1 \times 1 \quad (2.47)$$

Dimenzija je torej

$$D = \frac{\check{S}}{I} = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 2}{4 \times 2 \times 1 \times 1} = 15 \quad (2.48)$$

◇

Primer 17. Kaj pa isti diagram (2.43) v $SU(5)$?

Zdaj se stvari spremenijo, saj je števec različen, produkt vseh števil v

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 5 & 6 & 7 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array} \quad (2.49)$$

to je

$$\check{S} = 5 \times 6 \times 7 \times 4 \quad (2.50)$$

imenovalec pa enak kot prej, tako da je dimenzija zdaj

$$D = \frac{\check{S}}{I} = \frac{5 \times 6 \times 7 \times 4}{4 \times 2 \times 1 \times 1} = 105 \quad (2.51)$$

◇

Dva komentarja:

- ne splača se zares pomnožit pri računanju števca in imenovalca posebej, ker se bo marsikateri skupni faktor krajšal v razmerju;
- bistvena sta dva podatka, grupa in Youngov diagram.

2.2.2 Produkt upodobitve

Youngovi diagrami so tudi zelo uporabni pri dekompoziciji produkta na nerazcepne upodobitve. Pravilo, kako to narediti, je sledeče:

- en diagram od dveh, recimo drugi, zapolnimo s črkami, tako da imajo vse celice 1. vrste oznako a , 2. vrste oznako b , itd.
- prvemu diagramu dodamo vse celice 1. vrstice drugega diagrama tako, da je v vsakem stolpcu največ en a , in da so dobljeni diagrami dovoljeni (to pomeni, da vsaka višja vrsta ni krajša od nižje, in da vsaki levi stolpec ni krajši od desnega - pravila za sestavo diagramov pač); pri tem vsak stolpec z N elementi izpustimo, ravno tako izpustimo vsak diagram s stolpcem z več kot N elementi;
- isti postopek nadaljujemo z drugo vrstico drugega diagrama, z b -ji; edini dodaten pogoj je, da niso vsi tako dobljeni diagrami sprejemljivi: ohranimo le tiste, za katere velja, da je v vsaki celici diagrama skupna vsota vseh a -jev v celici sami, desno in nad njo večje ali enako dobljeni skupni vsoti b -jev.
- enako s c -ji 3. vrstice drugega diagrama, zdaj mora število c -jev dobljenem po zgornjem postopku povsod bit manjše ali enako od števila b -jev, itd.

Jasno je težko to razumeti. Zato poskusimo kakšno vajo.

Primer 18. *Poiščimo dekompozicijo produkta 3×3 v $SU(3)$:*

$$\begin{array}{c} \square \times \square \rightarrow \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \times \begin{array}{c} a \\ \square \end{array} \\ = \begin{array}{c} \square \\ a \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} a \end{array} \quad (2.52)$$

◇

in torej

$$3 \times 3 = \bar{3} + 6 \quad (2.53)$$

Sedaj pa poiščimo $\bar{3} \times 3$:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \times \square \rightarrow \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \times \begin{array}{c} a \\ \square \end{array} \\ = \begin{array}{c} \square \\ \square \\ a \end{array} + \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} a \end{array} \quad (2.54)$$

in torej

$$\bar{3} \times 3 = 1 + 8 \quad (2.55)$$

Sedaj pa poskusimo primer z dvema vrsticama v drugem diagramu, tako pa tudi preverimo, da je produkt komutativen:

$$\begin{aligned} \square \times \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array} &\rightarrow \square \times \begin{array}{|c|} \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} \\ &= \left(\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline \end{array} \right) \times \begin{array}{|c|} \hline b \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline a \\ \hline b \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|} \hline & a \\ \hline b & \\ \hline \end{array} \end{aligned} \quad (2.56)$$

in torej spet kot (2.55):

$$3 \times \bar{3} = 1 + 8 \quad (2.57)$$

Vaja 3. Reši spodnji dve vaji:

- Iz petih celic sestavi vse možne Youngove diagrame za $SU(N)$ in izračunaj njihove dimenzije tako da posebej določiš produkte v števcu in imenovalcu;
- Preveri, ali so procesi $i_1 i_2 \rightarrow i_3 i_4$ možni, če se začetna stanja (delci) i_1, i_2 in končna stanja i_3, i_4 transformirajo pod $SU(N)$ kot v tabeli 2 ($i_k \in r_k, k = 1, \dots, 4$).

	SU(2)	SU(3)	SU(4)	SU(5)
r_1	2	3	4	10
r_2	3	8	4	$\bar{5}$
r_3	3	10	$\frac{4}{2}$	10
r_4	6	3	$\frac{4}{2}$	10

Tabela 2: Primer začetnih (r_1, r_2) in končnih stanj (r_3, r_4)

Koliko neodvisnih kanalov (to je, koliko različnih izbir $i_k \in r_k, k = 1, \dots, 4$) imamo pri možnih procesih?

△

Primer 19. Poskusimo sedaj pogledat v $SU(5)$ primer procesa $10 \times \bar{5} \rightarrow \bar{10} \times \bar{10}$. Iz Slanskega preberemo, da tako začetno stanje kot končno vsebujeta 5 in 45 (to zadnje obstaja v končnem stanju le kot antisimetrična kombinacija). Torej sta to dva neodvisna kanala, tako da potrebujemo dve neodvisni meritvi, in šele zatem lahko preko poznavanja Clebsch-Gordanovih koeficientov v principu izračunamo vse ostale kanale (Wigner-Eckartov izrek).

Vendar se navidez pojavi sledeči problem. Proces je možen, če obstajajo invariante oblike

$$10_1 \bar{5} \overline{10}_2^* \overline{10}_3^* \rightarrow \bar{5} 10_1 10_2 10_3 \quad (2.58)$$

Rezultat poznamo, 2 taki invarianti morata biti neodvisni. Tu je pa problem, ker vsaj navidezno lahko zapišemo 3 (in ne samo 2) invariante:

$$V = a \bar{5}_k 10_1^{ki} 10_2^{jl} 10_3^{mn} \epsilon_{ijlmn} + b \bar{5}_k 10_1^{ij} 10_2^{kl} 10_3^{mn} \epsilon_{ijlmn} + c \bar{5}_k 10_1^{ij} 10_2^{lm} 10_3^{kn} \epsilon_{ijlmn} \quad (2.59)$$

Problem bomo lažje rešili, če zgornji izraz (2.59) zapišemo bolj simetrično:

$$\begin{aligned} V &= \bar{5}_k 10_1^{i_1 i_2} 10_2^{i_3 i_4} 10_3^{i_5 i_6} \left(a \delta_{i_1}^k \epsilon_{i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} + b \delta_{i_3}^k \epsilon_{i_1 i_2 i_4 i_5 i_6} + c \delta_{i_5}^k \epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_6} \right) \\ &= \bar{5}_k 10_1^{i_1 i_2} 10_2^{i_3 i_4} 10_3^{i_5 i_6} \left(\frac{a}{2} \left(\delta_{i_1}^k \epsilon_{i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} - \delta_{i_2}^k \epsilon_{i_3 i_4 i_5 i_6 i_1} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{b}{2} \left(\delta_{i_3}^k \epsilon_{i_4 i_5 i_6 i_1 i_2} - \delta_{i_4}^k \epsilon_{i_5 i_6 i_1 i_2 i_3} \right) + \frac{c}{2} \left(\delta_{i_5}^k \epsilon_{i_6 i_1 i_2 i_3 i_4} - \delta_{i_6}^k \epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} \right) \right) \end{aligned} \quad (2.60)$$

Ker pa v $SU(5)$ ni popolnoma antisimetrične kombinacije 6 indeksov, velja⁶

$$\delta_{i_1}^k \epsilon_{i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} - \delta_{i_2}^k \epsilon_{i_3 i_4 i_5 i_6 i_1} + \delta_{i_3}^k \epsilon_{i_4 i_5 i_6 i_1 i_2} - \delta_{i_4}^k \epsilon_{i_5 i_6 i_1 i_2 i_3} + \delta_{i_5}^k \epsilon_{i_6 i_1 i_2 i_3 i_4} - \delta_{i_6}^k \epsilon_{i_1 i_2 i_3 i_4 i_5} = 0 \quad (2.61)$$

kar uporabimo, da dobimo

$$V = \bar{5}_k 10_1^{i_1 i_2} 10_2^{i_3 i_4} 10_3^{i_5 i_6} \left((a - c) \delta_{i_1}^k \epsilon_{i_2 i_3 i_4 i_5 i_6} + (b - c) \delta_{i_3}^k \epsilon_{i_4 i_5 i_6 i_1 i_2} \right) \quad (2.62)$$

Torej sta samo 2 linearno neodvisni $SU(5)$ invarianti, kar smo želeli dokazati. \diamond

Vaja 4. V $SU(5)$ s stanji, ki se transformirajo kot $\bar{5}$, $\bar{5}$, 10 in 24 sestavi vse invariante (singlete) iz produktov do maksimalno tretjega reda. To naredi na dva različna načina: najprej v tenzorskem zapisu določi produkte, v katerih se vsi zgornji indeksi sumirajo s spodnjimi; nato pa za produkte poljubnih dveh stanj preveri, ali se da dobit singlet ali pa tako stanje, ki v produktu s tretjim stanjem zopet da singlet. \triangle

2.2.3 Dynkinov zapis

Končno lahko nekaj povemo še o Dynkinovem zapisu nerazcepne upodobitve. Za $SU(N)$ je to zaporedje $N - 1$ celih nenegativnih števil, ki jih iz Youngovega diagrama dobimo tako, da odštevamo število celic v zaporednih vrsticah. Tako ima npr. diagram (2.43) v prvi vrstici 3 celice, v drugi pa 1. Pri grupi $SU(3)$ je v Dynkinovem zapisu to (21), ker je $3 - 1 = 2$ in $1 - 0 = 1$.

Primer 20. Razčistimo nekaj podrobnosti:

⁶To preverimo tako, da zamenjamo poljubna dva indeksa, npr. $i_1 \leftrightarrow i_2$ ali $i_1 \leftrightarrow i_3$: dobimo minus prejšnjo kombinacijo.

- Kako bi (2.43) zapisali po Dynkinu v $SU(N)$ za $N > 3$? Prvi dve števili sta enaki kot za $SU(3)$, na ostala $N - 3$ mesta pa dodamo ničle. V $SU(7)$ bi npr. zgledalo kot (210000).
- Kako pa zapišemo po Dynkinu (2.43) v $SU(2)$? Vse stolpce daljše od $N - 1 = 1$ izpustimo, ostane

$$\begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline \end{array} \quad (2.63)$$

Torej je Dynkinov zapis za ta primer kar (2).

◇

Obratno pa dobimo Youngov diagram iz Dynkinovega zapisa $(d_1 \dots d_{N-1})$ v $SU(N)$ tako, da je dolžina i -te vrstice n_i ($i = 1, \dots, N - 1$) rešitev sistema

$$\begin{aligned} n_1 - n_2 &= d_1 \\ n_2 - n_3 &= d_2 \\ &\dots = \dots \\ n_{N-2} - n_{N-1} &= d_{N-2} \\ n_{N-1} &= d_{N-1} \end{aligned} \quad (2.64)$$

Rešitev tega je seveda

$$n_i = \sum_{j=i}^{N-1} d_j \quad (2.65)$$

Primer 21. Kakšen je Youngov diagram upodobitve (421) v $SU(4)$?

Prva vrstica ima $4 + 2 + 1 = 7$ celic, druga $2 + 1 = 3$ celic, tretja in zadnja pa 1 celico, torej

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline & & & & & & \\ \hline \end{array} \quad (2.66)$$

To lahko preverimo: po eni strani lahko izračunamo dimenzijo Youngovega diagrama (2.66), po drugi strani pa lahko preverimo v tabeli Slanskega, kakšno dimenzijo ima upodobitev (421). ◇

2.2.4 Konjugirana upodobitev

Če ima nerazcepna upodobitev Dynkinov zapis (d_1, \dots, d_N) , potem je v $SU(N)$ konjugirana upodobitev tista z zrcaljenim Dynkinovim zapisom (d_N, \dots, d_1) .

Primer 22. Pokažimo, da ima konjugirana upodobitev v $SU(3)$ isto dimenzijo kot originalna upodobitev.

Poljubno upodobitev v $SU(3)$ označimo z (d_1, d_2) . Njen Youngov diagram ima prvo vrstico z $n_1 = d_1 + d_2$ škatlami, drugo pa z $n_2 = d_2$ škatlami. Izračunajmo dimenzijo takega diagrama:

$$\begin{aligned}\check{S} &= 3 \times \dots \times (3 + n_1 - 1) \times 2 \times \dots \times (2 + n_2 - 1) \\ &= \frac{1}{2}(n_1 + 2)!(n_2 + 1)!\end{aligned}\tag{2.67}$$

$$\begin{aligned}\text{I} &= n_2!(n_1 - n_2)!(n_1 + 1) \times \dots \times (n_1 + 1 - (n_2 - 1)) \\ &= \frac{1}{(n_1 - n_2 + 1)} n_2!(n_1 + 1)!\end{aligned}\tag{2.68}$$

in končno

$$D = \frac{\check{S}}{\text{I}} = \frac{(n_1 + 2)(n_2 + 1)(n_1 - n_2 + 1)}{2}\tag{2.69}$$

kar se v Dynkinovem zapisu elegantno in simetrično izrazi kot

$$D = (1 + d_1)(1 + d_2) \left(1 + \frac{d_1 + d_2}{2}\right)\tag{2.70}$$

Jasno je to invariantno na zamenjavo $d_1 \leftrightarrow d_2$. S tem smo dokazali, da imata upodobitvi (d_1, d_2) in (d_2, d_1) v $SU(3)$ isto dimenzijo. \diamond

3 Nekaj fizike

3.1 Spontani zlom simetrije

V fiziki delcev se posamezni osnovni delci tipično transformirajo pod različnimi simetrijami kot nerazcepne upodobitve. Tako se npr. v kromodinamiki kvark up transformira pod barvno simetrijo $SU(3)$ kot triplet:

$$u = \begin{pmatrix} u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix}, \quad u^{\alpha'} = U^\alpha{}_\beta u^\beta\tag{3.1}$$

kjer je U unitarna matrika rotacije $SU(3)$ v barvnem prostoru.

Tako opisuje kromodinamiko Lagrangeva gostota, ki je invariantna na barvno $SU(3)$.

Ko imamo opravka s skalarnimi delci (to so delci s spinom 0), potem je osnovno stanje sistema določeno preko (vsaj lokalnega) minimuma potenciala, ki je funkcija teh skalarnih polj. Če se ti skalarni delci obnašajo kot netrivialna upodobitev pod neko interno simetrijo (kot je to bila zgoraj omenjena $SU(3)$ v primeru kvarkov), potem mora Lagrangeva gostota

in ravno tako potencial biti invariantna na to simetrijo. To pomeni, da se morata zapisati kot neka kombinacija invariant nad to simetrijo.

Vzemimo standardni primer, vektorsko upodobitev v $SO(3)$. Potencial razvijemo v okolici izhodišča v splošnem kot

$$V = \frac{m^2}{2} \vec{\phi}^2 + \frac{\lambda}{4} (\vec{\phi}^2)^2 \quad (3.2)$$

Ta funkcija je invarianta nad $SO(3)$, saj je polinom kombinacije

$$\vec{\phi}^2 \equiv \phi_i \phi_i \quad (3.3)$$

invarianta:

$$\vec{\phi}^{2i} = \phi'_i \phi'_i = O_{ij} \phi_j O_{ik} \phi_k \rightarrow \delta_{jk} \phi_j \phi_k = \vec{\phi}^2 \quad (3.4)$$

Količine m^2 in λ so parametri modela. Minimum potenciala dobimo tako, da najprej dinamično polje $\vec{\phi}$ zamenjamo z vakuumsko pričakovano vrednostjo $\langle \vec{\phi} \rangle$, nato uporabimo simetrijo $SO(3)$, s katero vakuumsko pričakovano vrednost $\langle \vec{\phi} \rangle$ zarotiramo v neko fiksno smer, recimo v smer tretje komponente:

$$\langle \vec{\phi} \rangle \rightarrow O \langle \vec{\phi} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

Torej postane invarianta

$$\langle \vec{\phi} \rangle^2 \rightarrow v^2 \quad (3.6)$$

in potencial

$$V = \frac{m^2}{2} v^2 + \frac{\lambda}{4} v^4 \quad (3.7)$$

To je enostavno minimizirati (zdaj vidimo zakaj smo v začetni definiciji (3.2) dali polovičko in četrtinko)

$$\frac{\partial V}{\partial v} = v (m^2 + \lambda v^2) = 0 \quad (3.8)$$

Ker je $\lambda > 0$ posledica zahteve po navzdol omejenem potencialu⁷, je potem vse odvisno od predznaka m^2 .

Če $m^2 > 0$, je edina rešitev

$$v = 0 \rightarrow V = 0 \quad (3.9)$$

medtem ko $m^2 < 0$ da 3 rešitve, v_0, v_{\pm} :

⁷potencial si lahko mislimo kot neke vrste gostota energije sistema, ki jasno ne želimo da bi bila $-\infty$ ko $\vec{\phi}^2 \rightarrow \infty$.

$$v_0 \equiv 0 \rightarrow V = 0 \quad (3.10)$$

$$v_{\pm} \equiv \pm \sqrt{\frac{-m^2}{\lambda}} \rightarrow V = -\frac{m^4}{4\lambda} < 0 \quad (3.11)$$

Minimum je tisti, ki ima drugi odvod pozitiven. Za $m^2 > 0$ je to zagotovljeno pri $v = 0$ (3.9), pri $m^2 < 0$ pa imamo

$$V''(v_0) = m^2 < 0 \quad (3.12)$$

$$V''(v_{\pm}) = m^2 + 3\lambda v_{\pm}^2 = -2m^2 > 0 \quad (3.13)$$

Torej je minimum v v_+ ali v_- , kateri od dveh sploh ni važno, zato naj bo v_+ . Važno pa je, da je $\langle \vec{\phi} \rangle \neq 0$. Pravimo, da smo spontano zlomili simetrijo, saj vakuumsko stanje $\langle \vec{\phi} \rangle \neq 0$ ni več simetrično nad celo $SO(3)$, pač pa samo na njeno podgrupo $SO(2)$. To določimo tako, da zahtevamo ($O = \exp(i\alpha_a X_a)$)

$$O\langle \vec{\phi} \rangle = \langle \vec{\phi} \rangle \rightarrow X_a \langle \vec{\phi} \rangle = 0 \quad (3.14)$$

To lahko zadostimo samo z X_3 , ki je torej generator preostale simetrije $SO(2)$ sistema.

3.2 Nambu-Goldstonov teorem

Vsakič ko spontano zlomimo neko interno simetrijo, sledi Nambu-Goldstonov (NG) teorem, ki se za sisteme z Lorentzovo simetrijo prostor-časa glasi: število zlomljenih generatorjev je enako številu dodatnih (v primerjavi s teorijo pred zlomom) brezmasnih delcev.

To moramo malo razložiti

- naj omemba Lorentzove simetrije ne zmede bralca: ta simetrija ni v nobeni zvezi z interno simetrijo, katero smo spontano zlomili; omeniti jo je pa treba, ker se brez nje Nambu-Goldstonov teorem glasi nekoliko drugače;
- zlomljeni generatorji so tisti, ki *ne* zadoščajo enačbi (3.14) ;
- masa je tukaj definirana kot drugi odvod potenciala v vakuumu; za primer potenciala $V = V(\phi_i)$, $i = 1, N$ in ϕ realna skalarna polja, so mase lastne vrednosti matrike

$$\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi_a \rightarrow \langle \phi_a \rangle} \quad (3.15)$$

- besedna *dodatni* brezmasni delci je potrebna samo zato, ker bi lahko bili brezmasni delci, ki pa nimajo nobene povezave s spontanim zlomom simetrije

Primer 23. Preverimo, ali v obravnavanem primeru $SO(3)$ z $m^2 < 0$ NG teorem velja. Simetrijo $SO(3)$ s tremi generatorji smo zlomili v $SO(2)$ z enim generatorjem, ker $3-1=2$ generatorja (X_1 in X_2) ne zadoščata enačbi (3.14). Torej je žtevilo zlomljenih generatorjev 2, in po NG teoremu morata biti dva brezmasna delca.

Izračunajmo matriko drugih odvodov:

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\partial^2 V}{\partial \phi_i \partial \phi_j} \right|_{\phi_a \rightarrow \langle \phi_a \rangle} &= \left(m^2 \delta_{ij} + \lambda \left(\delta_{ij} \vec{\phi}^2 + 2\phi_i \phi_j \right) \right) \Big|_{\phi_a \rightarrow \langle \phi_a \rangle} \\
&= m^2 \delta_{ij} + \lambda v_+^2 (\delta_{ij} + 2\delta_{i3} \delta_{j3}) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2m^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{3.16}$$

Res sta dve lastni vrednosti ničelni! Tretja lastna vrednost je seveda pozitivna (smo v minimumu, ne v maksimumu potenciala), kar smo v bistvu preverili že prej. \diamond

3.3 Druge upodobitve

Višje upodobitve $SO(3)$ lahko enostavno zapišemo če uporabimo tenzorski zapis. Tako lahko npr. polja, ki se transformirajo pod 5-dimenzionalno upodobitvijo $SO(3)$, zapišemo kot 3×3 simetrično in brezsledno matriko S , ki jo parametriziramo npr. kot

$$S = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & -a+d & e \\ c & e & -d \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Res je S brezsledna, in izražena s petimi neodvisnimi količinami a, b, c, d, e , torej je res $S = 5$. S se pod $SO(3)$ transformira kot (2.14):

$$S'_{ij} = O_{ik} O_{jl} S_{kl} \tag{3.18}$$

ali matrično kot

$$S' = O S O^T \tag{3.19}$$

Z generatorji $SO(3)$ se ta pogoj zapiše kot

$$\delta S_a = X_a S + S X_a^T \tag{3.20}$$

kjer smo infinitezimalno (za majhne grupne parametre α_a) spremembo δS_a definirali preko

$$S' - S = i\alpha_a \delta S_a + \mathcal{O}(\alpha^2) \tag{3.21}$$

Iz produkta S -ov lahko sestavimo invariante nad $SO(3)$ preko sledi:

$$(Tr(S^n))' = Tr(OSO^T \dots OSO^T) = Tr(S^n) \tag{3.22}$$

kjer smo uporabili ortogonalnost matrik O , to je $OO^T = O^T O = \mathbb{I}$ in lastnost sledi

$$\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA) \quad (3.23)$$

Tenzorski zapis je uporaben tudi pri drugih grupah. Vzemimo kot primer $SU(3)$ in adjungirano upodobitev. To formalno dobimo preko tenzorskega produkta fundamentalne upodobitve 3 in anti-fundamentalne upodobitve preko $\bar{3}$ (2.35) in (2.36). Upodobitev 8 lahko zapišemo preko $SU(3)$ Gell-Mannovih matrik (1.91)

$$\Sigma = \sigma_a T_a \quad (3.24)$$

ki smo jih normirali tako, da je

$$\text{Tr}\Sigma^2 = \sum_{a=1}^8 \sigma_a^2 \quad (3.25)$$

Matrika (3.24) se transformira pod $SU(3)$ preko adjungirane upodobitve kot v (2.29):

$$\Sigma'^i_j = U^i_k \Sigma^k_l (U^\dagger)^l_j \quad (3.26)$$

oz. matrično

$$\Sigma' = U \Sigma U^\dagger \quad (3.27)$$

medtem ko lahko, podobno kot pri (3.20), infinitezimalno spremembo za adjungirano upodobitev

$$\Sigma' - \Sigma = i\alpha_a \delta\Sigma_a + \mathcal{O}(\alpha^2) \quad (3.28)$$

zapišemo kot

$$\delta\Sigma_a = X_a \Sigma - \Sigma X_a = [X_a, \Sigma] \quad (3.29)$$

Podobno kot v prejšnjem primeru, je sled potence Σ invarianta $SU(3)$:

$$(\text{Tr}\Sigma^n)' = \text{Tr}(U \Sigma U^\dagger \dots U \Sigma U^\dagger) = \text{Tr}\Sigma^n \quad (3.30)$$

To kar smo povedali za $SU(3)$ velja povsem analogno tudi v $SU(N)$. Prav tako lahko npr. definiramo simetričen oz antisimetričen produkt $N \times N$, ki sta dimenzije $N(N+1)/2$ oz. $N(N-1)/2$ in se transformirata enako kot pač produkt $N \times N$ (en U za vsak indeks):

$$X^{ij'} = U^i_k U^j_l X^{kl} \quad (3.31)$$

Invarianta sedaj ni $\text{Tr}(X^n)$, pač pa najprej tvorimo

$$Y = X X^\dagger \quad (= X X^*) \quad (3.32)$$

ki se transformira kot adjungirana upodobitev (kot Σ v (3.27))

$$Y' = UYU^\dagger \quad (3.33)$$

naprej pa že znamo.

Primer 24. V $SU(3)$ ima antisimetrična kombinacija dveh 3 zopet dimenzijo 3. Kako se torej transformira, z enim ali dvema U -jema?

V tem je $SU(3)$ posebna, saj se po eni strani antisimetrična kombinacija $A^{ij} = -A^{ji}$ transformira kot

$$A^{ij'} = U^i_k U^j_l A^{kl} \quad (3.34)$$

po drugi strani pa vemo, da se isti objekt transformira kot $\bar{3}$:

$$(\epsilon_{nij} A^{ij})' = (\epsilon_{mij} A^{ij}) (U^\dagger)^m_n \quad (3.35)$$

To seveda ni v protislovju, saj velja

$$\epsilon_{nij} U^i_k U^j_l = \epsilon_{mkl} (U^\dagger)^m_n \quad (3.36)$$

kar sledi iz definicije determinante in lastnosti unitarne matrike $SU(3)$ ($\text{Det}(U) = 1$ in $UU^\dagger = U^\dagger U = \mathbb{I}$).

Drugače povedano, v $SU(3)$ lahko dva antisimetrična indeksa gor (dol) zamenjamo z enim indeksom dol (gor). To naredimo, tako da dani tenzor pomnožimo s tenzorjem Levi-Civita ϵ_{ijk} (ϵ^{ijk}). \diamond

Vaja 5. Obravnavaj potencial $V(\Sigma)$ realnega skalarne polja v adjungirani upodobitvi Σ grupe $SU(N)$. Zapiši potencial kot kombinacijo invariant te upodobitve do maksimalno četrtega reda v potencah polja. Ugotovi, kakšen je lahko vakuum ter njegovo simetrijo v primeru, da $V(\Sigma) = V(-\Sigma)$ [12]. \triangle

Primer 25. Za potencial do 4. potence adjungirane upodobitve z $V(\Sigma) = V(-\Sigma)$ preverimo, da je pri spontanem zlomu $SU(N) \rightarrow SU(n) \times SU(N-n) \times U(1)$ zadoščen Nambu-Goldstonov teorem.

Adjungirana upodobitev (brezsledna matrika $N \times N$), ki $SU(N)$ spontano zlomi v $SU(n) \times SU(N-n) \times U(1)$ ima vakuumsko pričakovano vrednost

$$\langle \Sigma \rangle = \langle \sigma \rangle \begin{pmatrix} (N-n)\mathbb{I}_n & 0_{n \times (N-n)} \\ 0_{(N-n) \times n} & -n\mathbb{I}_{(N-n)} \end{pmatrix} \quad (3.37)$$

Sled te matrike je že nič ($\text{Tr}\langle \Sigma \rangle = n(N-n) + (N-n)(-n) = 0$), generatorji preostale simetrije pa morajo anihilirati vakuumsko stanje, to je zadoščat ekvivalent (3.14), to je $\delta\Sigma_a = 0$ (3.29):

$$[X_a^{SU(n)}, \langle \Sigma \rangle] = 0 \quad , \quad a = 1, \dots, n^2 - 1 \quad (3.38)$$

$$[X_b^{SU(N-n)}, \langle \Sigma \rangle] = 0 \quad , \quad b = 1, \dots, (N-n)^2 - 1 \quad (3.39)$$

$$[X^{U(1)}, \langle \Sigma \rangle] = 0 \quad (3.40)$$

To je pa ravno to, kar se zgodi, saj imajo generatorji $SU(n)$ neničelne elemente ravno v $n \times n$ bloku levo zgoraj, generatorji $SU(N-n)$ pa v $(N-n) \times (N-n)$ bloku desno spodaj, v obeh primerih pa komutirajo z identiteto. Generator $U(1)$ je pa kar sorazmeren $\langle \Sigma \rangle$ in torej zopet komutira z vakuumom.

Da dobimo mase vseh delcev, moramo potencial

$$V(\Sigma) = m^2 Tr(\Sigma^2) + \lambda_1 Tr(\Sigma^4) + \lambda_2 (Tr(\Sigma^2))^2 \quad (3.41)$$

razviti do kvadratnega reda ekscitacij $\hat{\Sigma}$, kjer je

$$\Sigma = \langle \Sigma \rangle + \hat{\Sigma} \quad (3.42)$$

Poglejmo to bolj eksplicitno:

$$\Sigma = (\langle \sigma \rangle + \hat{\sigma}) \begin{pmatrix} (N-n)\mathbb{I}_n & 0_{n \times (N-n)} \\ 0_{(N-n) \times n} & -n\mathbb{I}_{(N-n)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \hat{\Sigma}_n & \hat{\Sigma}_{mešan} \\ \hat{\Sigma}_{mešan}^\dagger & \hat{\Sigma}_{(N-n)} \end{pmatrix} \quad (3.43)$$

kjer sta $\hat{\Sigma}_n$ oz. $\hat{\Sigma}_{(N-n)}$ adjungirani upodobitvi od $SU(n)$ oz. $SU(N-n)$, povezava med levim spodnjim blokom in desnim zgornjim pa je zaradi pogoja realnosti $\Sigma^\dagger = \Sigma$ (v zapisu (3.24) to pomeni, da so σ_a realni). Število vseh ekscitacij je enako številu začetnih polj, to je $N^2 - 1$:

$$\text{število prostostnih stopenj } \hat{\sigma} : 1 \quad (3.44)$$

$$\text{število prostostnih stopenj } \hat{\Sigma}_{N-n} : (N-n)^2 - 1 \quad (3.45)$$

$$\text{število prostostnih stopenj } \hat{\Sigma}_n : n^2 - 1 \quad (3.46)$$

$$\text{število prostostnih stopenj } \hat{\Sigma}_{mešan} : 2(N-n)n \quad (3.47)$$

torej skupno

$$1 + ((N-n)^2 - 1) + (n^2 - 1) + 2(N-n)n = N^2 - 1 \quad (3.48)$$

kar smo želeli pokazati.

Razvoj (3.43) uporabimo v (3.41) in razvijemo do kvadrata količin s klobukom:

$$Tr\Sigma^2 = Nn(N-n) (\langle \sigma \rangle + \hat{\sigma})^2 + Tr \left(\hat{\Sigma}_n^2 + \hat{\Sigma}_{(N-n)}^2 + 2\hat{\Sigma}_{mešan}^\dagger \hat{\Sigma}_{mešan} \right) \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} Tr\Sigma^4 = & n(N-n) (n^3 + (N-n)^3) (\langle \sigma \rangle^4 + 4\langle \sigma \rangle^3 \hat{\sigma} + 6\langle \sigma \rangle^2 \hat{\sigma}^2) \\ & + 6(N-n)^2 \langle \sigma \rangle^2 Tr \hat{\Sigma}_n^2 + 6n^2 \langle \sigma \rangle^2 Tr \hat{\Sigma}_{(N-n)}^2 \\ & + 2(n^2 + (N-n)^2 + (N-2n)^2) \langle \sigma \rangle^2 Tr \hat{\Sigma}_{mešan}^\dagger \hat{\Sigma}_{mešan} \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} (Tr\Sigma^2)^2 = & N^2 n^2 (N-n)^2 (\langle \sigma \rangle^4 + 4\langle \sigma \rangle^3 \hat{\sigma} + 6\langle \sigma \rangle^2 \hat{\sigma}^2) \\ & + 2Nn(N-n) \langle \sigma \rangle^2 Tr \left(\hat{\Sigma}_n^2 + \hat{\Sigma}_{(N-n)}^2 + 2\hat{\Sigma}_{mešan}^\dagger \hat{\Sigma}_{mešan} \right) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Če torej zapišemo

$$V(\Sigma) = V(\langle \Sigma \rangle) + V_\sigma \hat{\sigma} + \frac{1}{2} m_\sigma^2 \hat{\sigma}^2 + m_n^2 \text{Tr} \hat{\Sigma}_n^2 \quad (3.52)$$

$$+ m_{N-n}^2 \text{Tr} \hat{\Sigma}_{(N-n)}^2 + 2m_{\text{mešana}}^2 \text{Tr} \hat{\Sigma}_{\text{mešana}}^\dagger \hat{\Sigma}_{\text{mešana}} + \mathcal{O}(\hat{\Sigma}^3)$$

nam linearen del da nič drugega kot minimizacijo potenciala:

$$V_\sigma = \left. \frac{\partial V}{\partial \sigma} \right|_{\Sigma \rightarrow \langle \Sigma \rangle} \quad (3.53)$$

in torej mora bit enak nič⁸:

$$\frac{V_\sigma}{\langle \sigma \rangle} = m^2 2Nn(N-n) + \lambda_1 4n(N-n) (n^3 + (N-n)^3) \langle \sigma \rangle^2 + \lambda_2 4N^2 n^2 (N-n)^2 \langle \sigma \rangle^2$$

$$= 2Nn(N-n) [m^2 + \lambda_1 2(N^2 - 3Nn + 3n^2) \langle \sigma \rangle^2 + \lambda_2 2Nn(N-n) \langle \sigma \rangle^2] = 0 \quad (3.54)$$

kjer smo že upoštevali, da je vakuumaska pričakovana smer $\langle \sigma \rangle \neq 0$ (tista, ki $SU(N)$ spontano zlomi).

Najbolj zanimiva izmed kvadratov mas je $m_{\text{mešana}}^2$, ker je

$$m_{\text{mešana}}^2 = m^2 + \lambda_1 (n^2 + (N-n)^2 + (N-2n)^2) \langle \sigma \rangle^2 + \lambda_2 2Nn(N-n) \langle \sigma \rangle^2 \quad (3.55)$$

kar je popolnoma enaka oglatemu oklepaju v (3.54) in torej

$$m_{\text{mešana}}^2 = 0 \quad (3.56)$$

Za ostale mase ne dobimo nič posebnega, so komplicirani izrazi, ki so različni od nič razen za posebne vrednosti N in n (glej vajo 6 spodaj). Torej je število brezmasnih delcev $2n(N-n)$, kar je enako število zlomljenih generatorjev:

$$\underbrace{(N^2 - 1)}_{SU(N)} - \underbrace{(n^2 - 1)}_{SU(n)} - \underbrace{((N-n)^2 - 1)}_{SU(N-n)} - \underbrace{1}_{U(1)} = 2n(N-n) \quad (3.57)$$

Torej je Nambu-Goldstonov teorem zadoščen. \diamond

Vaja 6. Reši dvoje vaj:

- iz dejstva, da lahko polje Σ , ki se transformira v adjungirani upodobitvi grupe $SU(N)$, da zapisati kot hermitska brezsledna matrika $N \times N$, pokaži, da lahko zapišemo le $N-1$ neodvisnih invariant. Zapiši en tak primer invariant. Isto pokaži tako, da izraz

$$\text{Det}(M) = \exp(\text{Tr}(\log M)) \quad (3.58)$$

za $M = 1 - \lambda \Sigma$ razviješ po potencah λ ;

⁸Isti rezultat bi dobili, če bi v (3.41) vstavili (3.37) in odvajali po $\langle \sigma \rangle$.

- za potencial z 2. in 4. potenco adjungirane upodobitve $SU(3)$ Σ preveri, ali je Nambu-Goldstonov teorem zadoščen, če je

$$\langle \Sigma \rangle \propto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (3.59)$$

Komentiraj dobljen rezultat, in razloži, kaj se je zgodilo.

△

3.4 Podgrupe

Zagotovo mora imeti podgrupa H grupe G manj generatorjev in elementov kot originalna grupa G . Zanimalo nas bodo predvsem podgrupe oblike $H = SU(n) \times SU(N-n) \times U(1)$, ki ostanejo potem ko originalno grupo $G = SU(N)$ spontano zlomi polje v adjungirani upodobitvi z vakuumsko pričakovano vrednostjo (3.37), to je pri razcepu

$$SU(N) \rightarrow SU(n) \times SU(N-n) \times U(1) \quad (3.60)$$

Pri tem nas bo zanimalo kako se zapišejo nerazcepne upodobitve grupe $SU(N)$ kot nerazcepne upodobitve grupe $SU(n) \times SU(N-n) \times U(1)$. Začnimo z enostavnim primerom. Vzemimo fundamentalno upodobitev N :

$$N = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} \quad (3.61)$$

Če je $2 \leq n \leq N-2$ potem se N razcepi kot

$$N = (n, 1)(N-n) + (1, N-n)(-n) \quad (3.62)$$

Tuakj je treba marsikaj razložiti:

- $(n, 1)(N-n)$ pomeni da je to upodobitev nad $SU(n) \times SU(N-n) \times U(1)$ in sicer upodobitev n od $SU(n)$, upodobitev 1 od $SU(N-n)$, in ima $U(1)$ naboj $N-n$. Ravno tako je $(1, N-n)(-n)$ upodobitev 1 od $SU(n)$, upodobitev $N-n$ od $SU(N-n)$, in ima $U(1)$ naboj $(-n)$;
- naboj $U(1)$ nima vnaprej definirane normalizacije, zato lahko vse naboje $U(1)$ množimo s poljubnim številom različnim od nič. Zapis (3.62) je tako grupno teoretsko ekvivalenten zapisu npr.

$$N = (n, 1)(1/n) + (1, N-n)(-1/(N-n)) \quad (3.63)$$

- U(1) naboje fundamentalne upodobive N dobimo direktno iz (3.37), so kar so-razmerni z lastnimi vrednostmi matrike $\langle \Sigma \rangle$; vsota vseh nabojev U(1) je nič.

Kaj pa druge upodobitve? Zopet pride tu prav tenzorska metoda, ko vsako nerazcepno upodobitev lahko dobimo iz osnovnih gradnikov, ki so v primeru SU(N) fundamentalna upodobitev N in antifundamentalna upodobitev \bar{N} , kjer se fundamentalna razcepi kot (3.62), antifundamentalna pa kot

$$\bar{N} = (\bar{n}, 1)(-(N - n)) + (1, \overline{N - n})(n) \quad (3.64)$$

Vse kar smo naredili je dat prečno na vsako upodobitev SU(m) (seveda je $\bar{1} = 1$) in zamenjat predznak naboja U(1).

Tako lahko npr. adjungirano upodobitev $N^2 - 1$ v SU(N) razcepimo (dekomponiramo) glede na podgrupo $SU(n) \times SU(N-n) \times U(1)$ kot

$$\begin{aligned} N \times \bar{N} - 1 &= [(n, 1)(N - n) + (1, N - n)(-n)] \times [(\bar{n}, 1)(-(N - n)) + (1, \overline{N - n})(n)] - 1 \\ &= (n^2 - 1, 1)(0) + (1, (N - n)^2 - 1)(0) + (n, \overline{N - n})(N) + (\bar{n}, N - n)(-N) + (1, 1)(0) \end{aligned} \quad (3.65)$$

Če je $n = 1$ ali $n = N - 1$, potem je podgrupa sestavljena iz samo dveh komponent namesto treh

$$SU(N) \rightarrow SU(N - 1) \times U(1) \quad (3.66)$$

in se fundamentalna upodobitev dekomponira kot

$$N \rightarrow (N - 1)(1) + 1(-(N - 1)) \quad (3.67)$$

Poglejmo si nekaj primerov.

Primer 26. *Kako se razcepi adjungirana upodobitev SU(3) pod SU(2) × U(1)? Uporabimo najprej (3.67)*

$$3 \rightarrow 2(1) + 1(-2) \quad (3.68)$$

$$\bar{3} \rightarrow 2(-1) + 1(2) \quad (3.69)$$

kjer upoštevamo, da v SU(2) velja $\bar{2} \sim 2$, saj ϵ_{ij} lahko niža indekse, tako da je

$$\bar{2}_i = \epsilon_{ij} 2^j \quad (3.70)$$

in je torej upodobitev realna. V tem je SU(2) edinstvena, nobena druga SU(N) nima te lastnosti. V SU(N) ima za $N > 2$ $\epsilon_{i_1 \dots i_N}$ več kot 2 indeksa in ga ne moremo uporabiti samo za višat oz. nižat indekse, ker pri tem tipično objektu spremeni število indeksov.

Kakorkoli, adjungirana upodobitev 8 se razcepi kot

$$\begin{aligned}
8 = 3 \times \bar{3} - 1 &= [2(1) + 1(-2)] \times [2(-1) + 1(2)] - 1 \\
&= 3(0) + 1(0) + 2(3) + 2(-3)
\end{aligned} \tag{3.71}$$

◇

Primer 27. *Kako se pa razcepi simetrična upodobitev $SU(5)$? Pri tem imamo v mislih upodobitev*

$$15 = (5 \times 5)_s \tag{3.72}$$

Najprej pogledjmo razcep fundamentalne upodobitve:

$$5 = (3, 1)(-2) + (1, 2)(3) \tag{3.73}$$

Torej je

$$\begin{aligned}
15 = (5 \times 5)_s &= [(3, 1)(-2) + (1, 2)(3)] \times [(3, 1)(-2) + (1, 2)(3)]_s \\
&= (6, 1)(-4) + (1, 3)(6) + (3, 2)(1)
\end{aligned} \tag{3.74}$$

Pri tem smo upoštevali, da v $SU(3)$ velja $(3 \times 3)_s = 6$, v $SU(2)$ pa $(2 \times 2)_s = 3$. Nabojne $U(1)$ smo seveda seštevali. Preverimo rezultat:

- *število stanj na levi je enako številu stanj na desni:*

$$15 = 6 \times 1 + 1 \times 3 + 3 \times 2 \tag{3.75}$$

- *vsota vseh nabojev $U(1)$ je nič:*

$$6 \times 1 \times (-4) + 1 \times 3 \times 6 + 3 \times 2 \times 1 = 0 \tag{3.76}$$

◇

Razcep na invariante podgrupe lahko pridno uporabimo pri računanju takoimenovanega Dynkinovega indeksa $T(r)$ in kvadratnega Casimirja $C_2(r)$, ki sta za poljubno upodobitev r definirana kot

$$Tr(X_a(r)X_b(r)) = T(r)\delta_{ab} \tag{3.77}$$

$$\sum_a (X_a(r)X_a(r))_{ij} = C_2(r)\delta_{ij} \tag{3.78}$$

Med tema dvema količinama obstaja relacija, saj lahko prvo enačbo (3.77) pomnožimo z δ_{ab} , enačbo (3.78) pa z δ_{ij} . Spomnimo se, da je $\delta_{ab}\delta_{ab} = d_G$, to je dimenziji grupe (enako številu generatorjev), medtem ko je $\delta_{ij}\delta_{ij} = d(r)$, to je dimenziji upodobitve r . Dobimo:

$$\sum_a \text{Tr} (X_a(r)X_a(r)) = T(r)d_G \quad (3.79)$$

$$\sum_a \text{Tr} (X_a(r)X_a(r)) = C_2(r)d(r) \quad (3.80)$$

odkoder torej sledi

$$T(r)d_G = C_2(r)d(r) \quad (3.81)$$

Dovolj je torej, da izračunamo eno od dveh. Omejili se bomo torej na račun $T(r)$. Točna vrednost je odvisna še od normalizacije. Kar je pa neodvisno od normalizacije so razmerja $T(r_1)/T(r_2)$: če poznamo Dynkinov indeks $T(r_0)$ za eno upodobitev r_0 (to je odvisno od normalizacije generatorjev), teorija grup določi $T(r)$ za vse ostale upodobitve r . Tako bomo enkrat za vselej zahtevali, da velja za fundamentalno upodobitev N od $SU(N)$

$$T(N) = \frac{1}{2} \quad (3.82)$$

S tem lahko enolično določimo Dynkinove indekse ne samo vseh ostalih upodobitev, pač pa celo vseh upodobitev drugih grup!

Pri vsem tem je uporabno, da zgornje enačbe ne veljajo samo za nerazcepne upodobitve, pač pa tudi za razcepne.

Primer 28. *Kako to, da so vse fundamentalne upodobitve (to je za vse N) normirane enako? Kaj se zgodi, če razcepimo upodobitev npr. pri zlomu*

$$SU(N) \rightarrow SU(N-1) \quad (3.83)$$

To dosežemo, če npr. fundamentalna upodobitev dobi pričakovano vrednost

$$\langle N \rangle \propto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \quad (3.84)$$

Generatorji $SU(N-1)$ so tisti, ki zadoščajo

$$X_a^{SU(N-1)} \langle N \rangle = 0 \quad (3.85)$$

in torej nimajo nobenih neničelnih elementov v zadnji koloni. Zanje torej velja

$$T(N-1) = \text{Tr} (X_a^{SU(N-1)})^2 = \frac{1}{2} \quad (3.86)$$

ker je to veljalo že za $SU(N)$, omejitev na poprostor $SU(N-1)$ pa ni za te generatorje nič spremenil.

Še nekaj: po (3.81) je kvadratni Casimir za fundamentalno upodobitev N grupe $SU(N)$ ($d_{SU(N)} = N^2 - 1$, $d(N) = N$) enak

$$C_2(N) = \frac{d_{SU(N)}T(N)}{d(N)} = \frac{N^2 - 1}{2N} \quad (3.87)$$

◇

Se pa spremenijo generatorji v drugih upodobitvah. Pomislimo najprej na adjungirano upodobitev $SU(N)$. Zlom (3.83) razcepi adjungirano upodobitev kot (isto dobimo če uporabimo formulo (3.60) za $n = N - 1$ in pozabimo na $U(1)$)

$$N \times \bar{N} - 1 = ((N - 1)^2 - 1) + (N - 1) + (\overline{N - 1}) + (1) \quad (3.88)$$

kjer so na desni v oklepajih dimenzije nerazcepnih upodobitev $SU(N-1)$, to je adjungirana, fundamentalna, antifundamentalna in singlet. To pomeni, da je adjungirana upodobitev $SU(N)$ razcepna upodobitev $SU(N-1)$: zapiše se lahko v bločno diagonalni obliki, tako da je sled kvadratov teh matrik enaka vsoti sledi kvadratov nerazcepnih delo (blokov):

$$T^{SU(N)}(N^2 - 1) = T^{SU(N-1)}((N - 1)^2 - 1) + 2T^{SU(N-1)}(N - 1) \quad (3.89)$$

kjer smo upoštevali, da imata upodobitev in konjugirana upodobitev enak Dynkinov indeks, singlet pa ima indeks nič. Ker je $T^{SU(n)}(n) = 1/2$, sledi rekurzijska relacija.

$$T^{SU(N)}(N^2 - 1) = T^{SU(N-1)}((N - 1)^2 - 1) + 1 \quad (3.90)$$

Pri $SU(2)$ je adjungirana upodobitev

$$(X_a)_{bc} = -i\epsilon_{abc} \quad (3.91)$$

in je torej

$$T^{SU(2)} = 2 \quad (3.92)$$

Enačbi (3.90) in (3.92) dasta splošno rešitev za $SU(N)$

$$T(N^2 - 1) = N \quad (3.93)$$

medtem ko je kvadratni Casimir za ta primer kar enak

$$C_2(N^2 - 1) = N \quad (3.94)$$

saj sta dimenziji grupe in upodobitve (adjungirane) enake:

$$d_{SU(N)} = d(N^2 - 1) = N^2 - 1 \quad (3.95)$$

Vaja 7. Standardni model ima simetrijo

$$G_{SM} = SU(3) \times SU(2) \times U(1) \quad (3.96)$$

Ena generacija fermionov se transformira pod G_{SM} kot

$$\begin{aligned} Q &= (3, 2)(1/6) \quad , \quad u^c = (\bar{3}, 1)(-2/3) \quad , \quad d^c = (\bar{3}, 1)(1/3) \\ L &= (1, 2)(-1/2) \quad , \quad e^c = (1, 1)(1) \end{aligned} \quad (3.97)$$

Te upodobitve imajo barionsko število B in leptonsko število L enako

$$B(Q, u^c, d^c, L, e^c) = (1/3, -1/3, -1/3, 0, 0) \quad (3.98)$$

$$L(Q, u^c, d^c, L, e^c) = (0, 0, 0, 1, -1) \quad (3.99)$$

- Pokaži, da imajo vse invariante grupe G_{SM} sestavljene iz četrte potence polj (3.97) skupni $B - L = 0$ (skupni B in L produkta polj je enak vsoti posameznih B in L v produktu).
- Kakšna je minimalna grupa $SU(N)$, ki vsebuje G_{SM} kot podgrupo? Kolikšno je minimalno število nerazcepnih upodobitev (in kakšne so) te grupe $SU(N)$, ki vsebujejo celo generacijo fermionov SM ?
- Ponovi zgornjo vajo še za $SO(10)$ in E_6 (Slansky).
- Za vse te upodobitve $SU(N)$, $SO(10)$ in E_6 izračunaj Dynkonov indeks in kvadratni Casimir.

△

Vaja 8. Reši sledeče:

- Izračunaj Dynkinov indeks in kvadratni Casimir v $SU(N)$ za simetrično oz. antisimetrično upodobitev z dvema indeksoma;
- razcepi upodobitvi 45 in 54 od $SO(10)$ pod podgrupo Pati-Salama $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$; isto naredi za podgrupo $SU(5) \times U(1)$;
- razcepi upodobitev 120 od $SO(10)$ pod podgrupo Pati-Salama $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$;
- izpelji vrednosti za $T^{SO(10)}$ in $C_2^{SO(10)}$ za upodobitve 45, 54 in 120.

△

3.5 Drsenje sklopitvenih konstant

Uporaba Dynkinovega indeksa je povezana s pojmom drsenja sklopitvene konstante. Že iz elektrodinamike poznamo kvantni pojav polarizacije vakuuma, po katerem se s približanjem (to je pri velikih energijah) naboj občuti močnejše. To je posledica tvorbe virtualnih nabitih parov (dipolov), ki se usmerijo tako da senčijo originalen naboj. Teh parov je več če je več prostora (ko smo bolj oddaljeni), odtod zmanjšanje naboja na velikih razdaljah. To je res, ko je grupa transformacij (elektrodinamika) $U(1)$, to je Abelova grupa (en sam generator seveda komutira sam s sabo).

Stvar je obratna v primeru neabelove grupe, npr. $SU(2)$, $SU(3)$ itd. Tedaj se (ob predpostavki, da nimamo prevelikega števila polj spina 0 ali $1/2$) naboj z manjšanjem razdalje (večanjem energije) manjša.

Oba efekta lahko poenotimo z enačbo renormalizacijske grupe, ki opisuje, kako se sklopiveni naboj g spreminja z energijo μ :

$$\mu \frac{dg}{d\mu} = -\frac{b}{(4\pi)^2} g^3 \quad (3.100)$$

kjer je beta funkcija b v prvem približku enaka

$$b = \frac{11}{3}T_G - \frac{2}{3}T_F - \frac{1}{6}T_B \quad (3.101)$$

Dynkinovi indeksi se pa nanašajo na prispevke realnih vektorskih polj s spinom 1 (T_G), Weylovih fermionov s spinom $1/2$ (T_F) in realnih bozonov s spinom 0 (T_B).

V standardnem modelu imamo grupo (3.96) in torej 3 sklopitvene konstante: g_3 za $SU(3)$, g_2 za $SU(2)$ in g_1 za $U(1)$, in torej tri enačbe (3.100):

$$\mu \frac{dg_i}{d\mu} = -\frac{b_i}{(4\pi)^2} g_i^3 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.102)$$

Seveda imamo tudi 3 beta funkcije b_i , vsaka se pa izračuna preko (3.101).

3.5.1 Normalizacija $U(1)$

Medtem ko je za neabelove grupe (v zgornjem primeru SM $SU(3)$ in $SU(2)$) jasno, kako izračunamo najprej prispevke Dynkinovih indeksov posameznih polj ter nato beta funkcijo preko (3.101), imamo pri $U(1)$ problem z normalizacijo. Kot smo rekli, so $U(1)$ naboji v bistvu določeni le do faktorja, vse kar vemo je, da je vsota $U(1)$ nabojev neke nerazcepne upodobitve enaka nič.

V primeru standardnega modela bomo uporabili naslednjo normalizacijo za $U(1)$: vsota kvadratov nabojev $U(1)$ cele generacije fermionov SM naj bo enaka vsoti vseh Dynkinovih indeksov za $SU(2)$ (oz. $SU(3)$, izkaže se namreč, da sta enaki). Če označimo namreč s q tak naboj $U(1)$, potem bo normalizacija taka, da

$$6q^2(Q) + 2q^2(L) + 3q^2(u^c) + 3q^2(d^c) + q^2(e^c) = \sum_i T_{SU(2)}(\psi_i) = 2 \quad (3.103)$$

$$\left(= \underbrace{3 \times \frac{1}{2}}_Q + \underbrace{1 \times \frac{1}{2}}_L + \underbrace{0}_{u^c} + \underbrace{0}_{d^c} + \underbrace{0}_{e^c} \right)$$

Preverimo isto še za SU(3):

$$\sum_i T_{SU(3)}(\psi_i) = \underbrace{2 \times \frac{1}{2}}_Q + \underbrace{0}_L + \underbrace{1 \times \frac{1}{2}}_{u^c} + \underbrace{1 \times \frac{1}{2}}_{d^c} + \underbrace{0}_{e^c} = 2 \quad (3.104)$$

Tako za SU(2) kot SU(3) smo upoštevali, da je Dynkinov indeks določene grupe enak nič za singlet tiste grupe (tudi če ni singlet druge grupe).

Vaja 9. Poleg treh generacij fermionov (spin 1/2) s kvantnimi števili (3.97) vsebuje standardni model še Higgsov bozon (spin 0) s kvantnimi števili

$$H = (1, 2)(1/2) \quad (3.105)$$

in tri takozvane umeritvene vektorske bozone (spin 1):

$$g = (8, 1)(0) \quad , \quad W = (1, 3)(0) \quad , \quad B = (1, 1)(0) \quad (3.106)$$

- Izračunaj vse tri beta funkcije b_i ;
- upoštevajoč robne pogoje pri $M_Z = 90 \text{ GeV}$ (eksperimentalni, izmerjeni, podatki)

$$g_1(M_Z) = 0.461425_{-0.000043}^{+0.000044} \quad , \quad g_2(M_Z) = 0.65184_{-0.00017}^{+0.00018} \quad , \quad g_3(M_Z) = 1.2143_{-0.0036}^{+0.0035} \quad (3.107)$$

obravnava drsenje sklopitvenih konstant $g_i(\mu)$;

- preveri, da se v okviru napak sklopitvene konstante ne sečejo v isti točki.

△

Vaja 10. Supersimetrične teorije polja so teorije polja s posebno izbiro polj in posebno vrsto interakciji med njimi. Tako bozoni in fermioni ne nastopajo ločeno, pač pa vedno skupaj, zaradi česar obstajata samo ti dve vrsti (super-)polja (ta polja imajo lahko še druga kvantna števila, oz. so nerazcepne upodobitve simetrijske grupe):

$$\text{kiralno polje} = \text{Weylov fermion}(s = 1/2) + \text{kompleksni bozon}(s = 0) \quad (3.108)$$

$$\text{vektorsko polje} = \text{Weylov fermion}(s = 1/2) + \text{vektorski bozon}(s = 1) \quad (3.109)$$

Minimalni supersimetrični standardni model dobimo, če k vsakemu bozonu standardnega modela dodamo fermionski partner, vsakemu fermionu pa bozonski partner. Poleg tega moramo (iz raznih konsistenčnih relacij, ki jih žal nimamo časa obravnavati) namesto enega Higgsa imeti dva Higgsa, to je namesto H v (3.105) imamo

$$H_1 = (1, 2)(1/2) \quad , \quad H_2 = (1, 2)(-1/2) \quad (3.110)$$

- Pokaži, da se v superimetriji enačba (3.101) zapiše kot

$$b = 3T_V - T_K \quad (3.111)$$

kjer se T_V nanaša na prispevek vektorskega multipleta, T_K pa na vsoto prispevkov kiralnih multipletov.

- izračunaj vse tri beta funkcije za minimalni supersimetrični standardni model;
- z rešitvijo enačb renormalizacijske grupe pokaži, da se vse tri sklopitvene konstante približno sečejo pri isti skali μ ; kakšna je ta skala?

△

Vaja 11. Nauči se uporabljat tabele v Slanskem, in sicer

- tabele z nerazcepnimi upodobitvami;
- tabele s tenzorskimi produkti;
- tabele z razvejitvenimi pravili.

Med vajo boš odgovarjal na razna konkretna vprašanja v zvezi z uporabo tabel.

△

Vaja 12. Za računalniškega entuzijasta: naloži program *LieArt* [9] na osebni računalnik in vadi v uporabi; med vajo boš kolegom razložil, kako se program naloži in ga uporablja⁹.

△

4 Podrobnosti

Najprej bomo ponovili to kar že poznamo, to je grupo $SU(2)$. Ideja je to predstaviti na tak način, da se da posplošiti na še ostale, bolj komplicirane grupe. To bomo potem naredili za splošno Lijevo grupo ter pokazali eksplicitno primer grupe $SU(3)$.

⁹Martin Ulaga je kot tak primer usposobil množenje produktivnih reprezentacij, da dela za poljubno število argumentov, program v Mathematici z uporabo *LieArta* pa dal na razpolago na [13].

4.1 $\text{rang}(G) = 1$: **SU(2)**

Generatorji $\text{SU}(2)$ zadoščajo komutacijskim pravilom ($a, b, c = 1, 2, 3$)

$$[T_a, T_b] = i\epsilon_{abc}T_c \quad (4.1)$$

Kot je znano, lahko diagonaliziramo samo eno matriko izmed treh T_a , naj bo ta T_3 . Torej je rang grupe $\text{SU}(2)$ enak 1.

Primer 29. *2-dimenzionalna nerazcepna upodobitev generatorjev $\text{SU}(2)$ so Paulijeve matrike deljeno dva:*

$$T_a = \sigma_a/2 \quad (4.2)$$

Diagonalna matrika je

$$T_3 = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -1/2 \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

3-dimenzionalna nerazcepna upodobitev je tudi že znana, saj je to adjungirana upodobitev (dimenzija je enaka številu generatorjev, to je 3):

$$(T_a)_{bc} = -i\epsilon_{abc} \quad (4.4)$$

◇

V naslednjem koraku uvedemo operatorje lestve (po angleško ladder)

$$T_+ = T_1 + iT_2 \quad , \quad T_- = T_1 - iT_2 \quad (4.5)$$

Generatorji T_3 , T_+ in T_- tvorijo Cartan-Weylovo bazo. V tej bazi se komutacijska pravila (4.1) zapišejo

$$[T_3, T_3] = 0 \quad (4.6)$$

$$[T_3, T_\pm] = \pm T_\pm \quad (4.7)$$

$$[T_+, T_-] = 2T_3 \quad (4.8)$$

Grupa deluje na vektorski prostor, ki vsebuje stanja. Te se med sabo razlikujejo po tem, kako nanje deluje grupa. Stvar gre po znanem receptu. Stanje označimo po lastni vrednosti diagonalnega operatorja T_3 : imenujemo ga $|m\rangle$, če zanj velja

$$T_3|m\rangle = m|m\rangle \quad (4.9)$$

Pri dani končni upodobitvi T_+ obstaja stanje, ki ga T_+ anihilira:

$$T_+|l\rangle = 0 \quad (4.10)$$

To definira upodobitev. Ostala stanja iste upodobitve dobimo tako, da na stanje $|l\rangle$, ki ga imenujemo stanje z najvišjo utežjo, delujemo z operatorjem

$$(T_-)^k |l\rangle = N_{k,l} |l-k\rangle \quad (4.11)$$

Desno stran smo nastavili, mora bit v redu, saj je

$$\begin{aligned} T_3(T_-)^k |l\rangle &= ([T_3, T_-] + T_- T_3) (T_-)^{k-1} |l\rangle = T_- (T_3 - 1) (T_-)^{k-1} |l\rangle \\ &= \dots = (l-k) (T_-)^k |l\rangle \end{aligned} \quad (4.12)$$

Nadaljnih izpeljav ne bomo ponavljali, ker jih dobro poznamo iz kvantne mehanike. Spomnimo se le, da na zgornji način dobimo vsa stanja upodobitve $2l+1$, tisto z najnižjo utežjo pa T_- anihilira:

$$T_- | -l \rangle = 0 \quad (4.13)$$

Normalizacijski faktor $N_{k,l}$ nas tudi ne zanima, saj ponavljamo $SU(2)$ zdaj z edinim namenom, da bomo na podoben način ukrepali pri drugih grupah. V ta namen zapišemo zgornje enačbe v rahlo netipično obliko: stanja označimo z

$$(d) \quad , \quad d = 2m \quad (4.14)$$

Na ta način so vse oznake (imenujemo jih Dynkinove oznake) d cela števila. Najvišjo utež upodobitve $2l+1$ označimo torej z $(2l)$. Namesto operatorja T_+ raje pišemo

$$T_+ \rightarrow \alpha = (2) \quad (4.15)$$

namesto operatorja T_- pa

$$T_- \rightarrow -\alpha = (-2) \quad (4.16)$$

Na ta način gremo od najvišje uteži $(2l)$ do ostalih stanj tako, da odštejemo od $(2l)$ prispevek (2) , in sicer največ $2l$ -krat. Vsa stanja v upodobitvi $2l+1$ so

$$\begin{aligned} &(2l) \\ (2l) - (2) &= (2l-2) \\ (2l-2) - (2) &= (2l-4) \\ &\dots = \dots \\ (-2l+2) - (2) &= (-2l) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Poljubno stanje μ lahko razvijemo po takozvani ω ali Dynkinovi bazi

$$\mu = d\omega \quad , \quad \omega = (1) \quad (4.18)$$

ali pa po α bazi

$$\mu = m\alpha \quad , \quad \alpha = (2) \quad (4.19)$$

Seveda je stvar v tem 1-dimenzionalnem primeru (rang od SU(2) je 1) vsaj odvečna če že ne rahlo smešna, je pa zelo uporabna, ko imamo grupe z višjim rangom. Tedaj so α_i oz. ω_i ($i = 1, \dots, \text{rang}(G)$) različni bazni vektorji, nobena od teh baz pa ni pravokotna.

4.2 $\text{rang}(G) > 1$

Zanimalo nas bo, kako iz Dynkinovega zapisa najvišje uteži dane upodobitve pridemo do vseh stanj iste upodobitve. Pri tem se bomo zgledovali po ravnokar opisanem primeru SU(2).

1. Enostavna Lieva algebra G je definirana s komutacijskimi relacijami

$$[T_a, T_b] = if_{ab}^c T_c \quad (4.20)$$

kjer $a, b, c = 1, \dots, \text{dim}(G)$, na desni strani implicitno privzamemo sumacijo po indeksu c , f_{ab}^c pa so strukturne konstante algebre G .

Generatorje T_a lahko upodobimo s kvadratnimi matrikami. O matriki $d \times d$ pravimo, da je v d -dimenzionalni upodobitvi grupe G . Naj bodo te matrike v fundamentalni upodobitvi normirane kot

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \frac{1}{2} \delta_{ab} \quad (4.21)$$

2. Kot prvo stvar redefinirajmo generatorje T_a (spravimo v Cartan-Weylovo bazo). Diagonaliziramo največje možno število generatorjev in jih preimenujemo v H_i , $i = 1, \dots, \text{rang}(G)$. Zanje po definiciji velja

$$[H_i, H_j] = 0 \quad (4.22)$$

Ti tvorijo takoimenovano Cartanovo podalgebro. To je posplošitev matrike T_3 v primeru SU(2).

3. Ostale generatorje pa zapišemo v take linearne kombinacije E_α , ki so lastne vrednosti Cartanovih generatorjev H_i :

$$[H_i, E_\alpha] = \alpha_i E_\alpha \quad (4.23)$$

Lastne vrednosti spravljene v vektorje

$$\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{\text{rang}(G)}) \quad (4.24)$$

imenujemo **koreni**. Korenov je točno $\dim(G) - \text{rang}(G)$. To je posplošitev matrik T_{\pm} v primeru $SU(2)$.

Definirajmo pojem pozitivnosti korenov: dan koren je **pozitiven**, če je njegov prvi neničelni element pozitiven. Pozitivnost definira neko urejenost v vektorskem prostoru korenov. Pravimo, da je $\alpha > \beta$, če je $\alpha - \beta > 0$. Pol korenov je pozitivnih, pol negativnih. Za vsak koren α , obstaja koren $-\alpha$.

4. Izmed pozitivnih korenov izluščimo **enostavne korene**: to so vsi tisti izmed pozitivnih korenov, ki se ne morejo zapisati kot vsota dveh pozitivnih korenov. Enostavnih korenov je točno enako $\text{rang}(G)$. Ti tvorijo neko bazo v vektorskem prostoru korenov. Ta baza ni ortonormirana, vendar je za vsako algebro G enolično določena. To bazo imenujemo α baza ali **dualno bazo**.

5. Definirajmo **Cartanovo matriko**

$$A_{ij} = 2 \frac{(\alpha_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} \quad (4.25)$$

kjer je $(a, b) \equiv a_i b_i$ skalarni produkt vektorjev a in b , če so ti zapisani v ortogonalni bazi. Če niso, potem je med njimi še ustrezna matrika (metrični tenzor).

6. Ta matrika je uporabna, ker lahko preko nje definiramo novo bazo z vektorji

$$\omega_i = (A^{-1})_{ik} \alpha_k \quad (4.26)$$

ki jih imenujemo **fundamentalne uteži**, in ki zadoščajo

$$2 \frac{(\omega_i, \alpha_j)}{(\alpha_j, \alpha_j)} = \delta_{ij} \quad (4.27)$$

Vektorji ω_i v splošnem *niso* vzporedni vektorjem α_i (sami vektorji α_i si *niso* pravokotni), to je, matrika A_{ij} (4.25) *ni* diagonalna.

7. Če zdaj vse uteži poljubne ireducibilne upodobitve zapišemo v **Dynkinovi bazi** (ali v ω bazi) sestavljeni iz $\omega_1, \dots, \omega_{\text{rang}(G)}$ kot

$$\mu = d_i \omega_i \quad (4.28)$$

so d_i cela števila, upodobitev sama pa definirana preko števila $\text{rang}(G)$ nenegativnih celih števil, ki predstavljajo enolično najvišjo utež ireducibilne upodobitve. Ostale uteži (elemente upodobitve) dobimo tako, da od najvišje uteži v Dynkinovi bazi

$$(d_1, \dots, d_{\text{rang}(G)}) \quad (4.29)$$

odštejemo α_i maksimalno d_i -krat. Postopek nato nadaljujemo dokler ne izčrpamo vseh možnosti in pridemo do uteži s samimi negativnimi ali ničelnimi elementi.

Zato je Dynkinova baza tudi tako zanimiva. Dynkinova števila stanja μ lahko izračunamo če obrnemo (4.28) in upoštevamo (4.27):

$$d_i = 2 \frac{(\mu, \alpha_i)}{(\alpha_i, \alpha_i)} \quad (4.30)$$

Analogija s prejšnjim enostavnim primerom SU(2) deluje zato, ker imamo opravka pri vseh grupah s podgrupami SU(2). Generatorji

$$T_3 = \frac{\alpha \cdot H}{(\alpha, \alpha)} \quad , \quad T_+ = \frac{E_\alpha}{(\alpha, \alpha)^{1/2}} \quad , \quad T_- = \frac{E_{-\alpha}}{(\alpha, \alpha)^{1/2}} \quad (4.31)$$

namreč zadoščajo istim komutacijskim relacijam (4.6). To uporabimo za vse enostavne α , zato je stvar malo bolj komplicirana kot v SU(2), ampak gre za analogen proces.

4.3 Zapisi v različnih bazah

Isto utež (4.28) lahko zapišemo kot

$$\mu = c_i \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i \quad (4.32)$$

Če upoštevamo (4.28) in (4.26) dobimo

$$d_j = c_i \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} A_{ij} \quad (4.33)$$

Z metričnim tenzorjem ($G_{ij} = G_{ji}$)

$$G_{ij} \equiv (A^{-1})_{ij} \frac{1}{2} (\alpha_j, \alpha_j) \quad (4.34)$$

lahko (4.33) obrnemo kot

$$c_i = G_{ij} d_j \quad (4.35)$$

Namesto (4.29) v Dynkinovi bazi lahko zapišemo (vsota po i je implicitna)

$$(c_1, \dots, c_{rang(G)}) = (G_{1i} d_i, \dots, G_{rang(G),i} d_i) \quad (4.36)$$

v dualni (ali α) bazi, kjer pa koeficienti v splošnem niso več cela števila. Je pa prehod iz ene baze v drugo dober pri računu skalarnih produktov, kar bomo videli v naslednjem poglavju.

Še nekaj: če enostaven koren α_i zapišemo v ω bazi, zglada kot

$$\alpha_i \sim (A_{i1}, \dots, A_{i, \text{rang}(G)}) \quad (4.37)$$

če pa fundamentalno utež ω_i zapišemo v α bazi, zglada kot

$$\omega_i \sim ((A^{-1})_{i1}, \dots, (A^{-1})_{i, \text{rang}(G)}) \quad (4.38)$$

4.4 Produkt uteži

Kako zmnožimo dve uteži? Iščemo torej

$$(\mu, \mu') \quad (4.39)$$

Če poznamo μ in μ' kar v ortogonalni bazi, potem seveda ni problema, in najprej množimo komponente, nato pa vse skupaj seštejemo.

Kar nas bolj zanima, je kako ta produkt izračunamo, če imamo uteži zapisane v ω (Dynkinovi) ali v α (dualni) bazi. Mislimo si lahko 4 primere:

1. Recimo da sta obe uteži zapisane v ω (Dynkinovi) bazi:

$$\mu = d_i \omega_i \quad , \quad \mu' = d'_i \omega_i \quad (4.40)$$

Vstavimo (4.40) v (4.39) in dobimo

$$\begin{aligned} (\mu, \mu') &= d_i d'_j (\omega_i, \omega_j) \\ &= d_i d'_j (A^{-1})_{jk} (\omega_i, \alpha_k) \quad (\text{iz (4.26)}) \\ &= d_i d'_j (A^{-1})_{jk} \frac{1}{2} (\alpha_k, \alpha_k) \delta_{ik} \quad (\text{iz (4.27)}) \\ &= d_i G_{ij} d'_j \quad (\text{iz (4.34)}) \end{aligned} \quad (4.41)$$

2. Recimo da sta obe uteži zapisane v α bazi:

$$\mu = c_i \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i \quad , \quad \mu' = c'_i \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i \quad (4.42)$$

Tedaj je

$$\begin{aligned} (\mu, \mu') &= c_i c'_j \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \frac{2}{(\alpha_j, \alpha_j)} (\alpha_i, \alpha_j) \\ &= c_i \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} A_{ij} c'_j \quad (\text{iz (4.25)}) \end{aligned} \quad (4.43)$$

3. Naj bosta zapisa mešana, vsak v svoji bazi:

$$\mu = d_i \omega_i \quad , \quad \mu' = c'_i \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i \quad (4.44)$$

Dobimo

$$\begin{aligned}(\mu, \mu') &= d_i c'_j \frac{2}{(\alpha_j, \alpha_j)} (\omega_i, \alpha_j) \\ &= d_i c'_j \quad (iz (4.27))\end{aligned}\tag{4.45}$$

4. Še zadnja, obrnjena verzija prejšnjega primera: iz

$$\mu = c_i \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i \quad , \quad \mu' = d'_i \omega_i\tag{4.46}$$

sledi (brez dokaza)

$$(\mu, \mu') = c_i d'_i\tag{4.47}$$

Ponovimo: produkt iz

$$\mu = d_i \omega_i = c_i \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i \quad , \quad \mu' = d'_i \omega_i = c'_i \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} \alpha_i\tag{4.48}$$

lahko enakovredno zapišemo kot

$$\begin{aligned}(\mu, \mu') &= d_i G_{ij} d'_j \\ &= c_i \frac{2}{(\alpha_i, \alpha_i)} A_{ij} c'_j \\ &= d_i c'_i \\ &= c_i d'_i\end{aligned}\tag{4.49}$$

Posebno zadnji dve možnosti se zdita uporabni. Zato tudi tako čudna definicija α baze.

Ni pa ta čuden način uporabe produkta nič drugega kot skalaren produkt v ukrivljenem prostoru. Lahko si mislimo (tako kot to delamo npr. v splošni teoriji relativnosti), da so komponente v eni bazi npr. (kontravariantni) vektorji a^μ , v drugi bazi pa (kovariantni) vektorji b_μ . Če oba vektorja a in b pišemo v kontravariantni obliki je produkt

$$(a, b) = a^\alpha g_{\alpha\beta} b^\beta\tag{4.50}$$

če oba v kovariantni bazi

$$(a, b) = a_\alpha g^{\alpha\beta} b_\beta\tag{4.51}$$

kjer je $g^{\alpha\beta}$ inverz od $g_{\alpha\beta}$, to je

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = g_{\lambda\nu} g^{\nu\mu} = \delta_\lambda^\mu\tag{4.52}$$

še najlažje pa zapišemo produkt v mešani bazi:

$$(a, b) = a^\mu b_\mu = a_\mu b^\mu\tag{4.53}$$

Spomnimo seveda, da se baze menjajo tudi z metričnimi tenzorji:

$$a^\mu = g^{\mu\nu} a_\nu \quad , \quad a_\mu = g_{\mu\nu} a^\nu\tag{4.54}$$

4.5 Poseben primer: SU(3)

1. Naj bo naša algebra SU(3). Vemo, da so pravilno normirani generatorji v fundamentalni upodobitvi polovičke Gell-Mannovih matrik:

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \\
 T_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\
 T_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}, T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.55}$$

2. Cartanovo podalgebro sestavljata $\text{rang}(SU(3)) = 2$ matriki

$$T_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, T_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

3. Uganemo, da so lastni vektorji kar posplošitev operatorjev lestve v SU(2), to so matrike

$$T_1 + iT_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_1 - iT_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

$$T_4 + iT_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_4 - iT_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

$$T_6 + iT_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_6 - iT_7 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.59}$$

ki imajo sledeče korene (v istem vrstnem redu):

$$(1, 0) \quad , \quad (-1, 0) \quad (4.60)$$

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad , \quad \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (4.61)$$

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad , \quad \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (4.62)$$

Primer 30. Pokažimo to na enem posebnem primeru, recimo za $T_4 - iT_5$. Ta ima korene $(-1/2, -\sqrt{3}/2)$, ker je

$$[T_3, T_4 - iT_5] = T_3(T_4 - iT_5) - (T_4 - iT_5)T_3 = -1/2(T_4 - iT_5) \quad (4.63)$$

$$[T_8, T_4 - iT_5] = T_8(T_4 - iT_5) - (T_4 - iT_5)T_8 = -\sqrt{3}/2(T_4 - iT_5) \quad (4.64)$$

◇

Pozitivni koreni izmed (4.60)-(4.62) so

$$(1, 0), \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), \quad (4.65)$$

ki ustrezajo generatorjem $T_1 + iT_2, T_4 + iT_5, T_6 - iT_7$.

4. Enostavni koreni so (v ortogonalni bazi)

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad , \quad \alpha_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \quad (4.66)$$

saj se $\alpha_3 = (1, 0)$ zapiše kot $\alpha_1 + \alpha_2$ (vsota dveh pozitivnih korenov).

5. Zapis (4.66) je v ortogonalni bazi, zato lahko Cartanovo matriko kar izračunamo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.67)$$

njen inverz pa

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.68)$$

6. Zdaj lahko definiramo

$$\omega_1 = (A^{-1})_{1j} \alpha_j = \frac{2}{3}\alpha_1 + \frac{1}{3}\alpha_2 \quad (4.69)$$

$$\omega_2 = (A^{-1})_{2j} \alpha_j = \frac{1}{3}\alpha_1 + \frac{2}{3}\alpha_2 \quad (4.70)$$

kar v α bazi zglada kot

$$\omega_1 = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \quad , \quad \omega_2 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right) \quad (4.71)$$

v ortogonalni bazi pa

$$\omega_1 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \quad , \quad \omega_2 = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) \quad (4.72)$$

7. Končno lahko dobimo vse uteži dane ireducibilne upodobitve. Vzemimo npr. upodobitev

$$U_1^{(0)} = (1, 0) \quad (4.73)$$

To pomeni, da govorimo o upodobitvi, katere najvišja utež je

$$1 \times \omega_1 + 0 \times \omega_2 = \omega_1 \quad (4.74)$$

(v ortogonalni bazi je to kar $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2\sqrt{3}} \right)$).

Zapis (4.73) je v Dynkinovi (ω) bazi, ki je v tem primeru najbolj uporabna.

Utež (4.73) smo opremili še z oznako "(0)", ki pomeni, da smo jo dobili, tako, da smo od najvišje uteži morali odšteti 0 enostavnih uteži. To je seveda odvečna pisava v tem primeru, vendar bo za poznejše uteži to uporabno.

Zapišimo še enostavna korena α_1 in α_2 v Dynkinovi bazi, to je preko μ_1 in μ_2 :

$$\alpha_1 = A_{1j}\omega_j = 2\omega_1 - \omega_2 \rightarrow \alpha_1 = (2, -1) \quad (4.75)$$

$$\alpha_2 = A_{2j}\omega_j = -\omega_1 + 2\omega_2 \rightarrow \alpha_2 = (-1, 2) \quad (4.76)$$

Od najvišje uteži $U_1^{(0)} = (1, 0)$ lahko odštejemo maksimalno 1-krat koren $\alpha_1 = (2, -1)$ in 0-krat koren $\alpha_2 = (-1, 2)$. Dobimo, po vrsti

$$U_2^{(1)} = U_1^{(0)} - \alpha_1 = (1, 0) - (2, -1) = (-1, 1) \quad (4.77)$$

Oznak1 (1) nam pove, da smo morali odšteti od najvišje uteži 1 enostavno utež. Pravimo, da je utež $U^{(n)}$ v n -tem nivoju.

Sedaj postopek nadaljujemo: uteži $U_2^{(1)} = (-1, 1)$ lahko odštejemo maksimalno 1-krat koren α_2 :

$$U_3^{(2)} = U_2^{(1)} - \alpha_2 = (-1, 1) - (-1, 2) = (0, -1) \quad (4.78)$$

Zdaj nimamo več pozitivnih števil, in torej smo prišli s postopkom do konca. Stanja

$$(1, 0), (-1, 1), (0, -1) \quad (4.79)$$

tvorijo torej vsa stanja upodobitve 3 od $SU(3)$, ki jo označimo kar z najvišjo utežjo, to je $(1, 0)$.

Za naslednji primer lahko vzamemo, vedno za $SU(3)$,

$$U_1^{(0)} = (1, 1) \quad (4.80)$$

v ω bazi, kar pomeni, da je najvišja utež

$$U_1^{(0)} = \omega_1 + \omega_2 \quad (4.81)$$

Od najvišje uteži $U_1^{(0)} = (1, 1)$ lahko odštejemo maksimalno 1-krat koren $\alpha_1 = (2, -1)$ ali 1-krat koren $\alpha_2 = (-1, 2)$. Dobimo, po vrsti

$$U_2^{(1)} = U_1^{(0)} - \alpha_1 = (1, 1) - (2, -1) = (-1, 2) \quad (4.82)$$

$$U_3^{(1)} = U_1^{(0)} - \alpha_2 = (1, 1) - (-1, 2) = (2, -1) \quad (4.83)$$

Sedaj postopek nadaljujemo: uteži $U_2^{(1)} = (-1, 2)$ lahko odštejemo maksimalno 2-krat koren α_2 , uteži $U_3^{(1)} = (2, -1)$ pa maksimalno 2-krat koren α_1 . Korajžno naprej:

$$U_4^{(2)} = U_2^{(1)} - \alpha_2 = (-1, 2) - (-1, 2) = (0, 0) \quad (4.84)$$

$$U_5^{(3)} = U_2^{(1)} - 2\alpha_2 = (-1, 2) - 2(-1, 2) = (1, -2) \quad (4.85)$$

$$U_6^{(2)} = U_3^{(1)} - \alpha_1 = (2, -1) - (2, -1) = (0, 0) \quad (4.86)$$

$$U_7^{(3)} = U_3^{(1)} - 2\alpha_1 = (2, -1) - 2(2, -1) = (-2, 1) \quad (4.87)$$

Vidimo, da so nekatere uteži enake, npr. $U_4^{(2)}$ in $U_6^{(2)}$, oboje enake $(0, 0)$. Moramo to šteti kot dve stanji ali eno stanje? Za trenutek ta problem odložimo in izračunamo

naslednje uteži. Lahko namreč uteži $U_5^{(3)} = (1, -2)$ odštejemo 1-krat utež α_1 , uteži $U_7^{(3)} = (-2, 1)$ pa odštejemo 1-krat utež α_2 :

$$U_8^{(4)} = U_5^{(3)} - \alpha_1 = (1, -2) - (2, -1) = (-1, -1) \quad (4.88)$$

$$U_9^{(4)} = U_7^{(3)} - \alpha_2 = (-2, 1) - (-1, 2) = (-1, -1) \quad (4.89)$$

Vse komponente so ali nič ali negativne, ne moremo več nadaljevat.

Sedaj pa se moramo odločit kolikokrat štet iste komponente, drugače povedano, kolikšna je degeneracija posameznih uteži. V ta namem zgornje kandidate za uteži razvrstimo po nivojih:

$$\text{nivo 0} : U_1^{(0)} \quad (4.90)$$

$$\text{nivo 1} : U_2^{(1)}, U_3^{(1)} \quad (4.91)$$

$$\text{nivo 2} : U_4^{(2)}, U_6^{(2)} \quad (\text{štejemo 1 - krat ali 2 - krat ?}) \quad (4.92)$$

$$\text{nivo 3} : U_5^{(3)}, U_7^{(3)} \quad (4.93)$$

$$\text{nivo 4} : U_8^{(4)}, U_9^{(4)} \quad (\text{štejemo 1 - krat ali 2 - krat ?}) \quad (4.94)$$

Za se odločit na nivoju 2 in 4 koliko stanj vzeti, si moramo pomagati s sledečima praviloma (s k_{max} označimo maksimalni možni nivo dane upodobitve, v našem zgornjem primeru 4):

- (a) število stanj na nivoju k je enako številu stanj na nivoju $k_{max} - k$;
- (b) število stanj se s premikom navzdol (z večanjem nivoja) ne more zmanjšati na zgornji polovici (za $k \leq k_{max}/2$); zaradi prejšnjega pravila se torej tudi število stanj s premikom navzgor (z manjšanjem nivoja) ne more zmanjšati na spodnji polovici (za $k \geq k_{max}/2$).

Odtod sledi (pravilo a), da moramo vzeti eno samo stanje na nivoju 4, ker je eno samo stanje na nivoju 0. Obratno, zaradi pravila b, moramo obdržati obe stanji na nivoju 2.

Torej je skupno število stanj 8, in to je upodobitev (1,1) v $SU(3)$.

Vaja 13. Poglavlje 4.5 posploši za $SU(N)$. Pomagaj si z [1], str. 187-190. △

4.6 Kaj lahko še naredimo v Dynkinovem zapisu

Vse to, kar smo se naučili, lahko na bolj avtomatičen način naredimo tudi z Dynkinovim formalizmom. Poglejmo nekaj primerov, brez dokazov.

4.6.1 Dimenzija upodobitve

Naj bo μ najvišja utež dane upodobitve. Radi bi izračunali dimenzijo te upodobitve. Za $SU(N)$ smo to do sedaj naredili preko Youngovih diagramov. Zdaj pa lahko to izračunamo preko **Weylove formule**

$$D(\mu) = \prod_{\alpha^+} \frac{(\mu + \delta, \alpha^+)}{(\delta, \alpha^+)} \quad (4.95)$$

kjer smo z α^+ označili vse pozitivne korene, ter

$$\delta = (1, 1, \dots, 1) \quad (4.96)$$

v Dynkinovi bazi.

Primer 31. Preverimo že izpeljano formulo za dimenzijo v $SU(3)$, to je (2.70). V $SU(3)$ so pozitivni koreni α_1, α_2 in $\alpha_1 + \alpha_2$. V α bazi se ti zapišejo kot ($\alpha_1 = 1 \times \alpha_1 + 0 \times \alpha_2$, itd., pa še $\alpha_1^2 = \alpha_2^2 = 1$)

$$(10) \quad , \quad (01) \quad , \quad (11) \quad (4.97)$$

medtem ko imamo tako $\mu = (d_1, d_2)$ kot $\delta = (1, 1)$ v ω (Dynkinovi) bazi. Torej v (4.49) uporabimo mešano obliko:

$$\begin{aligned} D(\mu) &= \frac{(\mu + \delta, \alpha_1)}{(\delta, \alpha_1)} \times \frac{(\mu + \delta, \alpha_2)}{(\delta, \alpha_2)} \times \frac{(\mu + \delta, \alpha_1 + \alpha_2)}{(\delta, \alpha_1 + \alpha_2)} \\ &= \frac{(1 + d_1)}{1} \times \frac{(1 + d_2)}{1} \times \frac{(1 + d_1) + (1 + d_2)}{1 + 1} \end{aligned} \quad (4.98)$$

kar je točno enačba (2.70). ◇

Vaja 14. Poišči vsa stanja upodobitve (21) grupe $SU(3)$ kot smo naredili pri predavanjih. Potem vse skupaj preveri preko programa LieArt. V LieArt dobi vsa stanja upodobitve (21) grupe G_2 . Izračunaj dimenzijo te upodobitve preko že vgrajene funkcije, ter jo primerjaj z uporabo Weylove formule, kjer dobiš pozitivne korene iz vgrajene funkcije v LieArt. △

4.6.2 Kvadratni Casimir

Tudi za kvadratni Casimir obstaja elegantna formula: za stanje μ ga izračunamo lahko preko

$$C_2(\mu) = (\mu, \mu + 2\delta) \quad (4.99)$$

Primer 32. Preverimo na enostavnem primeru $SU(3)$, in sicer za adjungirano upodobitev 8, ki v Dynkinovem zapisu (ω baza) pomeni (11).

$$C_2^{SU(3)}(11) = (1 \ 1) \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \quad (4.100)$$

kar smo že vedeli. Pri tem smo uporabili (4.41), saj imamo tako utež (11) kot $\delta = (11)$ zapisani v ω (Dynkinovi) bazi ter definicijo metričnega tenzorja (4.34), inverzne Cartanove matrike za $SU(3)$ iz (4.68) ter dejstva, da je za $SU(3)$ (pravzaprav za vse ADE grupe, kjer so oznake za grupe tiste klasificirane v tabeli 1) za vse korene $(\alpha_i, \alpha_i) = 1$ in je torej

$$G_{ij} = \frac{1}{2} (A^{-1})_{ij} \quad \text{za grupe } A_n, D_n, E_6, E_7, E_8 \quad (4.101)$$

◇

4.6.3 Računanje nivojev

Če dobivamo posamezna stanja iz stanja najvišje uteži kot smo opisali v prejšnjem poglavju, potem je nivo nekega stanja znan po tem, koliko korenov smo morali odšteti od najvišje uteži, da smo do danega stanja prišli. Recimo pa, da se sprašujemo, na kakšnem nivoju je tako stanje, ne da bi šli skozi opisani postopek. Potem lahko ta nivo izračunamo preko

$$N(\mu') = \sum_{ij} (\mu_i - \mu'_i) (A^{-1})_{ij} \quad (4.102)$$

kjer so μ_i komponente najvišje uteži upodobitve, μ'_i pa komponente uteži, katere nivo iščemo, obe v ω (Dynkinovi) bazi.

Primer 33. Preverimo formulo npr. za nivo $U_7^{(3)} = (-2, 1)$ v (4.87) iz upodobitve 8 z najvišjo utežjo (11) grupe $SU(3)$. Tedaj je

$$N = ((1, 1) - (-2, 1)) \begin{pmatrix} 2/3 + 1/3 \\ 1/3 + 2/3 \end{pmatrix} = (3 \ 0) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \quad (4.103)$$

kar je točno, saj smo z oznako (3) v $U_7^{(3)}$ označili ravno nivo. ◇

4.6.4 Degeneracija stanj

Ko smo sestavili vsa stanja upodobitve (11) grupe $SU(3)$, smo v dveh primerih morali določiti degeneracijo stanj. To se je zgodilo na drugem nivoju, glej (4.92), in na četrtem nivoju, glej (4.94). V danem primeru smo si pomagali s praviloma (a) in (b), vendar ti pravili nista vedno dovolj. Ko nista dovolj, si moramo pomagat s sledečo formulo:

$$\deg(\mu') ((\mu + \delta, \mu + \delta) - (\mu' + \delta, \mu' + \delta)) = 2 \sum_{k>0, \alpha^+} (\mu' + k\alpha^+, \alpha^+) \deg(\mu' + k\alpha^+) \quad (4.104)$$

(μ je najvišja utež), ki rečuna degeneracijo nivojev rekurzivno.

Primer 34. Preverimo degeneracije stanj v (11) grupe $SU(3)$. Najprej to naredimo za stanje (00); stanja, ki so nad tem stanjem in ki jih moramo upoštevati so (2, -1), (-1, 2), in (1,1), vsak od njih z degeneracijo 1:

$$\text{deg}(00) [((22), (22)) - ((11), (11))] = 2 [((2, -1), (2, -1)) + ((-1, 2), (-1, 2)) + ((1, 1), (1, 1))] \quad (4.105)$$

Ker je velikost korenov (1, 1), (2, -1) in (-1, 2) enako 1, medtem ko je velikost stanja (2, 2) enako 4, dobimo

$$\text{deg}(00) = 2 \quad (4.106)$$

kot mora biti.

Še stanje (-1, -1):

$$\begin{aligned} \text{deg}(-1, -1) \times [((22), (22)) - ((00), (00))] = & \quad (4.107) \\ & 2 \left[\underbrace{((-1, -1) + \alpha_1, \alpha_1) + ((-1, -1) + \alpha_2, \alpha_2) + 2((-1, -1) + \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)}_{k=1} \right. \\ & \left. + \underbrace{((-1, -1) + 2(\alpha_1 + \alpha_2), \alpha_1 + \alpha_2)}_{k=2} \right] \end{aligned}$$

Dobimo

$$\begin{aligned} \text{deg}(-1, -1) \times (4 - 0) = & \quad (4.108) \\ & 2 [((1, -2), (2, -1)) + ((-2, 1), (-1, 2)) + 2 \times ((0, 0), (1, 1)) \\ & + ((1, 1), (1, 1))] \end{aligned}$$

in končno

$$\text{deg}(-1, -1) = 1 \quad (4.109)$$

kar je spet odgovor pravilen. \diamond

4.7 Dynkinovi diagrami

Kot zaključek omenimo, kako lahko z dvo-dimenzionalnim grafom - Dynkinovim diagramom, obnovimo vse potrebne lastnosti enostavnih korenov poljubne enostavne Lijeve grupe. Dovolj je, da poznamo vse produkte

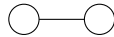
$$(\alpha_i, \alpha_j) = \sqrt{(\alpha_i, \alpha_i)} \sqrt{(\alpha_j, \alpha_j)} \cos \theta_{ij} \quad (4.110)$$

Izkaže se sledeče:

- če imajo vsi enostavni koreni enako dolžino, to je enako vrednost (α_i, α_i) , potem vsak enostaven koren označimo s prazno kroglo \circ ; če so dolžine različne, potem označimo enostavne korene z daljšo dolžino s prazno kroglo \circ , tiste s krajšo dolžino pa s polno kroglo \bullet (izkaže se, da sta lahko v enostavnih grupah največ dve različni dolžini);

- kot θ_{ij} med dvema korenoma označimo na diagramu tako, da povežemo korena (krogle): če ni povezave, potem je kot 90° , če je ena povezava, je kot 120° , dve povezavi pomenita kot 135° , tri pa kot 150° ; drugih možnosti ni;
- razmerje med velikostjo dveh korenov je odvisno od koliko povezav je med njima: za eno povezavo je 1, za dve je $\sqrt{2}$, za tri pa $\sqrt{3}$.

Primer 35. Grupo $SU(3)$ označimo kot



Iz diagrama vidimo, da so velikosti vseh korenov enake, torej lahko izberemo

$$(\alpha_1, \alpha_1) = (\alpha_2, \alpha_2) = 1 \quad (4.111)$$

Tedaj je

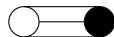
$$(\alpha_1, \alpha_2) = (\alpha_2, \alpha_1) = \cos 120^\circ = -1/2 \quad (4.112)$$

in torej res

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{\frac{(\alpha_1, \alpha_1)}{(\alpha_2, \alpha_2)}} \cos \theta_{12} \\ 2\sqrt{\frac{(\alpha_2, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)}} \cos \theta_{12} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.113)$$

kar smo sicer že vedeli. \diamond

Primer 36. Grupa G_2 je primer, ko imamo več povezav in različne dolžine enostavnih korenov. Dynkinov diagram zglada



V tem primeru lahko dobimo matriko A podobno kot prej, le da imamo (tri povezave med korenoma, torej $\theta_{12} = 150^\circ$)

$$(\alpha_1, \alpha_1) = 3 \quad , \quad (\alpha_2, \alpha_2) = 1 \quad , \quad \cos \theta_{12} = -\sqrt{3}/2 \quad (4.114)$$

in torej za G_2

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2\sqrt{\frac{(\alpha_1, \alpha_1)}{(\alpha_2, \alpha_2)}} \cos \theta_{12} \\ 2\sqrt{\frac{(\alpha_2, \alpha_2)}{(\alpha_1, \alpha_1)}} \cos \theta_{12} & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (4.115)$$

kar z lahkoto preverimo npr. pri Slanskem. \diamond

5 Dodatne (rezervne) vaje

Vaja 15. Lorentzova simetrija, glej npr. [14], str. 4-7. \triangle

Vaja 16. Spinorji v $SO(2N)$, glej npr. [15], str. 558-564. \triangle

Vaja 17. Pokaži, da je $SO(4) \sim SU(2) \times SU(2)$, glej npr. [14], sekcija 2.2, str. 9-10. Pokaži, da ustreza upodobitev 4 od $SO(4)$ upodobitvi (2,2) od $SU(2) \times SU(2)$ (to ni Dynkinova notacija, pač pa upodobitev 2 prve $SU(2)$ in upodobitev 2 druge $SU(2)$). \triangle

Literatura

- [1] H. Georgi, “Lie algebras in particle physics,” *Front. Phys.* **54** (1999) 1.
- [2] J. P. Elliott and P. G. Dawber, “Symmetry In Physics. Vol. 1: Principles And Simple Applications,” HOUNDMILLS, UK: MACMILLAN EDUC. (1987) 1-280
- [3] J. P. Elliott and P. G. Dawber, “Symmetry In Physics. Vol. 2: Further Applications,” HOUNDMILLS, UK: MACMILLAN EDUC. (1986) 281-557
- [4] H. F. Jones, “Groups, representations and physics,” Bristol, UK: Hilger (1990) 287p.
- [5] A. Alex, M. Kalus, A. Huckleberry and J. von Delft, “A Numerical Algorithm for the Explicit Calculation of $SU(N)$ and $SL(N, C)$ Clebsch-Gordan Coefficients,” *J. Math. Phys.* **52** (2011) 023507 [arXiv:1009.0437 [math-ph]]. Članek lahko dobite na <https://arxiv.org/pdf/1009.0437.pdf>
- [6] <http://homepages.physik.uni-muenchen.de/~vondelft/Papers/ClebschGordan/>
- [7] R. Slansky, “Group Theory for Unified Model Building,” *Phys. Rept.* **79** (1981) 1.
- [8] <https://lib-extopc.kek.jp/preprints/PDF/1981/8102/8102061.pdf>
- [9] R. Feger and T. W. Kephart, “Mathematica Application for Lie Algebras and Representation Theory,” *Comput. Phys. Commun.* **192** (2015) 166 [arXiv:1206.6379 [math-ph]]. Članek lahko dobite na <https://arxiv.org/pdf/1206.6379.pdf>
- [10] N. Yamatsu, “Finite-Dimensional Lie Algebras and Their Representations for Unified Model Building,” arXiv:1511.08771 [hep-ph]. Članek lahko dobite na <https://arxiv.org/pdf/1511.08771.pdf>
- [11] <http://www-math.univ-poitiers.fr/~maavl/LiE/>
- [12] L. F. Li, *Phys. Rev. D* **9** (1974) 1723.
- [13] <http://www-f1.ijs.si/~bajc/sims.nb>
- [14] <http://www-f1.ijs.si/~bajc/ktp.pdf>
- [15] F. Wilczek and A. Zee, “Families from Spinors,” *Phys. Rev. D* **25** (1982) 553.