

KVANTNA TEORIJA POLJA

Borut Bajc^{a,b,1}

^a *Institut J. Stefan, 1000 Ljubljana, Slovenija*

^b *Fakulteta za Matematiko in Fiziko, Univerza v Ljubljani, 1000 Ljubljana, Slovenija*

Povzetek

Te skripte so namenjene enosemesterskemu predavanju (30 ur teorije in 15 ur vaj) predmeta Kvantna teorija polja na dodiplomskem študiju fizike.

Kazalo

1	Uvod, relativnost (45min)	3
1.1	Motivacija in cilji	4
1.2	Lorentzove transformacije	4
2	Še o Lorentzovi grupi (45min)	7
2.1	Spinorji	7
2.2	Vse upodobitve Lorentzove grupe	9
2.3	Vaja 1	11
3	Kvantna mehanika, enačbe za razne spine (45min)	11
3.1	Schrödingerjeva enačba	11
3.2	Klein-Gordonova enačba	11
3.3	Diracova enačba	13
3.4	Maxwellove enačbe	14
3.5	Vaja 2	14
4	Enačbe gibanja, interne simetrije (1h30min)	15
4.1	Akcija	15
4.2	Noetherin izrek	17
4.3	Umeritvena invarianca	18
4.4	Vaja 3	21
5	Perturbacija (3h)	21
5.1	* Kvantna mehanika	21
5.2	Klasična teorija polja, Feynmanova pravila in grafi	23
5.3	Ozadja z Lorentzovo simetrijo, Feynmanova pravila in grafi v p -prostoru	27

¹borut.bajc@ijs.si

6	Do kvantne teorije polja (1h30min)	29
6.1	Popotni integral	29
6.2	Končno kvantna teorija polja	30
7	Kanonična kvantizacija	33
7.1	Hamiltonka	33
7.1.1	Prosto realno skalarno polje	34
7.1.2	Prosto kompleksno skalarno polje	34
7.1.3	Prosto Diracovo polje	35
7.2	Kvantizacija polj	35
7.2.1	Realno skalarno polje	36
7.2.2	Kompleksno skalarno polje	38
7.2.3	Diracovo polje	39
7.2.4	Maxwellovo polje	40
7.3	Vaja 4	40
7.4	Vaja 5	41
7.5	Polja v različnih slikah, operator časovne evolucije	41
7.6	Korelacijske (Greenove) funkcije	43
7.7	Wickov izrek	45
7.8	Vaja 6	47
8	* Rodovni funkcional (2h15min)	48
8.1	Poseben primer prostih delcev	48
8.2	Interakcija	49
8.3	Perturbacija in zanke	54
8.4	Vaja 7	55
9	Fizikalne količine (45 min)	55
9.1	* Amplituda preko popotnega integrala	56
9.2	Sipalni presek	56
9.3	Razpadna širina	59
10	Kvantna elektrodinamika (QED)	
	(2h 15 min)	59
10.1	Lagrangian	59
10.2	Feynmanova pravila	59
10.2.1	Propagatorji	59
10.2.2	Vozlišča	62
10.2.3	Fermionske zanke	62
10.2.4	Zunanje noge	63
10.2.5	Obnova Feynmanovih pravil za QED	65
10.3	Vaja 8	66
10.4	Ward-Takahashijeve enačbe	66

11 Nekaj novih količin (45 min)	70
11.1 Rodovni funkcional za povezane grafe	70
11.2 1-delčno nerazcepna (1-PI) vozlišča	71
11.3 Vaja 9	73
12 ∞ (6 h)	74
12.1 Regularizacija	74
12.2 Renormalizacija	75
12.3 Nadaljna komplikacija: renormalizacija polja	77
12.4 Protičleni	78
12.5 Različni renormalizacijski pogoji (sheme)	79
12.6 Vaja 10	80
12.7 Enačbe renormalizacijske grupe	80
12.8 Ekspliciten primer	82
12.9 Vaja 11	85
12.10 Vaja 12	86
13 Kvantna elektrodinamika do ene zanke (1h30min)	86
13.1 Propagator elektrona	87
13.2 Propagator fotona	89
13.3 Vaja 13	91
13.4 Vaja 14	91

1 Uvod, relativnost (45min)

Te skripte se bodo stalno spreminjale in dopolnjevale. Je v bistvu kratek pregled tega, kar je (bilo) predavanega, z izjemo poglavij označenimi z zvezdico. Ta so napisane za bralca, ki bi si želel kaj več zvedeti o pristopu kvantizacije preko popotnega integrala. Za bolj natančne opise in izpeljave pa naj bralec seže predvsem po knjigi Ryder-a [1], ki je približno prave dolžine in globine za enosemesterski tečaj, če izpustimo nekaj poglavij. Za tiste, ki jih snov posebno zanima, pa svetujem knjigo Peskina in Schroederja [2], ali pa npr. skripte Siegela [3], ki se dobijo zastonj na spletu (so pa zelo obširne), ali Weinberga [4, 5]. Za poljubno informacijo o fiziki osnovnih delcev priporočam INSPIRE [6], za dnevne novice (novi članki) pa [7].

V teku predavanj se bom skoraj vedno držal konvencije $c = 1$ in $\hbar = 1$. To ne predstavlja nič drugega kot posebno izbiro enot. Tako imajo npr. mase in energija isto enoto, ki jo izberemo tipično GeV (gigaelektronvolt= 10^9 eV), čas in lega pa GeV^{-1} . Pretvorba iz teh enot v klasične gre zelo enostavno: količino, ki jo želimo pretvoriti, pomnožimo s pravimi potencami \hbar oz. c .

1.1 Motivacija in cilji

Diplomski študij fizike nas je izučil tako iz kvantne mehanike kot iz relativnosti (tu in skozi cel tečaj imam v mislih posebno teorijo relativnosti). Pri fiziki delcev pa pridemo zelo hitro do hitrosti le-teh blizu svetlobne. Torej je opis nepopoln. Smisel tega tečaja je naučiti, kako lahko izračunamo merljive fizikalne količine kot sta sipalni presek in razpadna širina na relativistično invarianten način.

1.2 Lorentzove transformacije

Bistvo relativnosti so Lorentzove transformacije. Te bomo izpeljali kot rotacije 4-dimenzionalnega prostora (čas x^0 in prostorske koordinate x^i , na kratko x^α). Indeksi z latinskimi črkami bodo označevali prostorske koordinate in tekli od 1 do 3, indeksi z grškimi črkami pa od 0 do 3.

Spomnimo se najprej, kako opišemo rotacije v ravnini (2-dimenzionalnem prostoru). Čisto enostavno je

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

Rotacijsko matriko zapišemo lahko (preveri!) na nekoliko čuden način kot

$$O = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \exp(i\alpha T) \quad (1.2)$$

kjer imenujemo matriko

$$T = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

generator rotacije v 2-dimenzionalnem prostoru. Matrike (1.2) tvorijo Lie-jevo grupo $SO(2)$. Lie-jevo zato, ker je parameter α zvezen, $SO(d)$ pa v splošnem pomeni ortogonalne ($OO^T = O^T O = I$) rotacije v d -dimenzionalnem prostoru z enotsko determinanto ($\det O = 1$).

Taka oblika je zelo uporabna pri posplošitvi. V d -dimenzionalnem prostoru zarotiramo vektor $x = (x^1, \dots, x^d)^T$ preko grupnega elementa O ($d \times d$ matriko). Vsi ti elementi tvorijo grupo $SO(d)$, vsak element pa je opisan z $d(d-1)/2$ koti $\alpha^{ab} = -\alpha^{ba}$ preko

$$O = \exp\left(\frac{i}{2}\alpha^{ab}T_{ab}\right) \quad (1.4)$$

in prav tolikimi generatorji rotacije (Kroneckerjev δ je 1, če sta indeksa enaka in 0 drugače)

$$(T_{ab})^{kl} = -i (\delta_a^k \delta_b^l - \delta_b^k \delta_a^l) \quad (1.5)$$

Spomniti se moramo, da označita indeksa a in b generator (lahko bi označili drugače, npr. z zaporednim številom od 1 do $d(d-1)/2$, $T_{12} \rightarrow T_1$, $T_{13} \rightarrow T_2$, itd.), medtem ko nam k in l povesta, o kakšnem elementu matrike govorimo.

V primeru $SO(2)$ je seveda en sam element, T_{12} , ki smo ga označili zato kar brez indeksa.

Upodobitev generatorjev preko (1.5) je le ena izmed neskončno mnogih. Le-te lahko upodobimo kot $n \times n$ matrike, upodobitev (1.5) je najnižje² dimenzionalna (d) in imenujemo fundamentalna upodobitev grupe $SO(d)$. V splošnem pa vsi generatorji (poljubne upodobitve) grupe $SO(d)$ zadoščajo algebri, ki je definirana preko komutatorja

$$[T_{ab}, T_{cd}] = i (\delta_{ac} T_{bd} + \delta_{bd} T_{ac} - \delta_{bc} T_{ad} - \delta_{ad} T_{bc}) \quad (1.6)$$

Upoštevajoč, da je $T_{ab} = -T_{ba}$ in $\delta_{ab} = +\delta_{ba}$, lahko preverimo konsistenco zgornje oblike tako, da zamenjamo 1) $a \leftrightarrow b$, 2) $c \leftrightarrow d$, 3) istočasno $a \leftrightarrow c$ in $b \leftrightarrow d$. Ni težko tudi preveriti, da upodobitev (1.5) res zadošča definiciji (1.6).

Še nekaj: če bi dopustili, da je determinanta ortogonalnih matrik lahko tudi -1 , bi dobili grupo $O(d)$ namesto $SO(d)$. V treh dimenzijah to pomeni npr., da imamo tudi zrcaljenje okoli poljubne ravnine ($x^i \rightarrow -x^i$ za en sam i) ali inverzijo ($x^i \rightarrow -x^i$ za vse i).

Sedaj pa se povrnimo k Lorentzovim transformacijam. Prostor-čas je sicer res 4-dimenzionalen prostor, vendar posebnega tipa, saj čas kljub vsemu ni prostor. To se vidi npr. pri invariantah. Spomnimo se, da je razdalja elementov v 4-dimezijalnem prostoru $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$, ne pa vsota kvadratov, kot bi bila v navadnem Evklidskem prostoru. To pomeni, da dobimo produkt dveh vektorjev v prostoru Minkowskega, če med njima damo matriko - metrični tenzor, ki posebej skrbi za te dodatne minuse. Če sta npr. $a^\mu = (a^0, a^i)$ in $b^\mu = (b^0, b^i)$, potem je produkt

$$a^0 b^0 - a^1 b^1 - a^2 b^2 - a^3 b^3 = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu \quad (1.7)$$

kjer je metrični tenzor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

Vedno se poslužujemo konvencije, da pomenita dva enaka Lorentzova indeksa seštevanje (to je brez eksplisitnega sumacijskega znaka), nastopati pa morata eden zgoraj, eden pa spodaj (nikoli oba zgoraj ali oba spodaj). Zato je tu uporabno tudi dvigovanje oz. zniževanje indeksov preko metričnega tenzorja. Tako lahko zgornjo enačbo zapišemo na več ekvivalentnih načinov

²Izjema za $d < 4$ predstavljajo spinorske upodobitve, glej naslednje poglavje.

$$a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^\mu b_\mu = a_\mu g^{\mu\nu} b_\nu = a_\mu b^\mu \quad (1.9)$$

kjer smo definirali

$$a_\mu \equiv g_{\mu\nu} a^\nu = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (a^0, -a^1, -a^2, -a^3) \quad (1.10)$$

ter inverz metričnega tenzorja, to je

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.11)$$

ki zadošča

$$(gg^{-1})_\mu^\nu = g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^\nu \quad (1.12)$$

$$(g^{-1}g)^\mu_\nu = g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_\nu \quad (1.13)$$

Odtod tudi vidimo, da je $g_\mu^\nu = \delta_\mu^\nu$.

Prejšnje definicije za grupe $SO(d)$ sedaj posplošimo za $SO(d_+, d_-)$, kjer imamo metrični tenzor v diagonali d_+ enic in d_- minus enic (v našem primeru nas zanima primer $SO(1,3)$). Vse zgornje definicije so v redu, le da moramo sistematično vse δ zamenjati z g in vse produkte matrice razumeti z vmesnim g . Tako je npr. definicija komutatorja v algebri $SO(1,3)$

$$[T_{\alpha\beta}, T_{\mu\nu}] = i(g_{\alpha\mu} T_{\beta\nu} + g_{\beta\nu} T_{\alpha\mu} - g_{\beta\mu} T_{\alpha\nu} - g_{\alpha\nu} T_{\beta\mu}) \quad (1.14)$$

definicijo za grupni element (1.4), kar je matrika v 4-dimenzionalnem prostoru Minkowskega, pa moramo pri razvoju v vrsto razumeti kot

$$\Lambda^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu + \frac{\theta^{\alpha_1\beta_1}}{2} (iT_{\alpha_1\beta_1})^\mu_\nu + \frac{1}{2} \frac{\theta^{\alpha_1\beta_1}}{2} \frac{\theta^{\alpha_2\beta_2}}{2} (iT_{\alpha_1\beta_1})^\mu_\lambda (iT_{\alpha_2\beta_2})^\lambda_\nu + \dots \quad (1.15)$$

Posamezne matrice dobimo iz definicije (1.5)

$$(iT_{\alpha\beta})^\mu_\nu = (iT_{\alpha\beta})^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = (\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\lambda - \delta_\alpha^\lambda \delta_\beta^\mu) g_{\lambda\nu} \quad (1.16)$$

Sedaj pa ni težko preveriti, da opisuje (1.15) res Lorentzove transformacije

$$x'^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu \quad (1.17)$$

Preverimo npr., da opisuje rotacija v smeri $\theta^{01} = \alpha$ res Lorentzovo transformacijo v smeri x . Tedaj je

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \left[\delta + \alpha (iT_{01} \cdot g) + \frac{\alpha^2}{2} (iT_{01} \cdot g)^2 + \dots \right]^\mu{}_\nu \quad (1.18)$$

Iz (1.16) sledi

$$iT_{01} \cdot g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

in končno

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \cosh \alpha & -\sinh \alpha & 0 & 0 \\ -\sinh \alpha & \cosh \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (1.20)$$

Končno uvedemo novo spremenljivko, $\cosh \alpha = 1/\sqrt{1-v^2}$, ter dobimo natanko Lorentzovo transformacijo (v je hitrost).

Podobno se pod Lorentzom transformira poljubni tenzor

$$T'^{\alpha_1 \dots \alpha_n} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\beta_1} \dots \Lambda^{\alpha_n}{}_{\beta_n} T^{\beta_1 \dots \beta_n} \quad (1.21)$$

Dobro si je še zapomniti, da sledi iz definicije (1.15) zaradi antisimetrije generatorjev

$$\Lambda_\mu{}^\sigma = (\Lambda^{-1})^\sigma{}_\mu \quad (1.22)$$

odkoder sledi relacija

$$\Lambda^\mu{}_\nu \Lambda_\mu{}^\sigma = \delta^\sigma{}_\nu \quad (1.23)$$

Zato so produkti vektorjev Lorentzovi skalarji:

$$a'^\mu b'_\mu = \Lambda^\mu{}_\nu a^\nu \Lambda_\mu{}^\sigma b_\sigma = a^\nu b_\nu \quad (1.24)$$

2 Še o Lorentzovi grupi (45min)

2.1 Spinorji

Na prvi pogled se zdi, da je fundamentalna upodobitev generatorjev (1.5) tudi najosnovnejša upodobitev, iz katerih lahko dobimo transformacije višjih tenzorjev po vzoru (1.21). V resnici pa to ni res, kajti obstaja še bolj enostavna upodobitev Lorentzove grupe, iz katere lahko izpeljemo celo transformacijsko matriko $\Lambda^\mu{}_\nu$, ki nastopa v (1.17) oz. (1.21).

To sledi iz sledeče izpeljave (omejimo se na štiri dimenzije): predstavljamo si, da obstajajo 4 matrike γ^μ velikosti 4×4 , ki zadoščajo Diracovi algebri

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \quad (2.1)$$

Tedaj matrike

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (2.2)$$

zadoščajo komutacijskim pravilom (1.14).

Matrike, ki jih rabimo lahko napišemo npr. (v kiralni upodobitvi) kot

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

kjer so $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$, $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)$ in σ^i Paulijeve matrike. Spinorska upodobitev Ψ Lorentzove grupe je tedaj tista, ki se transformira kot

$$\Psi' = \Lambda_{1/2} \Psi = \exp\left(\frac{i}{2} \alpha^{\mu\nu} \Sigma_{\mu\nu}\right) \Psi \quad (2.4)$$

V našem primeru (4d) je to štiridimenzionalen Diracov spinor. Ker je prostor-čas sodo dimenzionalen, so generatorji Lorentzovih transformacij v spinorski upodobitvi bločno diagonalni. Torej so nerazcepne upodobitve Lorentzove grupe pravzaprav dvodimenzionalne. V bazi (2.3) so to kar Weylova spinorja ψ_L in ψ_R :

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Pod parnostjo postane

$$\Psi \rightarrow \gamma^0 \Psi \quad (2.6)$$

oz.

$$\psi_L \leftrightarrow \psi_R \quad (2.7)$$

Matriko Lorentzove transformacije v fundamentalni upodobitvi $\Lambda^\mu{}_\nu$ kot obljubljeno izpeljemo lahko iz matrike Lorentzove transformacije v spinorski upodobitvi $\Lambda_{1/2}$:

$$\Lambda_{1/2}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{1/2} = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \quad (2.8)$$

Za poznejšo rabo uvedemo še matriko 4×4

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

ter

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0 \quad (2.10)$$

ki se transformira kot

$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi} \Lambda_{1/2}^{-1} \quad (2.11)$$

Vseh 16 možnih bilinearnih kombinacij Diracovih spinorjev zapišemo lahko kot

$$S = \bar{\Psi} \Psi \quad (2.12)$$

$$P = \bar{\Psi} \gamma^5 \Psi \quad (2.13)$$

$$V^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \Psi \quad (2.14)$$

$$A^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma^5 \Psi \quad (2.15)$$

$$T^{\mu\nu} = \bar{\Psi} [\gamma^\mu, \gamma^\nu] \Psi \quad (2.16)$$

Izbrane črke so kratice (S =skalar, P =psevdoskalar, V =vektor, A =aksijalni vektor, T =tenzor), ki označujejo obnašanje pod Lorentzovimi transformacijami

$$(S', P') = (S, P) \quad (2.17)$$

$$(V'^\mu, A'^\mu) = \Lambda^\mu_\nu (V^\nu, A^\nu) \quad (2.18)$$

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^\mu_\alpha \Lambda^\nu_\beta T^{\alpha\beta} \quad (2.19)$$

in parnostjo

$$S \rightarrow +S \quad (2.20)$$

$$P \rightarrow -P \quad (2.21)$$

$$V^\mu \rightarrow (-1)^{\delta_{\mu 0} + 1} V^\mu \quad (2.22)$$

$$A^\mu \rightarrow (-1)^{\delta_{\mu 0}} A^\mu \quad (2.23)$$

$$T^{\mu\nu} \rightarrow (-1)^{\delta_{\mu 0} + \delta_{\nu 0}} T^{\mu\nu} \quad (2.24)$$

2.2 Vse upodobitve Lorentzove grupe

Splošne generatorje $SO(1,3)$ lahko označimo kot

$$T_{0a} = K_a \quad , \quad T_{ab} = \epsilon_{abc} J_c \quad (2.25)$$

kjer je tenzor Levi-Civite ϵ_{abc} antisimetričen na izmenjavo poljubnih dveh indeksov ter $\epsilon_{123} = 1$. V generatorjih K spoznamo generatorje Lorentzovih premikov (boost), v generatorjih J pa generatorje vrtenja v 3-dimenzionalnem prostoru (vrtilna količina!). Tedaj se komutacijska pravila (1.14) zapišejo kot

$$[K_a, K_b] = -i\epsilon_{abc}J_c \quad (2.26)$$

$$[J_a, K_b] = i\epsilon_{abc}K_c \quad (2.27)$$

$$[J_a, J_b] = i\epsilon_{abc}J_c \quad (2.28)$$

Čeprav to zglada bolj nekompaktno od prejšnjega zapisa, nam nudi več vpogleda. Zadnja enačba predstavlja nič drugega kot komutacijska pravila za operator vrtilne količine. Definiramo lahko nove linearne kombinacije generatorjev

$$A_a = \frac{1}{2}(J_a + iK_a) \quad (2.29)$$

$$B_a = \frac{1}{2}(J_a - iK_a) \quad (2.30)$$

čigar komutacijska pravila se poenostavijo

$$[A_a, A_b] = i\epsilon_{abc}A_c \quad (2.31)$$

$$[A_a, B_b] = 0 \quad (2.32)$$

$$[B_a, B_b] = i\epsilon_{abc}B_c \quad (2.33)$$

To so pa komutacijska pravila za rotacijo v 2-dim kompleksnem prostoru (glej zgornja pravila za operatorje vrtilne količine). Govorimo torej o grupi $SU(2)$, ki imajo tri elemente (splošen $SU(n)$, to so rotacije - ne več ortogonalne, pač pa unitarne matrike - v n -dim kompleksnem prostoru, ima $n^2 - 1$ generatorjev). A in B so torej generatorji dveh grup $SU(2)$.

Generatorji grupe $SO(4)$ se torej razdelijo na generatorje dveh ločenih in neodvisnih rotacij, dveh $SU(2)$ (en z generatorji A , drugi z generatorji B). Torej je grupa $SO(4)$ lokalno ekvivalentna grupi $SU(2) \times SU(2)$.

Polja, ki opisujejo osnovne delce, se transformirajo kot iriducibilne upodobitve Lorentzove grupe, in jih lahko karakteriziramo z dvema večkratnika polovičke, to je z enim spinskim številom za vsak $SU(2)$. Tako je najenostavnejša upodobitev Lorentzov skalar $(0,0)$. Nato imamo dve vrsti spinorjev. Zgornji grupi označimo z indeksoma L (left) in R (right), tako da imamo lahko dve vrsti osnovnih (Weylovih) spinorjev $\psi_L \sim (1/2, 0)$ oz. $\psi_R \sim (0, 1/2)$, ki ju imenujemo levoročni oz. desnoročni spinor. Fizikalno lahko opisujemo z vsakim od njiju le brezmasne fermione, medtem ko potrebujemo oba (oz. Diracov spinor) za opis masivnega fermiona. Slednji se transformira nad Lorentzovimi transformacijami preko $\Lambda_{1/2}$, glej (2.4), odtod tudi oznaka $1/2$, saj imamo opravka z delci s spinom $1/2$. Še zadnjo upodobitev, ki jo bomo stalno uporabljali: to je vektorski bozon $A^\mu \sim (1/2, 1/2)$, ki je delno spin 0 ($= 1/2 - 1/2$) in delno spin 1 ($= 1/2 + 1/2$).

2.3 Vaja 1

- Preveri, da $\Sigma_{\mu\nu} = c[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ zadošča komutacijskim pravilom za $SO(d_+, d_-)$ in določi c .
- Pokaži, da so $\Sigma_{\mu\nu}$ bločno diagonalni v kiralni upodobitvi γ matrik.
- Dokaži enačbo (2.8).
- Preveri enačbe (2.26)-(2.28), oz. preveri proporcionalni faktor pri definiciji operatorja vrtilne količine iz T_{ab} .
- Pokaži, da je Diracova enačba Lorentz kovariantna.

3 Kvantna mehanika, enačbe za razne spine (45min)

3.1 Schrödingerjeva enačba

V kvantni mehaniki smo tipično reševali Schrödingerjevo enačbo oblike

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(-\frac{1}{2m_k}\nabla_k^2 + V\right)\Psi \quad (3.1)$$

kjer seštevamo po vsek delcih $k = 1, \dots, N$, Ψ je valovna funkcija sistema, V pa potencial. Odtod se da izpeljati kontinuitetno enačbo

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\nabla_k \cdot \vec{j}_k \quad (3.2)$$

kjer je

$$\rho = \Psi^*\Psi \quad (3.3)$$

pozitivno definitna količina, in jo lahko torej interpretiramo kot verjetnostna gostota (verjetnost, da je sistem v takem stanju),

$$\vec{j}_k = -\frac{i}{2m_k}(\Psi^*\nabla_k\Psi - \Psi\nabla_k\Psi^*) \quad (3.4)$$

pa verjetnostni tok k -tega delca. Enačba (3.2) nam pove samo to, da se verjetnost ohranja.

3.2 Klein-Gordonova enačba

Schrödingerjeva enačba je eksplicitno nerelativistična. Izvira iz nerelativistične zveze za energijo

$$E = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V \quad (3.5)$$

in zamenjavo energije in gibalne količine z ustreznimi operatorji

$$E \rightarrow i \frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \vec{p} \rightarrow -i \nabla \quad (3.6)$$

Posplošitev za relativističen primer se zdi torej enostavna: iz

$$E^2 = \vec{p}^2 + m^2 \quad (3.7)$$

dobimo Klein-Gordonovo (KG) enačbo (za prosti delec)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \Phi = -m^2 \Phi \quad (3.8)$$

Če vpeljemo

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla \right) \quad (3.9)$$

lahko KG enačbo zapišemo eksplicitno relativistično invariantno:

$$\partial^\mu \partial_\mu \Phi = -m^2 \Phi \quad (3.10)$$

Enačba ima dve glavni napaki. Prvič, rešitev vsebuje tudi negativne energije, saj je koren enačbe (3.7)

$$E = \pm \sqrt{\vec{p}^2 + m^2} \quad (3.11)$$

Ko bi vpeljali poljubno interakcijo (zgornja oblika KG enačbe opisuje le kinematiko, saj je za prost delec), bi lahko delec s pozitivno energijo prešel v enakega z negativno, kar se gotovo ne zgodi. Drugič, podobno kot v primeru Schrödingerjeve enačbe lahko poiščemo relativistični tok

$$j^\mu = \frac{i}{2m} (\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*) \quad (3.12)$$

ki zaradi KG avtomatično zadošča kontinuitetni enačbi

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \quad (3.13)$$

Na žalost pa zdaj

$$\rho = j^0 = \frac{i}{2m} \left(\Phi^* \frac{\partial}{\partial t} \Phi - \Phi \frac{\partial}{\partial t} \Phi^* \right) \quad (3.14)$$

ni več pozitivno definitna količina in je torej ne moremo več interpretirati kot verjetnostno gostoto.

Drugače povedano, rešitev KG enačbe Φ ni več valovna funkcija. Izkazalo se bo, da se vsi problemi rešijo, ko polje Φ interpretiramo kot operator, ki spreminja število delcev.

3.3 Diracova enačba

V prejšnjem razdelku nismo nikjer povedali, za katere delce (s kakšnim spinom) velja KG enačba. Odgovor je preprost: ker je to le kinematska enačba, v njej ni nobene interakcije in izvira le iz zveze med energijo, gibalno količino in maso. Torej naj bi veljala za poljuben spin. In to je res, vendar je to tudi vse le za skalarje, to je delce s spinom 0, ali drugače povedano, za upodobitve $(0, 0)$ Lorentzove grupe. Za drugačne delce pa imamo še dodatne zveze.

Tako velja za delce s spinom $1/2$ že znana Diracova enačba

$$(i\rlap{-}/\partial - m)\Psi = 0 \quad (3.15)$$

kjer smo uporabili znano Feynmanovo konvencijo

$$\rlap{-}/\partial \equiv \gamma^\mu a_\mu \quad (3.16)$$

Diracova enačba je kovariantna na Lorentzove transformacije, za brezmasne delce pa se zreducira na dve neodvisni enačbi, eno za ψ_L , eno za ψ_R .

Relativistično invarianten tok

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \quad (3.17)$$

ima pozitivno definitno ničto komponento, ki jo torej lahko intepretiramo kot gostoto verjetnosti, podobno kot pri Schrödingerjevi enačbi.

Z nastavkom ($px \equiv p_\mu x^\mu$)

$$\Psi = u^{(\alpha)}e^{-ipx} \quad (\text{ali } v^{(\alpha)}e^{+ipx}) \quad (3.18)$$

lahko enačbo rešimo in vidimo, da sta dve lastni vrednosti ($\alpha = 1, 2$) za energijo pozitivni (u), dve pa negativni (v). Ker pa opisuje Diracova enačba delce s spinom $1/2$, so te negativne energije nenevarne. Obratno: Dirac je zaradi rešitev z negativno energijo napovedal obstoj antidelcev, to je delcev, ki imajo vse naboje obratne od delcev. Da bi prepovedal prehod delcev s pozitivno energijo k negativnim energijam, je vsa možna stanja z negativno energijo zapolnil. Vakuum (osnovno stanje sistema) ima torej vsa stanja z negativno energijo zapolnjena. Stanje enega delca s pozitivno energijo je torej stabilno, saj ne more, zaradi Paulijevega izključitvenega načela, preiti v stanje z negativno energijo, ki je že zapolnjeno. Po drugi strani pa tak vakuum dopušča, da z dodatkom energije en delec z negativno energijo spravimo v stanje s pozitivno energijo, njegovo prejšnje stanje pa ostane prazno. Luknja v negativnih stanjih pomeni antidelec, tako da smo z dodatkom energije iz vakuuma tvorili par delec-antidelec.

Čeprav je Diracova enačba dosti boljša od KG ali Schrödingerjeve, saj nima prejšnjih težav in je eksplicitno relativistična, kljub temu pri dovolj visoki energiji odpove. Razlog za to je v tem, da ni zmožna opisati spremembe števila delcev, to je pa nujno, kot smo ravnokar videli (iz vakuuma lahko dobimo dva nova delca, pravzaprav en delec in en antidelec). To stanje bo rešil šele konsistenten opis v okviru kvantne teorije polja.

3.4 Maxwellove enačbe

Še zelo kratka omemba Maxwellovih enačb. Te lahko zapišemo eksplicitno relativistično kovariantno kot

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (3.19)$$

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu \quad (3.20)$$

kjer je A_μ potencial elektromagnetnega polja. $F_{\mu\nu}$ se seveda (to je razvidno iz oblike) pod Lorentzom transformira kot tenzor z dvema indeksoma, A_μ in j_μ pa kot vektorja. Količina j_μ predstavlja izvor (tok) elektromagnetnega polja in se ohranja ($\partial^\mu j_\mu = 0$). Vendar vsebuje enačba (3.20) še preveč odvečne prostosti. Če je namreč $A_\mu(x)$ rešitev, je rešitev tudi $A_\mu(x) + \partial_\mu \alpha(x)$, kjer je $\alpha(x)$ poljubna funkcija koordinat in časa. Uporabimo jo s pridom tako, da zgornje enačbe poenostavimo. Fizikalne količine električno polje \vec{E} in magnetno polje \vec{B} namreč nista odvisni od izbire parametra α , saj je

$$E_i = F_{0i} \quad B_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \partial_j A_k \quad (3.21)$$

Kot primer poenostavljenja enačbe (3.20) vzemimo tak $\alpha(x)$, za katerega velja $\partial^\mu A_\mu = 0$. To lahko naredimo vedno. Recimo da \tilde{A}_μ ni tak. Potem redefiniramo $A_\mu = \tilde{A}_\mu + \partial_\mu \alpha$ in izberemo α kot rešitev enačbe $\partial^2 \alpha = -\partial \cdot \tilde{A}$. Pravimo, da smo izbrali umeritev (gauge). V tej (Lorentzovi) umeritvi je namesto (3.20) dovolj rešit poenostavljeno enačbo

$$\partial^2 A_\nu = j_\nu \quad (3.22)$$

z dodatnim pogojem

$$\partial \cdot A = 0 \quad (3.23)$$

3.5 Vaja 2

- Reši Diracovo enačbo za prost delec, zapiši eksplicitno $u^{(\alpha)}(p)$, $v^{(\alpha)}(p)$.
- Ob normalizaciji

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p) u^{(\alpha')}(p) = 2m \delta^{\alpha\alpha'} \quad (3.24)$$

$$\bar{v}^{(\alpha)}(p) v^{(\alpha')}(p) = -2m \delta^{\alpha\alpha'} \quad (3.25)$$

izračunaj količine

$$P_+ \equiv \sum_{\alpha=1}^2 u^{(\alpha)}(p) \bar{u}^{(\alpha)}(p) \quad (3.26)$$

$$P_- \equiv - \sum_{\alpha=1}^2 v^{(\alpha)}(p) \bar{v}^{(\alpha)}(p) \quad (3.27)$$

- Ob privzetku, da velja

$$u^{(\alpha)} \bar{u}^{(\alpha)} = \frac{1}{2} (1 + \gamma^5 \not{p}) P_+ \quad (3.28)$$

izračunaj eksplicitno četverec polarizacije $S_\mu^{(\alpha)}$ (spin) ter preveri, da je $p^\mu S_\mu = 0$. Vajo ponovi še za $v^{(\alpha)}$.

- Izračunaj za $n = 0, \dots, 4$

$$Tr(\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}) \quad (3.29)$$

$$Tr(\gamma_5 \gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_n}) \quad (3.30)$$

4 Enačbe gibanja, interne simetrije (1h30min)

4.1 Akcija

Vse zgornje enačbe gibanja se dajo izpeljati iz znanega principa ekstrema akcije, ki ga že poznamo iz klasične mehanike. Tu ga le posplošimo za primer polj v 4-dim. prostor-času. Predstavljamo si, da imamo Lagrangevo gostoto (od tu dalje jo bom večkrat imenoval kar Lagrangian), ki je skalar nad Lorentzovimi (a tudi ostalimi, glej pozneje) transformacijami. Je funkcija polj ϕ ter njihovih prvih odvodov $\partial_\mu \phi$, torej $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)$.

Akcija je definirana kot prostorski in časovni integral Lagrangiana

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad (4.1)$$

Princip ekstrema akcije pravi, da dobimo enačbe gibanja, če zahtevamo, da se akcija ne spremeni ob majhni spremembi vrednosti polj $\phi \rightarrow \phi' = \phi + \delta\phi$

$$\begin{aligned} S[\phi'] - S[\phi] &= \int d^4x [\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi)] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \delta\phi + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta(\partial_\mu \phi) \right] \\ &= \int d^4x \left[\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) + \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \right) \right) \delta\phi \right] = 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

V prehodu na zadnjo vrstico smo upoštevali, da je razlika odvodov enaka odvodu razlike $\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\delta\phi$ ter integrirali per partes.

Prvi člen je totalen odvod. Njegov integral je torej odvisen le od vrednosti polj na robu (v neskončnosti). Če se omejimo na polja in/ali na spremembe polj $\delta\phi$, ki so v neskončnosti dovolj majhna, potem ta člen nič ne prispeva. Akcija je torej ekstremalna za vrednosti polj, ki zadoščajo Euler-Lagrangevim enačbam

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0 \quad (4.3)$$

Kakšne Lagrangiane sploh uporabljamo? Kot smo že omenili, naj bo Lagrangian skalar nad Lorentzovimi transformacijami. Želimo tudi, da v primeru prostih polj (nič interakcije) pravilno reproducira enčbe iz prejšnjega poglavja za različne spine, to je Klein-Gordonovo enačbo (spin 0), Diracovo enačbo (spin 1/2) in Maxwelllove enačbe (spin 1).

Ni težko preveriti, da je Lagrangian za prosto realno skalarno polje

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \quad (4.4)$$

kjer izvira normalizacija na polovičko v prvem členu (z odvodi) iz podobne definicije pri klasični mehaniki:

$$L = \frac{1}{2}m\left(\frac{d\vec{x}}{dt}\right)^2 \quad (4.5)$$

Spomniti se moramo namreč, da ustreza času t in koordinatam delca $\vec{x}(t)$ v klasični mehaniki četverec $x^\mu = (t, \vec{x})$ in polja $\phi_i(x^\mu)$ v teoriji polja.

Za prosto kompleksno polje pa

$$\mathcal{L} = \partial_\mu\phi^*\partial^\mu\phi - m^2\phi^*\phi \quad (4.6)$$

Normalizacija je v zadnjem primeru izbrana tako, da se kompleksno polje izrazi z dvema skalarnima kot $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$.

Podobno je za fermione

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi \quad (4.7)$$

kjer moramo pri izpeljavi Euler-Lagrangevih enačb obravnavati ψ in $\bar{\psi}$ kot neodvisni polji (podobno kot ϕ in ϕ^* v (4.6)).

Končno dobimo Maxwelllove enačbe iz

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{gf} \quad (4.8)$$

kjer je zadnji člen odvisen od izbire umeritve (gf=gauge fixing). Če je umeritev npr. Lorentzova, potem je

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2 \quad (4.9)$$

kjer je ξ Lagrangev multiplikator.

Faktor $-1/4$ v (4.8) dobimo, če za produkt časovnih odvodov krajevnih komponent vektorja A^i tudi zahtevamo normalizacijo podobno kot v (4.4). Za časovne komponente A^0 pa sploh nimamo tega kinetičnega člena, kar samo potrjuje, da vse štiri komponente v A^μ niso fizikalne, in še dodatno kliče po členu, ki določa umeritev (recimo (4.9)).

4.2 Noetherin izrek

Povrnimo se k enačbi (4.2). Privzemimo, da polja ϕ zadoščajo enačbam gibanja. Zanimajmo se na interne simetrije Lagrangiana, to je na take $\delta\phi$, za katere je Lagrangian invarianten. Tedaj je prvi člen pod integralom enak nič po celem prostoru (in ne samo po integraciji ali, drugače povedano, v neskončnosti, kot za poljuben $\delta\phi$)

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) = 0 \quad (4.10)$$

Če je polj več, moramo posamezne prispevke seveda sešteti. Tu se zanimamo za zvezne transformacije, ki jih opisujemo z Lievo grupo (T_a so generatorji)

$$\phi' = e^{i\alpha^a T_a} \phi \quad (4.11)$$

Tedaj je $\delta\phi = i\alpha^a T_a \phi$. Skupno dobimo toliko ohranitvenih tokov, kolikor generatorjev transformacije imamo:

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0, \quad j_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} i T_a \phi \quad (4.12)$$

Te relacije so nujno točne le ob upoštevanju enačb gibanja.

Poglejmo že znan primer Lagrangiana za prosto kompleksno polje (4.6). Simetrija tu je faza $U(1)$:

$$\phi' = e^{i\alpha} \phi, \quad \phi'^* = e^{-i\alpha} \phi^* \quad (4.13)$$

na katero je invarianten Lagrangian (4.6). Tedaj je tok

$$j^\mu = i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) \quad (4.14)$$

Če to odvajamo, dobimo

$$\partial_\mu j^\mu = i(\phi \partial^2 \phi^* - \phi^* \partial^2 \phi) = i(-\phi m^2 \phi^* + \phi^* m^2 \phi) = 0 \quad (4.15)$$

kjer smo upoštevali enačbo gibanja

$$(\partial^2 + m^2) \phi = 0 \quad (4.16)$$

Ta tok (4.14) smo že spoznali v prejšnjem poglavju in je izviral iz Klein-Gordonove enačbe, tu pa kar iz simetrije Lagrangiana. Pravimo, da se tok (4.12) ohranja, ker se količina

$$Q_a = \int d^3x j_a^0 \quad (4.17)$$

ki ji pravimo naboj, s časom ne spreminja:

$$\frac{dQ_a}{dt} = \int d^3x \partial_0 j_a^0 = \int d^3x \partial_\mu j_a^\mu = 0 \quad (4.18)$$

Upoštevali smo, tako kot ponavadi, da polja dovolj hitro padajo v neskončnosti, ter uporabili Gaussov izrek (integral po prostoru divergence je integral po robu). Tok (4.12) in naboj (4.17) imenujemo Noetherin tok in Noetherin naboj. Noetherin izrek pravi, da se taki naboji ohranjajo.

4.3 Umeritvena invarianca

Pri transformacijah (4.11) smo se do sedaj omejili na take, pri katerih so parametri α_a konstante. V tem razdelku bomo obravnavali izredno pomemben primer, ko so ti parametri funkcije koordinat, $\alpha_a = \alpha_a(x)$. Take imenujemo umeritvene transformacije.

Motivacija za le-te izvira iz umeritvene invariance Maxwellovih enačb. Če želimo fermion

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad (4.19)$$

sklopiti z EM poljem, to naredimo po že znanem receptu iz kvantne mehanike

$$i\partial_\mu \rightarrow p_\mu \rightarrow p_\mu + eA_\mu \rightarrow i\partial_\mu + eA_\mu \rightarrow iD_\mu \quad (4.20)$$

Definirali smo kovariantni odvod

$$D_\mu \psi = (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi \quad (4.21)$$

Lagrangian

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi \quad (4.22)$$

je invarianten na umeritvene (gauge) transformacije

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)} \psi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \quad (4.23)$$

saj je lastnost kovariantnega odvoda na polje ta, da se transformira pod umeritvenimi transformacijami kot polje samo

$$(D_\mu \psi)' = e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi \quad (4.24)$$

Podobno je kinetični člen za EM polje

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (4.25)$$

invarianten na umeritvene transformacije, saj je to že tenzor EM polja sam

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (4.26)$$

$$F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} \quad (4.27)$$

Vsota (4.22) in (4.25) tvori Lagrangian za fermion plus EM polje.

Transformacije (4.23) tvorijo, kot vemo, grupo $U(1)$, to je sprememba faze fermiona. Stvar lahko posplošimo za druge grupe, in to sta prva naredila Yang in Mills v petdesetih letih, ki sta prva zapisala Lagrangian invarianten na umeritvene transformacije grupe $SU(2)$.

Še bolj splošno, želimo razumeti, kakšni Lagrangiani so invariantni na

$$\psi' = U\psi \quad , \quad U = U(\alpha(x)) \quad , \quad U^\dagger = U^{-1} \quad (4.28)$$

kjer so U unitarne matrike, elementi grupe $SU(N)$. Členi oblike $\bar{\psi}\psi$ so invariantni zaradi unitarnosti transformacijske matrike U . Problemi pa nastanejo, ko imamo opravka z odvodi:

$$\partial_\mu \psi' = U\partial_\mu \psi + (\partial_\mu U)\psi \quad (4.29)$$

tako da zaradi drugega člena kinetični člen v Lagrangianu ni invarianten

$$\bar{\psi}' i\gamma^\mu \partial_\mu \psi' \neq \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi \quad (4.30)$$

Podobno kot prej s poljem fotona A_μ želimo tudi zdaj navaden odvod pretvoriti v kovariantnega. Spomnimo se, da imamo zdaj grupo $SU(N)$ in torej $N^2 - 1$ umeritvenih bozonov, enako število kot število generatorjev transformacij. Najprej definiramo matriko

$$A_\mu \equiv A_\mu^a T^a \quad (4.31)$$

kjer naj bodo generatorji T^a v isti upodobitvi kot ψ . Če je npr. ψ v fundamentalni upodobitvi, so v primeru $SU(2)$ generatorji T^a kar pravilno normalizirane Paulijeve matrike $\sigma^a/2$, v primeru $SU(3)$ pa Gell-Mannove matrike. V vsakem primeru je konvencija, da so generatorji v fundamentalni upodobitvi normirani na

$$Tr(T^a T^b) = \frac{1}{2} \delta^{ab} \quad (4.32)$$

(drugačna izbira za normo pa samo redefinira sklopitveno konstanto g). Uporabimo podoben trik kot prej. Uvedemo kovariantni odvod

$$D_\mu \psi \equiv (\partial_\mu - igA_\mu)\psi \quad (4.33)$$

ki naj se nad gauge transformacijami

$$\psi' = e^{i\alpha_a(x)T^a} \psi \quad , \quad A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + \frac{c}{g} \partial_\mu (U) U^\dagger \quad (4.34)$$

obnaša kot (4.24). Spremembo vektorskega polja (pravzaprav matrike (4.31)) smo poskusili uganit, konstanto c pa določimo preko pogoja (4.24) za $\alpha(x) \equiv \alpha_a(x)T^a$ in dobimo $c = -i$.

Kako pa dobimo invarianto za kinetične člene umeritvenega bozona A_μ ? Smiselno je določiti podobno obliko kot prej, le da vzamemo sedaj sled, ker imamo opravka z matrikami:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4c_2} \text{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (4.35)$$

kar še ne pove dosti, saj še nismo definirali $F_{\mu\nu}$ za splošno grupo $SU(N)$. Poskus z (4.26) se izkaže za neuspešnega, zato poskusimo z nastavkom (zahtevamo antisimetričnost na zamenjavo indeksov)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + c_1 g [A_\mu, A_\nu] \quad (4.36)$$

Zahteva po

$$F'_{\mu\nu} = U F_{\mu\nu} U^\dagger \quad (4.37)$$

in torej po invarianci (4.35) določi $c_1 = -i$. Zadnjo konstanto c_2 pa določimo preko normalizacije. Želimo imeti za vsako umeritveno polje A_μ^a enako normalizacijo kinetičnega člana kot za primer elektromagnetizma. Tedaj je c_2 le normalizacijski faktor generatorjev (v dani upodobitvi)

$$\text{Tr} (T^a T^b) = c_2 \delta^{ab} \quad (4.38)$$

in torej enak $1/2$ v primeru fundamentalne upodobitve.

Še dva komentarja.

Prvič, splošne formule za $SU(N)$ lahko uporabimo tudi za primer elektromagnetizma, le da je sedaj edini generator $T^a = q$ konstanta, ki ni nujno normalizirana enako za različna polja. To pomeni, da ima lahko vsako polje ψ_q svoj lasten q . Tako lahko npr. interpretiramo e kot naboj elektrona (zanj je $q = 1$), tako da ima up kvark $q = 2/3$, kvark down $q = -1/3$, itd. Produkt qe je torej $U(1)$ naboj polja ψ_q . Tu je razlika med abelovimi $U(1)$ in neabelovimi $SU(N)$ grupami. Medtem ko ima lahko v abelovem primeru vsako polje svoj naboj, je naboj v neabelovem primeru odvisen le od upodobitve grupe.

Drugič, tako kot smo definirali kovariantni odvod za fermione, bi lahko enako za bozone.

$$D_\mu \phi \equiv (\partial_\mu - ig A_\mu) \phi \quad (4.39)$$

invariantni kinetični člen pa

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi \quad (4.40)$$

4.4 Vaja 3

- Pokaži, da pomeni Noetherin izrek za translacije in rotacije ohranitev energije, gibalne količine in vrtilne količine.
- Izračunaj c_1 iz enačbe (4.36), tako da preveriš, ali se polje elektromagnetnega tenzorja transformira pravilno kot $F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger$. Preveri, ali se isti tenzor da zapisati kot $D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu$ ali $[D_\mu, D_\nu]$.

5 Perturbacija (3h)

5.1 * Kvantna mehanika

Schrödingerjeva enačba ohranja število nastopajočih delcev, rešitev (valovna funkcija) se pa iz $\psi(x_a, t_a)$ (x_a se nanašajo na koordinate vseh delcev ob začetnem času t_a) spremeni v $\psi(x_b, t_b)$ (x_b se nanašajo na koordinate vseh delcev ob končnem času t_b). To lahko nazorno zapišemo preko funkcije $G(x_b, t_b; x_a, t_a)$:

$$\psi(x_b, t_b) = \int G(x_b, t_b; x_a, t_a) \psi(x_a, t_a) dx_a \quad (5.1)$$

Ko torej to funkcijo G poznamo, poznamo sistem v celoti. Nekaj podobnega bo res tudi pozneje v teoriji polja, ko se lahko število nastopajočih delcev spremeni, vendar tedaj interpretacija (5.1) seveda ne bo veljala.

V splošnem je enačba, ki jo rešujemo, oblike

$$\mathcal{O}_{x_b, t_b} \psi(x_b, t_b) = 0 \quad (5.2)$$

Ta je npr. lahko

$$\mathcal{O}_{x_b, t_b} = -\frac{1}{2m_b} \nabla_{x_b}^2 + V(x_b, t_b) - i \frac{\partial}{\partial t_b} \quad (5.3)$$

Če bi znali enčbe reševati eksaktno, bi se tu poglavje zaljučilo. Ker pa jih praktično nikoli ne znamo, se moramo posluževati približkov. Najpogosteje to naredimo na sistematičen način tako, da uporabimo perturbacijski razvoj. Operator \mathcal{O} razdelimo na del, ki ga znamo analitično rešiti (to je tipično sistem brez interakcije) ter ostanek:

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}^0 + \mathcal{O}^1 \quad (5.4)$$

Operator \mathcal{O}^0 izberemo tako, da znamo rešiti tako homogeno kot nehomogeno enačbo

$$\mathcal{O}_{x, t}^0 \psi_0(x, t) = 0 \quad (5.5)$$

$$\mathcal{O}_{x_2, t_2}^0 G_0(x_2, t_2; x_1, t_1) = -i \delta(x_2 - x_1) \delta(t_2 - t_1) \quad (5.6)$$

V primeru (5.3) je za en delec v D prostorskih dimenzijah to recimo (Heavisideova funkcija $\theta(t) = 1$ za $t > 0$ in 0 drugače)

$$\mathcal{O}^0 = -\frac{1}{2m}\nabla^2 - i\frac{\partial}{\partial t} \quad (5.7)$$

$$\mathcal{O}^1 = V \quad (5.8)$$

$$\psi_0(x, t) \propto e^{-i(Et - \vec{p}\vec{x})}, \quad E = \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad (5.9)$$

$$G_0(x_2, t_2; x_1, t_1) = \left(\frac{m}{2\pi it}\right)^{D/2} \exp\left[\frac{im\vec{x}^2}{2t}\right] \theta(t) \quad (5.10)$$

kjer sta $\vec{x} \equiv \vec{x}_2 - \vec{x}_1$ in $t \equiv t_2 - t_1$.

Za $D = 1$ izpeljimo (5.10) iz (5.6). Kot ponavadi nam invarianca na traslacije pove, da je Greenova funkcija G_0 odvisna le od razlik $x_x = x_2 - x_1$ in $x_t = t_2 - t_1$:

$$G_0(x_2, t_2; x_1, t_1) \rightarrow G_0(x) \quad (5.11)$$

Rešitev (5.6) nastavimo preko integrala

$$G_0(x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tilde{G}_0(k) e^{-ikx} \quad (5.12)$$

Dobimo

$$\tilde{G}_0(k) = \frac{i}{k_t - k_x^2/(2m)} \quad (5.13)$$

To je bilo izračunano formalno, za integracijo po d^2k pa rabimo še predpis, kako se izogniti polu na realni asi $k_t = k_x^2/2m$. To naredimo tako, da dodamo v imenovalcu člen $+i\epsilon$, kjer je $\epsilon > 0$ infinitezimalno majhen in ga bomo na koncu računov lahko postavili na nič. Tedaj je nov pol

$$k_t = \frac{k_x^2}{2m} - i\epsilon \quad (5.14)$$

to je v četrtem kvadrantu kompleksne ravnine ($Re(k_t), Im(k_t)$). Integracijo po (realnem) k_t od $-\infty$ do $+\infty$ lahko torej pretvorimo v zaključen integral okoli zgornje polravnine, če je $t < 0$ ali okoli spodnje polravnine za $t > 0$ (integral na loku v neskončnosti je nič, če $Re(-ik_t t) = Im(k_t)t < 0$). Edini pol v celi k_t ravnini pa je, kot rečeno v četrtem kvadrantu, torej je integral avtomatično nič za $t < 0$. V obratnem primeru pa dobimo

$$G_0(x) = \theta(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \exp\left[-i\left(\frac{k_x^2}{2(m+i\epsilon)}t - k_x x\right)\right] \quad (5.15)$$

(da novi ϵ ni čisto enak prejšnjemu, nas v resnici ne zanima, važno je le, da ima isti predznak). Da je za $t < 0$ integral nič smo poskrbeli s Heavisideom.

Zadnji integral pospravimo s pomočjo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\lambda x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \quad (5.16)$$

kar je res pod pogojem, da je $Re(\lambda) > 0$, za kar se moramo v našem zgornjem primeru zahvaliti pozitivnemu ϵ -u. To uporabimo in pridemo do (5.10), kar smo želeli dokazat.

Tipičen proces, ki ga bomo študirali, bo sipanje, ko delci prihajajo od zelo daleč. Tedaj ($t_a \rightarrow -\infty$) so ti delci v bistvu prosti, torej rešijo homogeno enačbo (5.5). Seveda to ne more biti čisto res, saj je ravni val prisoten po celem prostoru, torej tudi v bližini, kjer je interakcija. V resnici pa so delci seveda paketi in v neskončnosti ne čutijo interakcije. Približek, da je valovna funkcija v neskončnosti za proste delce mora torej dobro veljati:

$$\psi(x_a, t_a) = \psi_0(x_a, t_a) \quad (5.17)$$

Rešitev (5.2) zadošča integralski enačbi

$$\psi(x_b, t_b) = \psi_0(x_b, t_b) - i \int G_0(x_b, t_b; x, t) \mathcal{O}_{x,t}^1 \psi(x, t) dx dt \quad (5.18)$$

kar se lahko prepričamo, če direktno delujemo z operatorjem \mathcal{O}_{x_b, t_b}^0 .

Sedaj smo pa že tu: ψ na desni strani zopet razvijemo podobno kot nam nakaže enačba sama, in dobimo perturbacijski razvoj (za $\mathcal{O}^1 = V$)

$$\begin{aligned} \psi(x_b, t_b) &= \psi_0(x_b, t_b) + \int G_0(x_b, t_b; x, t) (-i)V(x, t)\psi_0(x, t) dx dt \\ &+ \int G_0(x_b, t_b; x, t) (-i)V(x, t)G_0(x, t; x', t') (-i)V(x', t')\psi_0(x', t') dx dt dx' dt' + \dots \end{aligned} \quad (5.19)$$

S $\psi_0(x, t)$ imamo v mislih enako funkcijo kraja in časa kot smo jo imeli na začetku (ista gibalna količina), to je

$$\psi_0(x, t) = \int G_0(x, t; x_a, t_a) \psi_0(x_a, t_a) dx_a \quad (5.20)$$

ki velja za $t > t_a$, zato da je zadoščeno (5.5).

Podoben razvoj lahko seveda ponovimo še za

$$\begin{aligned} G(x_b, t_b; x_a, t_a) &= G_0(x_b, t_b; x_a, t_a) \\ &+ \int G_0(x_b, t_b; x, t) (-i)V(x, t)G_0(x, t; x_a, t_a) dx dt + \dots \end{aligned} \quad (5.21)$$

5.2 Klasična teorija polja, Feynmanova pravila in grafi

Zgornja izpeljava rešitve Schrödingerjeve enačbe je nazorna, saj lahko spremljamo spremembo propagatorja v interagirajoči teoriji G : ta je sestavljena iz prostega propagatorja

G_0 , dveh prostih propagatorjev G_0 povezanih z enim interakcijskim verteksom V , treh prostih funkcij G_0 povezanih z dvema verteksa V , itd. Za dovolj majhne interakcije V upamo, da razvoj konvergira.

Dve sta hibi tega pristopa: 1) vse je nerelativistično; 2) interakcija je zunanja, to je število delcev se ne spremeni. Prvo hibo bomo popravili tako, da bomo namesto Schrödingerjeve enačbe reševali Klein-Gordonovo enačbo, drugo pa tako, da bomo dosedaj linearno enačbo v valovni funkciji ψ posplošili z nelinearnimi členi. Poglejmo si to v podrobnosti.

Obravnavajmo Lagrangevo gostoto

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \quad (5.22)$$

Enačba gibanja je

$$\partial^2\phi = -\frac{\partial V}{\partial\phi} + J \quad (5.23)$$

kjer smo na desni strani dodali izvir (ali ponor) delcev J . Podobno kot v prejšnjem primeru enačbe ne znamo rešiti v splošnem, zato jo bomo perturbativno. V ta namen razvijemo po potencah nekega fiktivnega parametra λ . Na koncu računa ga bomo izenačili z enko, $\lambda \rightarrow 1$.

$$\phi \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \phi_n \quad , \quad J \rightarrow \lambda J \quad (5.24)$$

Enačba gibanja (5.23) se pretvori v neskončen sistem:

$$\partial^2\phi_0 + V'(\phi_0) = 0 \quad (5.25)$$

$$(\partial^2 + V''(\phi_0))\phi_1 = J \quad (5.26)$$

$$(\partial^2 + V''(\phi_0))\phi_2 = -\frac{1}{2}V'''(\phi_0)\phi_1^2 \quad (5.27)$$

$$(\partial^2 + V''(\phi_0))\phi_3 = -V'''(\phi_0)\phi_1\phi_2 - \frac{1}{3!}V''''(\phi_0)\phi_1^3 \quad (5.28)$$

...

Prva enačba, (5.25), določi ozadje (po angleško background), okoli katere graditi. Ponavadi je rešitev te enačbe konstanten ϕ_0 , ki ga imenujemo vakuumska pričakovana vrednost polja. Včasih pa je rešitev lahko netrivialna, od časa in kraja odvisna. V tem primeru govorimo npr. o solitonskih rešitvah, če problem obravnavamo v evklidskem prostoru (namesto prostora Minkowskega) pa o prehodu med vakuumskimi stanji ali instantonih. Kakorkoli že, rešitev ϕ_0 predstavlja vakuum sistema, pri tem pa moramo še dodatno pazit, da je ta ekstrem akcije minimum in ne maksimum. To dosežemo z zahtevo, da ima operator $\partial^2 + V''(\phi_0)$ samo nenegativne lastne vrednosti. Privzamamo, da je to res.

Naslednjo enačbo (5.26) rešimo z nastavkom

$$\phi_1(x) = \int dy i\Delta(x, y) iJ(y) \quad (5.29)$$

kjer je propagator $\Delta(x, y)$ Greenova funkcija enačbe

$$(\partial_x^2 + V''(\phi_0(x))) i\Delta(x, y) = -i\delta^4(x - y) \quad (5.30)$$

z lastnostjo

$$\Delta(x, y) = \Delta(y, x) \quad (5.31)$$

Vsi razni i -ji so tu iz zgodovinskih razlogov.

Naslednja enačba je (5.27), katere rešitev je

$$\begin{aligned} \phi_2(x) &= \frac{1}{2} \int dy_1 i\Delta(x, y_1) (-iV'''(y_1)) \\ &\times \int dy_2 i\Delta(y_1, y_2) iJ(y_2) \int dy_3 i\Delta(y_1, y_3) iJ(y_3) \end{aligned} \quad (5.32)$$

kjer smo na kratko označili

$$V^{(n)}(x) \equiv \left. \frac{\partial^n V(\phi)}{\partial \phi^n} \right|_{\phi=\phi_0(x)} \quad (5.33)$$

Iteracijo nadaljujemo

$$\begin{aligned} \phi_3(x) &= \int dy_1 i\Delta(x, y_1) (-iV'''(y_1)) \int dy_2 i\Delta(y_1, y_2) iJ(y_2) \\ &\times \frac{1}{2} \int dy_3 i\Delta(y_1, y_3) (-iV'''(y_3)) \int dy_4 i\Delta(y_3, y_4) iJ(y_4) \\ &\times \int dy_5 i\Delta(y_3, y_5) iJ(y_5) \\ &+ \frac{1}{3!} \int dy_1 i\Delta(x, y_1) (-iV''''(y_1)) \int dy_2 i\Delta(y_1, y_2) iJ(y_2) \\ &\times \int dy_3 i\Delta(y_1, y_3) iJ(y_3) \int dy_4 i\Delta(y_1, y_4) iJ(y_4) \end{aligned} \quad (5.34)$$

Vse to spravimo v bolj simetrično in uporabno obliko, če uvedemo generator povezanih grafov $W[J]$, ki je funkcional izvorov J preko

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi(x) \quad (5.35)$$

kjer funkcionalni odvod v splošnem definiramo kot

$$\begin{array}{ccc}
& i\Delta(x_1 - x_2) & \\
x_1 & & x_2 \\
\hline
\end{array}$$

Figure 1: Feynmanovo pravilo za 2-točkovno Greenovo funkcijo (propagator) v x -prostoru.

$$\frac{\delta F[f(t)]}{\delta f(\tau)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{F[f(t) + \epsilon \delta(t - \tau)] - F[f(t)]}{\epsilon} \quad (5.36)$$

Če sedaj (5.35) integriramo, rešitev pa razvijemo po potencah izvorov, dobimo (brez posledic izberimo $W[0] = 0$)

$$W[J] = \frac{1}{i} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \int dx_1 \dots \int dx_n G(x_1, \dots, x_n) iJ(x_1) \dots iJ(x_n) \quad (5.37)$$

kjer smo z

$$G(x_1, \dots, x_n) \equiv \left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta iJ(x_1) \dots \delta iJ(x_n)} \right|_{J=0} \quad (5.38)$$

definirali n -točkovno Greenovo funkcijo povezanih grafov. Zapišimo nekaj najnižjih:

$$G(x_1) = \phi_0(x_1) \quad (5.39)$$

$$G(x_1, x_2) = i\Delta(x_1, x_2) \quad (5.40)$$

$$G(x_1, x_2, x_3) = \int dy i\Delta(x_1, y) i\Delta(x_2, y) i\Delta(x_3, y) (-iV'''(y)) \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned}
G(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \int dy i\Delta(x_1, y) i\Delta(x_2, y) i\Delta(x_3, y) i\Delta(x_4, y) (-iV''''(y)) \\
&+ \int dy_1 \int dy_2 (-iV'''(y_1)) i\Delta(y_1, y_2) (-iV'''(y_2)) \\
&\times (i\Delta(x_1, y_1) i\Delta(x_2, y_1) i\Delta(x_3, y_2) i\Delta(x_4, y_2) \\
&+ i\Delta(x_1, y_1) i\Delta(x_3, y_1) i\Delta(x_2, y_2) i\Delta(x_4, y_2) \\
&+ i\Delta(x_1, y_1) i\Delta(x_4, y_1) i\Delta(x_2, y_2) i\Delta(x_3, y_2)) \quad (5.42)
\end{aligned}$$

Rezultat postaja bolj in bolj zapleten, vendar se naravno ponudi zanimiva slikovna interpretacija rešitve preko grafov. Propagator $i\Delta(x, y)$ ponazorimo s povezavo (črto) med točkama x in y , interakcijo $(-iV^{(n)}(x))$ pa z n -točkovnim vozliščem (takim, ki ima n nog). To korespondenco imenujemo Feynmanova pravila. Grafe, ki jih tako narišemo, pa Feynmanove grafe.

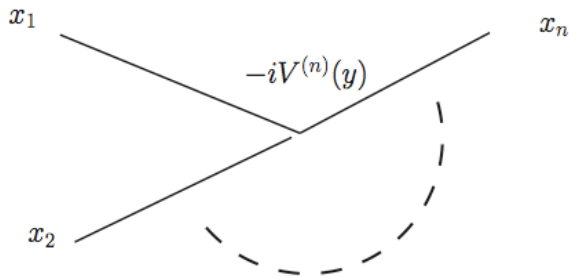


Figure 2: Feynmanovo pravilo za n -točkovno Greenovo funkcijo v x -prostoru.

n -točkovno klasično Greenovo funkcijo tako dobimo lahko preko grafov. Najprej narišemo vse možne drevesne (s tem mislimo grafe, ki ne ogradijo nobene točke na sliki) grafe z n zunanji nogami, nato pa po Feynmanovih pravilih grafu priredimo funkcijo. Pri tem ne smemo pozabiti na integracijo po vseh notranjih točkah (y_i v enačbah (5.41)-(5.42)), kar je v grafu implicitna.

5.3 Ozadja z Lorentzovo simetrijo, Feynmanova pravila in grafi v p -prostoru

Čeprav je vse dokaj kompaktno zapisano, je za splošno ozadje $\phi_0(x)$ zelo težko če ne nemogoče izračunati Greenove funkcije analitično. Stvari se zelo poenostavijo v primeru ozadij, ki ohranjajo Lorentzovo simetrijo, to pomeni s konstantnim ϕ_0 . V naslednjem bomo obravnavali skoraj izključno taka ozadja

Tako se npr. pogoj o nenegativnih lastnih vrednosti Klein-Gordonovega operatorja $\partial^2 + V''(\phi_0)$ pretvori v pogoj o pozitivnem kvadratu mase ekscitacije:

$$m^2 = V''(\phi_0) \geq 0 \quad (5.43)$$

Če bi ne pazili na to, bi naslednja enačba (5.26) dala eksponentno rastoče rešitve, ki signalizirajo nestabilnost rešitve (v maksimumu akcije sistem seveda ni stabilen).

Ohranitev Lorentzove simetrije pridno izrabimo tako, da vse količine pretvorimo preko Fourierove transformacije v p prostor.

$$G(x_1, \dots, x_n) = \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \cdots \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} e^{ip_1 x_1} \cdots e^{ip_n x_n} \times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) G(p_1, \dots, p_n) \quad (5.44)$$

kjer je δ -funkcija v integrandu posledica translacijske invariance

$$G(x_1 + y, \dots, x_n + y) = G(x_1, \dots, x_n) \quad (5.45)$$

Sedaj ni težko izpeljati (za propagator pišemo raje $G(p)$ namesto $G(p, -p)$)

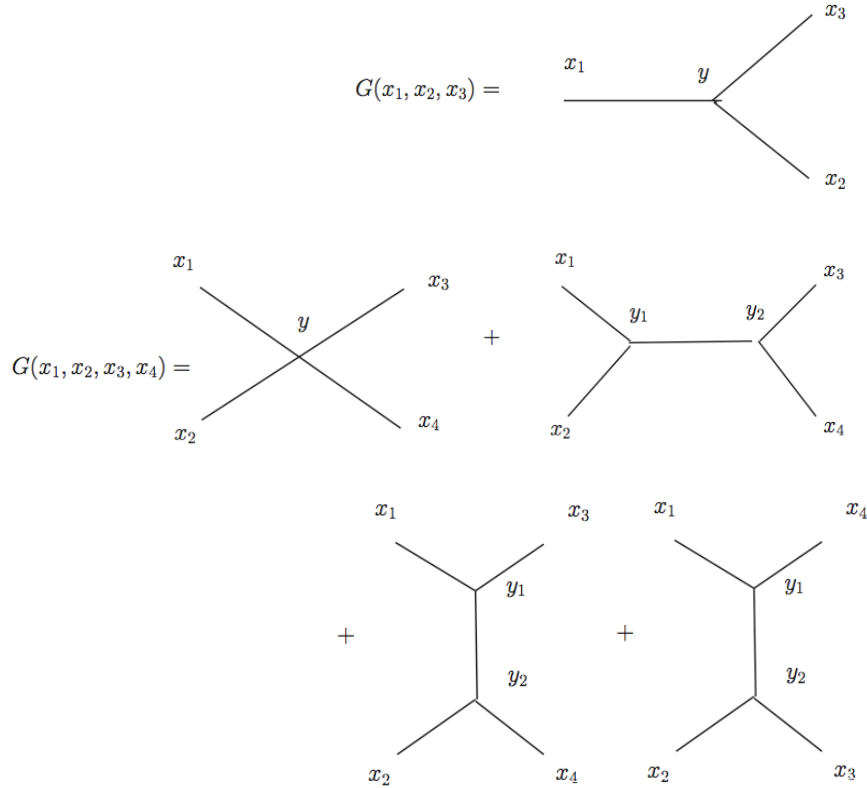


Figure 3: 3 in 4-točkovna Greenova funkcija.

$$G(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \quad (5.46)$$

$$G(p_1, p_2, p_3) = G(p_1)G(p_2)G(p_3)(-iV''') \quad (5.47)$$

$$G(p_1, p_2, p_3, p_4) = G(p_1)G(p_2)G(p_3)G(p_4) [(-iV'''' + (-iV''')^2(G(p_1 + p_2) + G(p_1 + p_3) + G(p_1 + p_4)))] \quad (5.48)$$

... ..

Spomnimo se, da je $V^{(n)} = \partial^n V(\phi_0)/\partial\phi_0^n$.

Dobili smo rezultat v p -prostoru, ki nima nobene dodatne integracije. Rešitev klasičnih enačb gibanj se torej v p -prostoru da zapisat kot vsota vseh Feynmanovih grafov, v katerih priredimo propagator (5.46) vsaki povezavi ter konstanten člen $(-iV^{(n)})$ vsakemu n -točkovnemu vozlišču.

Kot bomo videli, je Greenova funkcija $G(p_1, \dots, p_n)$ direktno povezana s fizikalno spremenljivko. Bolj natančno, sorazmerna je s klasično amplitudo za fizikalni proces, v katerem je n število (v tem primeru enakih) zunanjih delcev. Vse kar moramo narediti je izpustiti v izrazu za Greenovo funkcijo prispevke zunanjih propagatorjev, zunanje delce pa

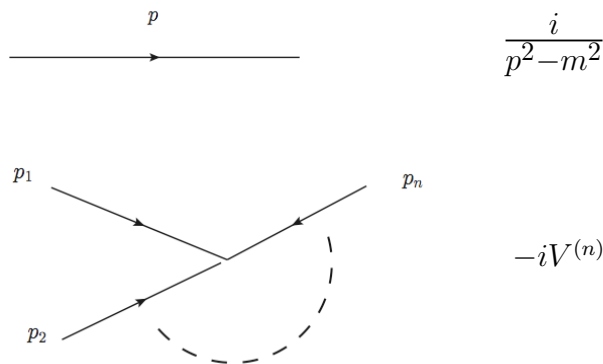


Figure 4: Feynmanova pravila v p-prostoru

postaviti na masno lupino (to pomeni zadostiti relacijam $p_i^2 = m_i^2$). Če vse še pomnožimo z i dobimo

$$\begin{aligned}
 A(p_1, p_2, p_3) &= V''' \\
 A(p_1, p_2, p_3, p_4) &= V'''' - i(V''''')^2 (G(p_1 + p_2) + G(p_1 + p_3) + G(p_1 + p_4)) \\
 &\dots \quad \dots
 \end{aligned}$$

6 Do kvantne teorije polja (1h30min)

Do sedaj smo izpeljali način, kako rešiti enačbe gibanja upoštevajoč relativistično invarianco, pri tem pa preko interakcije dovolili, da se število delcev v procesu spremeni. Že prej pa smo omenili, da je vse to le na klasičnem nivoju. To je nekako po definiciji: rešitev enačbe gibanja je klasična rešitev. Tako je npr. rešitev Maxwellovih enačb veljavna v klasični elektrodinamiki. V tem poglavju bomo račun Greenovih funkciji posplošili za kvantno-mehanske sisteme. Najprej bomo rešitev Schrödingerjeve enačbe formalno spravili v tako obliko, ki jo bo mogoče nato enostavno posplošiti za teorijo polja. Nato bomo pokazali, da se taka posplošena definicija generatorja povezanih grafov obnaša kot pričakujemo v klasični limiti. Na koncu bomo definirali še kanonično kvantizacijo ter jo primerjali z metodo popotnega integrala.

6.1 Popotni integral

Popotni integral, ki ga je Feynman vpeljal v štiridesetih letih prejšnjega stoletja, izhaja iz preprostega argumenta: interferenčni pojav z režami, ki je pri klasični optiki značilen za svetlobo, velja v kvantni mehaniki tudi za delce. To v bistvu pomeni, da je delec pravzaprav opravil vse možne poti. Recimo, da je v času t_a valovna funkcija delca $\psi(x_a, t_a)$, želimo pa izračunati, kakšna je valovna funkcija v končnem času $\psi(x_b, t_b)$. Rabimo torej

propagator $G(x_b, t_b; x_a, t_a)$. Potegniti moramo torej vse poti, ki iz poljubne začetne točke x_a v času t_a preidejo v poljubno končno točko x_b v času t_b . Za določen $x(t)$ s pravim začetnim in končnim pogojem $x(t_{a,b}) = x_{a,b}$ pride do spremembe faze

$$\Delta\phi = \int_a^b (pdx - E dt) = \int_{t_a}^{t_b} dt (p\dot{x} - H(x, p)) = \int_{t_a}^{t_b} dt L(x, \dot{x}) \quad (6.1)$$

kjer je kot ponavadi $p = \partial L(x, \dot{x}) / \partial \dot{x}$. Če je možna ena sama pot $x_1(t)$, potem je

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) \propto e^{i\Delta\phi_1} \quad (6.2)$$

če sta možni dve, $x_1(t)$ in $x_2(t)$, imamo

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) \propto e^{i\Delta\phi_1} + e^{i\Delta\phi_2} \quad (6.3)$$

v splošnem pa imamo lahko poljubno pot, to pomeni, da moramo za vsak $t_i \in [t_a, t_b]$ integrirati $x(t_i)$ od $-\infty$ do $+\infty$. Seveda je takih t_i oz. integracij po $x(t_i)$ neskončno, zato bomo tako operacijo definirali kot limito:

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) = \lim_{n \rightarrow \infty} C_n \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \dots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \quad (6.4)$$

$$\times \exp \left[i \sum_{i=0}^n \Delta t L \left(\frac{x_{i+1} + x_i}{2}, \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} \right) \right]$$

kjer smo celoten interval razdelili enakomerno na $\Delta t = (t_b - t_a)/n$, ter upoštevali pogoje $x_0 = x_a$ in $x_{n+1} = x_b$. Konstanto C_n bomo določili v kratkem.

To definicijo na kratko pišemo kot

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \mathcal{D}x(t) \exp \left[i \int_{t_a}^{t_b} dt L(x, \dot{x}) \right] \quad (6.5)$$

v mislih pa imamo vedno (6.4).

Da se prepričamo v resničnost zgornje definicije ter da izračunamo še neznano konstanto, preverimo, ali Greenova funkcija (6.4) zadošča Schrödingerjevi enačbi, kot pričakujemo zaradi (5.1):

$$C_n = \left(\frac{m}{2\pi i \Delta t} \right)^{\frac{n+1}{2}} \quad (6.6)$$

6.2 Končno kvantna teorija polja

Podobno kot rešitev Schrödingerjeve enačbe lahko preko popotnega integrala definiramo tudi generator povezanih Greenovih funkcij $W[J]$, ki ga imenujemo tudi rodovni funkcional. Pomagamo si s sledečo korespondenco med raznimi količinami v kvantni mehaniki in teoriji polja:

$$t \rightarrow x^\mu = (t, x^i) \quad (6.7)$$

$$x(t) \rightarrow \phi(x^\mu) = \phi(x) \quad (6.8)$$

Rodovni funkcional nastavimo kot

$$\exp(iW[J]) = \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left[i \int d^4x (\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) + J\phi) \right]}{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left[i \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) \right]} \quad (6.9)$$

Preverimo, ali dobimo v prvem približku res že znane relacije. Pri tem bomo istočasno pokazali, da so popravki k temu kvantni. V ta namen bomo zopet uvedli \hbar . Lagrangeva gostota ima iste dimenzije kot Hamiltonova gostota, to je masa na volumen:

$$[\mathcal{L}] = [\mathcal{H}] = ML^{-3} \quad (6.10)$$

Ker je

$$[\hbar] = ML \quad (6.11)$$

se definicija (6.9) torej pravilno zapiše

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}W[J]\right) = \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x (\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) + J\phi) \right]}{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) \right]} \quad (6.12)$$

Namesto celotnega pogledjmo raje poenostavljen analogen primer

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar}w[j]\right) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \left[\frac{i}{\hbar} (s(x) + jx) \right]}{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \exp \left[\frac{i}{\hbar} (s(x)) \right]} \quad (6.13)$$

Ob potrebnih robnih pogojih funkcijo $s(x)$ v števcu razvijemo okoli x_{cl} , ki zadošča

$$s'(x_{cl}) + j = 0 \quad (6.14)$$

v imenovalcu pa okoli x_{cl}^0

$$s'(x_{cl}^0) = 0 \quad (6.15)$$

Uvedemo novo spremenljivko $x = x_{cl} + \hat{x}$ v števcu in podobno v imenovalcu, ter dobimo

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i}{\hbar}w[j]\right) &= \exp\left[\frac{i}{\hbar} (s(x_{cl}) + jx_{cl} - f(x_{cl}^0))\right] \\ &\times \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{x} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{(n)}(x_{cl})}{n!} \hat{x}^n \right]}{\int_{-\infty}^{+\infty} d\hat{x} \exp \left[\frac{i}{\hbar} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{s^{(n)}(x_{cl}^0)}{n!} \hat{x}^n \right]} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Redefiniramo $\hat{x} \rightarrow \hbar^{1/2}\hat{x}$, privzamemo, da ima $s^{(2)}(x_{cl})$ majhno pozitivno imaginarno komponento (to je v teoriji polja preskripcija $m^2 \rightarrow m^2 - i\epsilon$) ter končno dobimo

$$\begin{aligned} \exp\left(\frac{i}{\hbar}w[j]\right) &= \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(s(x_{cl}) + jx_{cl} - s(x_{cl}^0)\right)\right] \\ &\times \left[\frac{s^{(2)}(x_{cl})}{s^{(2)}(x_{cl}^0)}\right]^{-1/2} \left(1 + \mathcal{O}(\hbar^{1/2})\right) \end{aligned} \quad (6.17)$$

Torej je prvi približek (klasičen) kar

$$w[j] = s(x_{cl}) + jx_{cl} - s(x_{cl}^0) + \mathcal{O}(\hbar) \quad (6.18)$$

Tretji člen na desni strani enačbe, $-s(x_{cl}^0)$, nima posebne funkcije, poskrbi le, da je $w[0] = 0$.

Sedaj pa še isto za primer teorije polja (6.12). Ni težko uganit, da je analog (6.18)

$$W[J] = S[\phi_{cl}] + \int d^4x J\phi_{cl} + \mathcal{O}(\hbar) \quad (6.19)$$

Če to enačbo funkcionalno odvajamo po $J(x)$ dobimo definicijo ϕ_{cl} kot rešitev

$$\frac{\delta S[\phi_{cl}]}{\delta \phi_{cl}(x)} + J(x) = 0 \quad (6.20)$$

Ker je akcija

$$S[\phi] \equiv \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi) = \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - V(\phi)\right) \quad (6.21)$$

se (6.20) z uporabo (5.36) in integracije per partes pretvori v

$$-\partial^2\phi_{cl}(x) - V'(\phi_{cl}(x)) + J(x) = 0 \quad (6.22)$$

To pa seveda ni nič drugega kot naša stara znanka, enačba (5.23).

Imamo torej definicijo (6.13) za rodovni funkcional $W[J]$, ki velja kvantno-mehansko, v prvem približku (6.19) pa da že znano rešitev klasične enačbe gibanja (6.22).

n -točkovne povezane Greenove funkcije dobimo v splošnem kot

$$G(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n W[J]}{\delta iJ(x_1) \dots \delta iJ(x_n)} \right|_{J=0} \quad (6.23)$$

Poudariti moramo več stvari v zvezi z zgornjimi enačbami.

- V teoriji polja vsaki vrsti delca pripada posebno polje. Tako pripada npr. delcu elektronu svoje polje, kvarku up svoje polje, itd. Zgornjo definicijo smo zapisali za splošno polje ϕ . Če imamo opravka z več različnimi polji, potem moramo integrirati po vseh. Če študiramo npr. sistem delca ϕ (karkoli to je) in fotona A_μ , potem

moramo integrirati po $\mathcal{D}\phi$ in po $\mathcal{D}A_\mu$. Po pravici povedano, zgornjo definicijo bomo lahko uporabljali brez skrbi le za delce s spinom nič. Za fermione ali umeritvene bozone bomo rabili še dodatna pojasnila.

- Več enakih delcev (npr. 3 elektrone) ne pomeni več integracije, pač pa samo več odvodov. Tako je npr. (6.23) povezana z verjetnostjo (to še ni S -matrika), da pride do prehoda iz n_1 ϕ -delcev v n_2 ϕ -delce, kjer velja $n_1 + n_2 = n$. n funkcionalnih odvodov generatorskega funkcionala pomeni torej skupno število začetnih in končnih delcev. Pravzaprav je vsak delec nastal ali izginil v svojem času t_i in kraju \vec{x}_i .
- Končno se zavemo, čemu je imenovalec v (6.9): prehod iz vakuuma v vakuum brez vmesnih izvorov oz. ponorov delcev je normiran na 1, to je, nič se ne zgodi.
- Formulacija preko popotnega integrala je eksplicitno relativistično invariantna (če smo seveda Lagrangian zapisali kot Lorentzov skalar), tako da lahko na morebitne probleme v zvezi z relativističnimi delci pozabimo.

Čeprav je način računanja popotnega integrala preko direktne integracije kot smo nakazali v tem poglavju uporabna za izračun določenih količin, kot je npr. kvantno-mehanski popravek k enčbam gibanja (tako-imenovani Coleman-Weinbergov potencial), je za amplitude bolj uporabna malo drugačna metoda. V nadaljnjem se bomo posvetili ravno temu.

7 Kanonična kvantizacija

V prejšnjih poglavjih imamo pravzaprav vse kar nam rabi, da izračunamo fizikalne količine v kvantni teoriji polja. Preko popotnega integrala smo klasična polja kvantizirali, ne da bi se tega niti zavedali. Zgodovinsko pa je bolj poznana druga, kanonična, kvantizacija. Ker je s tem povezanih nekaj zanimivih detajlov in računskih prednosti, bomo to malo bolj podrobno pregledali v tem poglavju. Istočasno se bomo spoprijeli direktno s starima problemoma: obstoj rešitev z negativno energijo in interpretacija ničte komponente ohranitvenega toka (poljuben predznak). Čeprav smo formalno skonstruirali pravila za teorijo polja, rešitve na ti vprašanji še nista direktno vidni.

7.1 Hamiltonka

Najprej definiramo Hamiltonovo gostoto (ali krajše Hamiltonko) preko znanega postopka. Imamo Lagrangian kot funkcijo polja in prvih odvodov:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad (7.1)$$

Moment polja je (analogno kot moment koordinate v kvantni mehaniki)

$$\pi(x) \equiv \frac{\partial \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x))}{\partial(\partial_0 \phi(x))} \quad (7.2)$$

Hamiltonka je tedaj

$$\mathcal{H}(\phi(x), \pi(x)) = \pi(x)\partial_0\phi(x) - \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu\phi(x)) \quad (7.3)$$

kjer moramo $\partial_0\phi(x)$ na desni zamenjati s funkcijo $\phi(x)$ in $\pi(x)$. pogledjmo sedaj nekaj tipičnih primerov..

7.1.1 Prosto realno skalarno polje

Lagrangian zanj že poznamo:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (7.4)$$

Ob upoštevanu zgornjih pravil dobimo

$$\pi = \partial_0\phi \quad (7.5)$$

in nato

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\phi)^2 + \frac{m^2}{2}\phi^2 \quad (7.6)$$

Energija (Hamiltonka) je eksplicitno pozitivno definitna, torej ni nobene nevarnosti stanj z negativno energijo. Problem smo torej rešili z zamenjavo delca s (klasičnim) poljem.

7.1.2 Prosto kompleksno skalarno polje

Iz Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \partial\phi^*\partial\phi - m^2\phi^*\phi \quad (7.7)$$

dobimo podobno kot prej

$$\pi = \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi)} = \partial_0\phi^* \quad , \quad \pi^* = \frac{\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\phi^*)} = \partial_0\phi \quad (7.8)$$

in spet pozitivno definiten Hamiltonian

$$\mathcal{H} = |\pi|^2 + |\nabla\phi|^2 + m^2|\phi|^2 \quad (7.9)$$

in torej spet noben problem z negativnimi stanji.

7.1.3 Prosto Diracovo polje

Iz Lagrangiana

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} (i\partial\!\!\!/ - m) \psi \quad (7.10)$$

dobimo najprej kanonični moment polja

$$\Pi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_0\psi)} = \bar{\psi} i\gamma^0 \quad (7.11)$$

in nato Hamiltonko

$$\mathcal{H} = \Pi\partial_0\psi - \mathcal{L} = \psi^\dagger i\partial_0\psi \quad (7.12)$$

kjer smo v zadnjem koraku uporabili Diracovo enačbo. Rezultat ni presenetljiv (v kvantni mehaniki časovni odvod ustreza Hamiltonki), vendar z razliko od prejšnjih primerov, operator ni eksplisitno pozitino definiten. Da rešimo ta problem, moramo klasična polja zamenjati z operatorji - kvantizirati. Da to operacijo ločimo od kvantizacije spremenljivk v kvantni mehaniki (prva kvantizacija), imenujemo kvantizacijo polj drugo kvantizacijo.

7.2 Kvantizacija polj

Zelo na kratko onovimo primer harmonskega oscilatorja s Hamiltonko

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{\omega^2}{2}x^2 \quad (7.13)$$

Koordinato oz. moment kvantiziramo preko komutacijskega pravila (kot ponavadi je $[A, B] \equiv AB - BA$)

$$[x, p] = i \quad (7.14)$$

Definiramo kreacijski (a^\dagger) in anihilacijski (a) operator preko

$$x = \frac{1}{\sqrt{2\omega}}(a + a^\dagger) \quad , \quad p = -i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a - a^\dagger) \quad , \quad [a, a^\dagger] = 1 \quad (7.15)$$

(7.13) se spremeni v

$$H = \frac{\omega}{2} (a^\dagger a + a a^\dagger) \quad (7.16)$$

Vakuom $|0\rangle$ je definiran kot stanje, ki ga anihilira anihilacijski operator:

$$a|0\rangle = 0 \quad (7.17)$$

n -delčno stanje definiramo preko kreacijskega operatorja

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (a^\dagger)^n |0\rangle \quad (7.18)$$

Sedaj pa postopek poskusimo ponoviti za primer teorije polja.

7.2.1 Realno skalarno polje

Podobno kot smo v kvantni mehaniki kvantizirali koordinato oz. moment preko komutacijskega pravila (7.14), kvantiziramo v teoriji polja polje in moment polja preko

$$[\phi(t, \vec{x}), \pi(t, \vec{y})] = i\delta^3(\vec{x} - \vec{y}) \quad (7.19)$$

Kvantno mehansko komutacijsko pravilo smo morali posplošiti, saj imamo sedaj na razpolago en operator za vsako točko prostora. Pravilo velja za polja definirana ob *istem* času t . Za različne čase da komutator vedno nič.

(7.14) postane

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx} \right) \quad (7.20)$$

$$\pi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (-i\omega_k) \left(a_k e^{-ikx} - a_k^\dagger e^{ikx} \right) \quad (7.21)$$

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad , \quad [a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = 0 \quad (7.22)$$

kjer je

$$k^\mu = (\omega_k, \vec{k}) \quad (7.23)$$

in energija enodelčnega stanja (to bomo videli pozneje)

$$\omega_k = \sqrt{\vec{k}^2 + m^2} \quad (7.24)$$

Hamiltonka, to je volumski integral Hamiltonove gostote (7.6), zdaj postane

$$\begin{aligned}
H &= \int d^3x \mathcal{H} \\
&= \int d^3x \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \int \frac{d^3k'}{(2\pi)^3 2\omega_{k'}} \\
&\quad \left[(-i\omega_k)(-i\omega_{k'}) \left(a_k e^{-ikx} - a_k^\dagger e^{ikx} \right) \left(a_{k'} e^{-ik'x} - a_{k'}^\dagger e^{ik'x} \right) \right. \\
&\quad + (i\vec{k})(i\vec{k}') \left(a_k e^{-ikx} - a_k^\dagger e^{ikx} \right) \left(a_{k'} e^{-ik'x} - a_{k'}^\dagger e^{ik'x} \right) \\
&\quad \left. + m^2 \left(a_k e^{-ikx} + a_k^\dagger e^{ikx} \right) \left(a_{k'} e^{-ik'x} + a_{k'}^\dagger e^{ik'x} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2 2\omega_k} \frac{1}{2\omega_k} \\
&\quad \left[-\omega_k^2 \left(a_k a_{-k} e^{-2\omega_k t} - a_k a_k^\dagger - a_k^\dagger a_k + a_k^\dagger a_{-k}^\dagger e^{i2\omega_k t} \right) \right. \\
&\quad - \vec{k}^2 \left(-a_k a_{-k} e^{-2\omega_k t} - a_k a_k^\dagger - a_k^\dagger a_k - a_k^\dagger a_{-k}^\dagger e^{i2\omega_k t} \right) \\
&\quad \left. + m^2 \left(a_k a_{-k} e^{-2\omega_k t} + a_k a_k^\dagger + a_k^\dagger a_k + a_k^\dagger a_{-k}^\dagger e^{i2\omega_k t} \right) \right] \\
&= \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \frac{\omega_k}{2} \left(a_k^\dagger a_k + a_k a_k^\dagger \right) \tag{7.25}
\end{aligned}$$

where we used essentially (7.24) and

$$\int d^3x e^{i(\vec{k}-\vec{k}')\vec{x}} = (2\pi)^3 \delta^3(k - k') \tag{7.26}$$

Vakuumsko stanje $|0\rangle$ je definirano kot tisto, ki ga vsi anihilacijski operatorji izničijo:

$$a_k |0\rangle = 0 \tag{7.27}$$

Enodelčno stanje z gibalno količino k definiramo preko

$$|k\rangle = a_k^\dagger |0\rangle \tag{7.28}$$

hermitsko konjugirano stanje pa kar

$$\langle k| = \langle 0| a_k \tag{7.29}$$

Enodelčna stanja so tako ortonormirana:

$$\langle k|k'\rangle = \langle 0| a_k a_{k'}^\dagger |0\rangle = \langle 0| \left[a_k, a_{k'}^\dagger \right] |0\rangle = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(k - k') \tag{7.30}$$

kjer smo upoštevali (7.27), (7.22) in normalizacijo vakuuma $\langle 0|0\rangle = 1$.

Analogno definiramo večdelčna stanja (prosti delci!) kot

$$|n_1, k_1; \dots; n_N, k_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!}} \left(a_{k_1}^\dagger \right)^{n_1} \dots \frac{1}{\sqrt{n_N!}} \left(a_{k_N}^\dagger \right)^{n_N} |0\rangle \tag{7.31}$$

Po tej pisavi, bi prejšnje enodelčno stanje $|k\rangle$ pravzaprav morali pisati $|1, k\rangle$.

Energija vakuuma je po pravici povedano neskončna, in to zaradi drugega člena v (7.35). Če namreč uporabimo definicijo (7.22) dobimo

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k \left(a_k^\dagger a_k + (2\pi)^3 \omega_k \delta^3(0) \right) \quad (7.32)$$

Vendar lahko v odsotnosti gravitacije ničlo energije spravimo kamorkoli, saj lahko merimo le energijske razlike. Vzemimo zato naravno vrednost energije vakuuma nič. To formalno dosežemo, če definiramo operacijo normalne urejenosti \hat{N}^3 , ki poljuben produkt kreacijskih in anihilacijskih operatorjev uredi tako, da so vsi kreacijski operatorji na levi vseh anihilacijskih operatorjev. Tako je npr.

$$\hat{N} \left(a_{k_1} a_{k_2}^\dagger \right) = a_{k_2}^\dagger a_{k_1} \quad (7.33)$$

Hamiltonko torej definiramo kot

$$H = \int d^3x \hat{N}(\mathcal{H}) \quad (7.34)$$

in je v našem primeru

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k a_k^\dagger a_k \quad (7.35)$$

Tedaj je energija večdelčnega stanja (7.31) enaka

$$E = n_1 \omega_1 + \dots + n_N \omega_N \quad (7.36)$$

Podobno kot (7.35) lahko definiramo tudi operator gibalne količine:

$$\vec{P} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \vec{k} a_k^\dagger a_k \quad (7.37)$$

tako da je za večdelčno stanje (7.31) enak

$$\vec{P} = n_1 \vec{k}_1 + \dots + n_N \vec{k}_N \quad (7.38)$$

7.2.2 Kompleksno skalarno polje

Posplošitev je enostavna, vzeti pa moramo dve vrsti operatorjev, a_k, a_k^\dagger in b_k, b_k^\dagger :

$$\phi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \left(a_k e^{-ikx} + b_k^\dagger e^{ikx} \right) \quad (7.39)$$

Operator a_k^\dagger (a_k) kreira (anihilira) delec, operator b_k^\dagger (b_k) pa kreira (anihilira) antidelec. V prejšnjem (realnem) primeru je seveda veljalo $b_k = a_k$, delec in bil svoj lastni antidelec.

³v literaturi se normalno urejen operator \hat{O} , to je $\hat{N}(\hat{O})$, večkrat označi tudi z $z : \hat{O} :$.

Ustrezna komutacijska pravila so zdaj

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = [b_k, b_{k'}^\dagger] = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (7.40)$$

$$[a_k, a_{k'}] = [a_k^\dagger, a_{k'}^\dagger] = [b_k, b_{k'}] = [b_k^\dagger, b_{k'}^\dagger] = 0 \quad (7.41)$$

$$[a_k, b_{k'}] = [a_k^\dagger, b_{k'}^\dagger] = [a_k, b_{k'}^\dagger] = [b_k, a_{k'}^\dagger] = 0 \quad (7.42)$$

Povsem analogno s prejšnjim primerom lahko sedaj izpeljemo

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k (a_k^\dagger a_k + b_k^\dagger b_k) \quad (7.43)$$

to je vsota energije delcev in energije antidelcev.

Vakuumsko stanje $|0\rangle$ je definirano kot tisto stanje, ki ga izničijo vsi anihilacijski operatorji, tisti za delce (a_k) kot tisti za antidelce (b_k):

$$a_k|0\rangle = b_k|0\rangle = 0 \quad (7.44)$$

Zanimivo je videti, kaj je z interpretacijo ohranitvenega toka

$$j^\mu = i(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi) \quad (7.45)$$

Kar bomo zapisali z operatorji bo pravzaprav naboj

$$Q = \int d^3x j^0 = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} (a_k^\dagger a_k - b_k^\dagger b_k) \quad (7.46)$$

Tukaj eksplicitno vidimo, da prispevajo k naboju antidelci nasprotno kot delci, odtod nasproten predznak. K Hamiltonki pa prispevajo enako. Tok j^μ je tok naboja kompleksnega skalarnega polja.

7.2.3 Diracovo polje

Obravnavajmo zdaj še fermione, to je delce s polovičnim spinom. Omejimo se na delce s spinom $1/2$. Situacija je analogna kompleksnemu skalarnemu polju, le da morajo prosta polja zadoščati zdaj Diracovi enačbi namesto Klein-Gordonovi enačbi. Zato je naraven sledeči razvoj:

$$\psi(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_{s=1}^2 \left(a_k^s u^s(k) e^{-ikx} + b_k^{s\dagger} v^s(k) e^{ikx} \right) \quad (7.47)$$

Če bi tukaj analogno kot v primeru kompleksnega skalarnega polja privzeli komutacijske relacije med operatorji a_k, b_k , itd, bi prišli do težave: Hamiltonka bi bila navzdol neomejena. Zato moramo privzeti antikomutacijske relacije med njimi (v splošnem to pomeni $\{A, B\} \equiv AB + BA$):

$$\{a_k^s, a_{k'}^{s'\dagger}\} = \{b_k^s, b_{k'}^{s'\dagger}\} = (2\pi)^3 2\omega_k \delta^{ss'} \delta^3(\vec{k} - \vec{k}') \quad (7.48)$$

$$\{a_k^s, a_{k'}^{s'}\} = \{a_k^{s\dagger}, a_{k'}^{s'\dagger}\} = \{b_k^s, b_{k'}^{s'}\} = \{b_k^{s\dagger}, b_{k'}^{s'\dagger}\} = 0 \quad (7.49)$$

$$\{a_k^s, b_{k'}^{s'}\} = \{a_k^{s\dagger}, b_{k'}^{s'\dagger}\} = \{a_k^s, b_{k'}^{s'\dagger}\} = \{b_k^s, a_{k'}^{s'\dagger}\} = 0 \quad (7.50)$$

Drugače povedano, če zamenjamo vrstni red poljubnih dveh operatorjev, dobimo vedno minus predznak, v primeru (7.48) pa še dodatek.

Energija poljubnega sistema je sedaj navzdol omejena. Hamiltonka je namreč

$$H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \omega_k \sum_s \left(a_k^{s\dagger} a_k^s + b_k^{s\dagger} b_k^s \right) \quad (7.51)$$

in torej eksplicitno pozitivno definitna.

Vakuum definiramo preko

$$a_k^s |0\rangle = b_k^s |0\rangle = 0 \quad (7.52)$$

7.2.4 Maxwellovo polje

Še zelo na kratko dajmo kar rezultat za brezmasen primer. Razvoj poteka kot

$$A_\mu(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} \sum_\lambda \left(a_\lambda(k) \epsilon_\lambda^\mu(k) e^{-ikx} + a_\lambda^\dagger(k) \epsilon_\lambda^{\mu*}(k) e^{ikx} \right) \quad (7.53)$$

kjer seštevamo po vseh polarizacijah λ in kjer zadošča polarizacijski vektor pogojem

$$k_\mu \epsilon_\lambda^\mu(k) = 0 \quad , \quad \sum_\lambda \epsilon_\lambda^\mu(k) \epsilon_\lambda^{\nu*}(k) = -g^{\mu\nu} \quad (7.54)$$

7.3 Vaja 4

- Izpelji (7.19) in (7.36).
- Izračunaj vakuumsko pričakovano vrednost časovno urejenega produkta dveh prostih skalarnih polj

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{T} \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle &\equiv \langle 0 | \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle \Theta(x^0 - y^0) \\ &+ \langle 0 | \phi(y) \phi(x) | 0 \rangle \Theta(y^0 - x^0) \end{aligned} \quad (7.55)$$

in pokaži, da zadošča enačbi ($c = ?$)

$$(\partial_x^2 + m^2) \langle 0 | \hat{T} \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = c \delta^4(x - y) \quad (7.56)$$

7.4 Vaja 5

- Namesto antikomutacijskih relacij uporabi za Diracovo polje (napačne!) komutacijske relacije ter pokaži, da Hamiltonova gostota ni navzdol omejena.
- V primeru realnega skalarne polja pokaži, da velja kavzalnost: preveri, da je $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ če $(x - y)^2 < 0$.

7.5 Polja v različnih slikah, operator časovne evolucije

Do sedaj smo obravnavali operatorje prostih polj. Razvoj polja po kreacijskih in anihilacijskih operatorjih poteka preko (7.20). To polje je v interakcijski sliki, to je, časovno se razvija preko Hamiltonke za prosto polje. To vidimo bolj natančno, če definiramo časovno neodvisno polje, to je polje v Schrödingerjevi sliki preko (t_0 je poljuben)

$$\phi_S(x) \equiv \phi(t_0, \vec{x}) = e^{-iH_0(t-t_0)}\phi(x)e^{iH_0(t-t_0)} \quad (7.57)$$

kjer je npr. za skalarno realno polje

$$H_0 = \int d^3x \frac{1}{2} (\Pi^2(x) + (\nabla\phi)^2(x) + m^2\phi^2(x)) \quad (7.58)$$

Da je desna stran (7.57) res od časa neodvisna vidimo iz preprostega dejstva, da je, upoštevajoč (7.35)

$$e^{-iH_0(t-t_0)}a_k e^{iH_0(t-t_0)} = e^{i\omega_k(t-t_0)}a_k \quad , \quad e^{-iH_0(t-t_0)}a_k^\dagger e^{iH_0(t-t_0)} = e^{-i\omega_k(t-t_0)}a_k^\dagger \quad (7.59)$$

Odtod sledi tudi, da je

$$H_0(\phi) = H_0(\phi_S) \quad (7.60)$$

in torej

$$\phi(x) = e^{iH_0(\phi_S)(t-t_0)}\phi_S(x)e^{-iH_0(\phi_S)(t-t_0)} \quad (7.61)$$

Podobno definiramo polje v Heisenbergovi sliki kot tisto, ki se časovno spreminja preko cele vendar časovno neodvisne Hamiltonke. Tako je

$$\phi_H(x) = e^{iH(\phi_S)(t-t_0)}\phi_S(x)e^{-iH(\phi_S)(t-t_0)} \quad (7.62)$$

Če vse to združimo, dobimo

$$\phi_H(x) = U^\dagger(t, t_0)\phi(x)U(t, t_0) \quad (7.63)$$

kjer smo definirali operator časovne evolucije v interakcijski sliki kot

$$U(t, t_0) = e^{iH_0(\phi_S)(t-t_0)}e^{-iH(\phi_S)(t-t_0)} \quad (7.64)$$

Ta operator želimo zdaj izraziti z $\phi(x)$. V ta namen odvajajmo po času:

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}U(t, t_0) &= e^{iH_0(\phi_S)(t-t_0)} (-H_0(\phi_S) + H(\phi_S)) e^{-iH(\phi_S)(t-t_0)} \\ &= H_{int}(\phi)U(t, t_0) \end{aligned} \quad (7.65)$$

kjer smo upoštevali, da je interakcijski del Hamiltoniana

$$H_{int} \equiv H - H_0 \quad (7.66)$$

tipično polinom polja.

Če bi H_{int} bil funkcija, bi rešitev (7.65) bila preprosto kar $U = \exp(-i \int dt H_{int})$. Vendar imamo opravka z operatorji, ne pa s funkcijami, zato lahko enačbo (7.65) z začetnim pogojem $U(t_0, t_0) = 1$ rešimo kvečjemu perturbativno, za majhne H_{int} :

$$U(t, t_0) = 1 + (-i) \int_{t_0}^t dt_1 H_{int}(t_1) + (-i)^2 \int_{t_0}^t dt_1 H_{int}(t_1) \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_2) + \dots \quad (7.67)$$

Opazimo, da so produkti Hamiltonk vedno časovno urejeni: najprej (na levi) so Hamiltonke poznejšega časa, nato tiste prejšnjega časa, to je $H_{int}(t_1)H_{int}(t_2)$ če $t_1 \geq t_2$. Kot smo že omenili, imamo opravka (v splošnem) z nekomutirajočimi operatorji, zato moramo na take vrstne rede paziti. Da pa dobimo bolj simetrični zapis, uvedemo operator časovno urejenega produkta \hat{T} :

$$\hat{T} \left(\hat{\mathcal{O}}_1(t_1) \hat{\mathcal{O}}_2(t_2) \right) \equiv \hat{\mathcal{O}}_1(t_1) \hat{\mathcal{O}}_2(t_2) \theta(t_1 - t_2) + \hat{\mathcal{O}}_2(t_2) \hat{\mathcal{O}}_1(t_1) \theta(t_2 - t_1) \quad (7.68)$$

Kvadratni del lahko tako za primer $t > t_0$ prepisemo v

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) &= \frac{1}{2!} \left(\int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^{t_1} dt_2 H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) + (t_1 \leftrightarrow t_2) \right) \\ &= \frac{1}{2!} \hat{T} \int_{t_0}^t dt_1 \int_{t_0}^t dt_2 H_{int}(t_1) H_{int}(t_2) \end{aligned} \quad (7.69)$$

Podobno lahko naredimo s poljubno potenco, kar nas pripelje do končnega rezultata

$$U(t, t_0) \equiv \hat{T} \exp \left(-i \int_{t_0}^t dt H_{int}(\phi(x)) \right) , \quad t > t_0 \quad (7.70)$$

Kaj pa če $t < t_0$? Tedaj je, če ponovimo zgornjo vajo,

$$U(t, t_0) = [U(t_0, t)]^\dagger \quad (7.71)$$

Operator (7.64) rahlo posplošimo tako, da definiramo

$$U(t_1, t_2) = e^{iH_0(\phi_S)(t_1-t_0)} e^{-iH(\phi_S)(t_1-t_2)} e^{-iH_0(\phi_S)(t_2-t_0)} \quad (7.72)$$

ki je eksplicitno unitaren in je enak prejšnji definiciji (7.64) ko je t_2 enak referenčnemu času t_0 . Zdaj je enostavno ugotoviti, da tak unitarni operator U zadošča ($t_1 > t_2 > t_3$)

$$U(t_1, t_2)U(t_2, t_3) = U(t_1, t_3) \quad (7.73)$$

$$U(t_1, t_2)U(t_2, t_1) = 1 \quad (7.74)$$

Zato je npr.

$$U(t_1, t_3)U(t_3, t_2) = U(t_1, t_3) [U(t_2, t_3)]^\dagger = U(t_1, t_2)U(t_2, t_3) [U(t_2, t_3)]^{-1} = U(t_1, t_2) \quad (7.75)$$

7.6 Korelacijske (Greenove) funkcije

Korelacijske funkcije so definirane kot

$$\langle 0_H | \hat{T} \phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n) | 0_H \rangle \quad (7.76)$$

Radi bi jih zapisali preko polj $\phi(x)$, ki jih znamo razvijati preko kreacijskih in anihilacijskih operatorjev. Za polja ϕ_H uporabimo (7.63), manjka nam pa še vakuumsko stanje $|0_H\rangle$ zapisati preko vakuuma $|0\rangle$ definiranega preko (7.27). Tako kot je $|0\rangle$ vakuumsko stanje operatorja H_0 , je $|0_H\rangle$ vakuumsko stanje operatorje H . To je, lastno stanje operatorja H z najnižjo lastno vrednost (energijo). V splošnem velja

$$H|n_H\rangle = E_n|n_H\rangle \quad (7.77)$$

Dajmo sedaj izračunat

$$e^{-iHT}|0\rangle = e^{-iE_0T}|0_H\rangle\langle 0_H|0\rangle + \sum_{n>0} e^{-iE_nT}|n_H\rangle\langle n_H|0\rangle \quad (7.78)$$

Mislimo si, da imajo vse energije infinitezimalno majhno negativno imaginarno komponento. Tedaj se vsa višja stanja hitreje iznihaajo od osnovnega, če vzamemo dovolj velik čas T (tako da lahko mirne duše tudi zamenjamo $T \rightarrow T + t_0$):

$$\begin{aligned} |0_H\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-iH(T+t_0)}|0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}\langle 0_H|0\rangle} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{e^{-iH(T+t_0)}e^{iH_0(T+t_0)}|0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}\langle 0_H|0\rangle} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{(e^{iH_0((-T)-t_0)}e^{-iH((-T)-t_0)})^\dagger |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}\langle 0_H|0\rangle} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{[U(-T, t_0)]^\dagger |0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}\langle 0_H|0\rangle} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{U(t_0, -T)|0\rangle}{e^{-iE_0(T+t_0)}\langle 0_H|0\rangle} \end{aligned} \quad (7.79)$$

kjer smo upoštevali, da je

$$H_0|0\rangle = 0 \quad (7.80)$$

Podobno, iz

$$\langle 0|e^{-iHT} = e^{-iE_0T} \langle 0|0_H\rangle \langle 0_H| + \dots \quad (7.81)$$

lahko izpeljemo (domača naloga!)

$$\langle 0_H| = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle 0|U(T, t_0)}{e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|0_H\rangle} \quad (7.82)$$

Tako iz normalizacijskega pogoja dobimo

$$1 = \langle 0_H|0_H\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle 0|U(T, -T)|0\rangle}{e^{-2iE_0T} |\langle 0|0_H\rangle|^2} \quad (7.83)$$

to je

$$\lim_{T \rightarrow \infty} e^{-2iE_0T} |\langle 0|0_H\rangle|^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \langle 0|U(T, -T)|0\rangle \quad (7.84)$$

Korelacijske funkcije lahko torej prepisemo

$$\begin{aligned} \langle 0_H|\hat{T}\phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n)|0_H\rangle &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{-iE_0(T-t_0)} \langle 0|0_H\rangle} \langle 0|U(T, t_0) \\ &\quad \times \hat{T} [U^\dagger(x_1^0, t_0)\phi(x_1)U(x_1^0, t_0) \dots U^\dagger(x_n^0, t_0)\phi(x_n)U(x_n^0, t_0)] \\ &\quad \times \frac{1}{e^{-iE_0(T+t_0)} \langle 0_H|0\rangle} U(t_0, -T)|0\rangle \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\langle 0|\hat{T}\phi(x_1) \dots \phi(x_n)U(T, -T)|0\rangle}{\langle 0|U(T, -T)|0\rangle} \end{aligned} \quad (7.85)$$

ter zaradi $\mathcal{H}_{int} = -\mathcal{L}_{int}$ izrazimo preko prostih polj (v interakcijski sliki):

$$\langle 0_H|\hat{T}\phi_H(x_1) \dots \phi_H(x_n)|0_H\rangle = \frac{\langle 0|\hat{T}\phi(x_1) \dots \phi(x_n) \exp(i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(\phi(x)))|0\rangle}{\langle 0|\hat{T} \exp(i \int d^4x \mathcal{L}_{int}(\phi(x)))|0\rangle} \quad (7.86)$$

To enakost bomo stalno uporabljali ter preko desne strani tako izračunali korelacijske funkcije, ki so, kot bomo še videli, direktno povezane s fizikalno merljivimi količinami kot so npr. sipalni preseki ali razpadni časi.

7.7 Wickov izrek

Sedaj imamo pravzaprav že vse kar rabimo, da izračunamo korelacijske funkcije. Na desni strani enačbe (7.86) razvijemo eksponent. Interakcijski del Lagrangeve gostote je tipično polinom polja. Pri takoimenovani teoriji "ϕ⁴" je npr.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (7.87)$$

in zato

$$\mathcal{L}_{int}(\phi(x)) = -\frac{\lambda}{4!}\phi^4(x) \quad (7.88)$$

Kar rabimo so torej korelacijske funkcije za prosta polja, to je

$$\langle 0|\hat{T}\phi(y_1)\dots\phi(y_m)|0\rangle \quad (7.89)$$

V principu znamo, kako to narediti: ob upoštevanju vrstenga reda zaradi časovno urejenega produkta razvijemo prosta polja v interakcijski sliki po kreacijskih in anihilacijskih operatorjih. Za prosto realno skalarno polje je to razvoj (7.20). Vendar je ta način dokaj dolgovezen, predvsem če imamo opravka s produktom večjega števila polj. Izkaže pa se, da se stvar zelo poenostavi, ko vzamemo vakuumsko pričakovano vrednost takega produkta. Poenostavitev in pravilo imenujemo Wickov izrek, ki ga bomo sedaj nakazali.

Polje $\phi(x)$ razdelimo na del s pozitivno energijo $\phi^+(x)$ in del z negativno energijo $\phi^-(x)$:

$$\phi(x) = \phi^+(x) + \phi^-(x) \quad (7.90)$$

$$\phi^+(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} a_k e^{-ikx} \quad ; \quad \phi^-(x) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 2\omega_k} a_k^\dagger e^{ikx} \quad (7.91)$$

Pozor, $\phi^{(+)}$ vsebuje anihilacijske operatorje a_k in minus v eksponentu $\exp(-ikx)$, $\phi^{(-)}$ pa kreacijske operatorje a_k^\dagger in plus v eksponentu $\exp(ikx)$, ne pa obratno!

Za dve polji imamo

$$\begin{aligned} \hat{T}\phi(x_1)\phi(x_2) &= [\phi^+(x_1)\phi^+(x_2) + \phi^+(x_1)\phi^-(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^+(x_2) + \phi^-(x_1)\phi^-(x_2)] \Theta(x_1^0 - x_2^0) \\ &\quad + [x_1 \leftrightarrow x_2] \Theta(x_2^0 - x_1^0) \\ &= \left(\hat{N}[\phi(x_1)\phi(x_2)] + [\phi^+(x_1), \phi^-(x_2)] \right) \Theta(x_1^0 - x_2^0) \\ &\quad + (x_1 \leftrightarrow x_2) \Theta(x_2^0 - x_1^0) \end{aligned} \quad (7.92)$$

Ta zapis je posebno uporaben, ker je vakuumska pričakovana vrednost normalno urejenega produkta vedno nič

$$\langle 0|\hat{N}[\hat{\mathcal{O}}]|0\rangle = 0 \quad (7.93)$$

in ker se da ostanek z lahkoto izračunati:

$$\begin{aligned} [\phi^+(x_1), \phi^-(x_2)] &= \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2\omega_{k_1}} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2\omega_{k_2}} [a_{k_1}, a_{k_2}^\dagger] e^{-ik_1 x_1 + ik_2 x_2} \\ &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega_k} e^{-ik(x_1 - x_2)} \end{aligned} \quad (7.94)$$

To je število, ne več operator. Ker je integral invarianten na zamenjavo $\vec{k} \rightarrow -\vec{k}$, je izraz enak tudi na zamenjavo $x_1 \leftrightarrow x_2$. Torej smo dobili, da

$$[\phi^+(x_1), \phi^-(x_2)] = \langle 0 | \hat{T} \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle \quad (7.95)$$

kar lahko še enkrat preverimo, saj smo desno stran izračunali že pri vajah in ni nič drugega kot propagator za prosti delec.

Za liho število prostih polj bomo vedno dobili korelacijsko funkcijo nič. Postopek lahko ponovimo za štiri polja in dobimo (vaja)

$$\begin{aligned} \langle 0 | \hat{T} \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) | 0 \rangle &= + \langle 0 | \hat{T} \phi(x_1) \phi(x_2) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{T} \phi(x_3) \phi(x_4) | 0 \rangle \\ &+ \langle 0 | \hat{T} \phi(x_1) \phi(x_3) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{T} \phi(x_2) \phi(x_4) | 0 \rangle \\ &+ \langle 0 | \hat{T} \phi(x_1) \phi(x_4) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{T} \phi(x_2) \phi(x_3) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (7.96)$$

Torej je korelacijska funkcija prostih polj le seštevka propagatorjev in sicer vseh možnih permutacij. Stvar se na tak način da enostavno posplošit za poljubno število prostih polj. To je Wickov izrek.

Feynmanova pravila torej zdaj znamo izpeljat. Vzemimo Teorijo ϕ^4 :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_{int} \quad (7.97)$$

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} \partial \phi^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad , \quad \mathcal{L}_{int} = -\frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (7.98)$$

Feynmanovo pravilo za propagator v x -prostoru je

$$\langle 0 | \hat{T} \phi(x) \phi(y) | 0 \rangle = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-ik(x-y)}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (7.99)$$

in torej v p -prostoru

$$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (7.100)$$

medtem ko izpeljemo za vozlišče

$$\begin{aligned}
& \langle 0 | \hat{T} \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \exp \left(i \int d^4 z \mathcal{L}_{int}(\phi(z)) \right) | 0 \rangle \\
\rightarrow & -i \frac{\lambda}{4!} \int d^4 z \langle 0 | \hat{T} \phi(x_1) \phi(x_2) \phi(x_3) \phi(x_4) \phi^4(z) | 0 \rangle \\
= & -i \lambda \int d^4 z \langle 0 | \hat{T} \phi(x_1) \phi(z) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{T} \phi(x_2) \phi(z) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{T} \phi(x_3) \phi(z) | 0 \rangle \langle 0 | \hat{T} \phi(x_4) \phi(z) | 0 \rangle \\
= & \prod_{i=1}^4 \int \frac{d^4 k_i}{(2\pi)^4} \frac{i e^{-i k_i x_i}}{k_i^2 - m^2 + i\epsilon} (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + \dots + k_4) (-i\lambda) \tag{7.101}
\end{aligned}$$

Kot vidimo, je Feynmanovo pravilo za vozlišče v p -prstoru za teorijo ϕ^4 kar

$$-i\lambda \tag{7.102}$$

7.8 Vaja 6

(A)

- V modelu ϕ^4 izpelji 6-točkovno Greenovo funkcijo za povezane grafe do reda $\mathcal{O}(\lambda^2)$. Kako zgleda v p prostoru?
- Nariši povezane Feynmanove grafe za 8-točkovno G.f. do reda $\mathcal{O}(\lambda^3)$. Uporabi Feynmanova pravila in zapiši isto G.f. v p prostoru.
- Izračunaj 2-točkovno G.f. v p prostoru do reda $\mathcal{O}(\lambda)$. Kje se zatakne?

(B)

Obravnavaj model dveh realnih polj ϕ in χ z Lagrangianom

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 - \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^2\chi^2 \tag{7.103}$$

1. Izpelji Feynmanova pravila v p prostoru.
2. Nariši vse povezane Feynmanove grafe za vse možne neničelne 2 točkovne G.f. do reda λ ter 4 in 6 točkovne G.f. do reda λ^2 .
3. Uporabi F. pravila v p prostoru za vse zgornje primere.

8 * Rodovni funkcional (2h15min)

V tem poglavju bomo ponovno izplejali Feynmanove grafe in pravila, a tokrat (namesto preko kanonične kvantizacije) direktno iz popotnega integrala. Za ta primer bomo posplošili to, kar smo že izpeljali za klasičen približek. Najprej bomo obravnavali sistem prostega delca, nato pa vpeljali interakcijo. Videli bomo, kakšne Feynmanove grafe moramo dodati da dobimo kvantne propravke, ter kako moramo Feynmanova pravila posplošiti.

8.1 Poseben primer prostih delcev

Ta primer seveda ni zanimiv za dinamiko, saj je ni. Se bomo pa seznanili z metodo ter postavili temelje v najenostavnejšem primeru, takem, ki ga znamo eksaktno izračunati. Perturbacijsko bomo pozneje razvijali okoli te rešitve.

Obravnavajmo sistem prostih realnih bozonov spina nič. Tak Lagrangian smo že srečali, to je KG Lagrangian

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 \quad (8.1)$$

Karkoli drugega z višjo potenco polja ϕ postane interakcija, del, ki ga znamo v 4 dimenzijah obravnavati samo perturbativno. To izvira iz dejstva, da znamo integrirati kvečjemu le Gaussov integral (5.16), karkoli z višjo potenco v eksponentu ni več v analitični domeni. V Gaussovo obliko moramo sedaj spraviti akcijo z Lagrangianom plus členom z izvorom

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2} \phi^2 + J\phi \right] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \phi (\partial^2 + m^2) \phi + J\phi \right] \quad (8.2)$$

Pri prehodu na desno stran enačbe smo integrirali per partes, ter upoštevali, da so polja v neskončnosti zanemarljivo majhna.

EkspONENT take akcije integriramo po $\mathcal{D}\phi$, zato skušajmo se znebiti linearnega člena v (8.2). V ta namen opravimo translacijo $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \phi_0(x)$ (nad to transformacijo se integralska mera ne spremeni, $\mathcal{D}\phi(x) \rightarrow \mathcal{D}\phi(x)$) in dobimo

$$\int d^4x \left[-\frac{1}{2} (\phi + \phi_0) (\partial^2 + m^2) (\phi + \phi_0) + J(\phi + \phi_0) \right] \quad (8.3)$$

$\phi_0(x)$ je lahko poljuben, zato ga izberemo kot rešitev enačbe

$$(\partial^2 + m^2) \phi_0(x) = J(x) \quad (8.4)$$

Kar nam ostane je torej

$$\int d^4x \left[-\frac{1}{2} \phi (\partial^2 + m^2) \phi + \frac{1}{2} J\phi_0 \right] \quad (8.5)$$

$$x_1 \text{ ————— } x_2$$

Figure 5: Prvi približek 2-točkovne Greenove funkcije.

$\phi_0(x)$ je v bistvu preko (8.4) funkcional izvora $J(x)$. Že v prejšnjih poglavjih smo definirali Feynmanov propagator $\Delta(x)$ kot rešitev

$$(\partial_x^2 + m^2) i\Delta(x - y) = -i\delta^4(x - y) \quad (8.6)$$

tako da je

$$\phi_0(x) = \int d^4y i\Delta(x - y) iJ(y) \quad (8.7)$$

Feynmanov propagator lahko tudi izračunamo, najuporabnejša oblika je preko Fourierove transformacije:

$$i\Delta(z) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ikz}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \quad (8.8)$$

Pri računu celotnega generatorskega funkcionala moramo še integrirati po $\mathcal{D}\phi(x)$: karkoli ta integracija da, je za sedaj nebitvena, saj se krajša med števcem in imenovalcem. Ostane končno (z indeksom 0 označimo rodovni funkcional za prosto polje)

$$iW_0[J] = \frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y iJ(x) i\Delta(x - y) iJ(y) \quad (8.9)$$

Odtod lahko preko definicije (6.23) takoj preverimo, da je edina neničelna povezana Greenova funkcija za prosti realen skalar

$$G_0(x_1, x_2) = i\Delta(x_1 - x_2) \quad (8.10)$$

medtem ko so vse ostale enake nič. Prosto polje lahko samo nemoteno propagira.

8.2 Interakcija

Vse to smo izračunali eksaktno v primeru prostih polj. Vendar je vsa zanimivost pravzaprav v interakciji, tako da jo moramo sedaj vpeljati. To gre recimo preko dodatka k prostemu Lagrangianu (8.1)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \quad (8.11)$$

Še prej besedico o masnih dimenzijah količin. Koordinate imajo masno dimenzijo $[x] = -1$, ker je akcija brezdimenzijska pa ima $[\mathcal{L}] = 4$ in $[\phi] = 1$, tako da je sklopitvena konstanta λ tudi brezdimenzijska (zato smo izbrali ravno tako interakcijo).

Že ta navidez minimalen dodatek napravi problem dosti težji, tako da znamo izračunati Greenove funkcije le perturbativno. Predpostavljamo torej, da je dodaten, interakcijski člen dovolj majhen (recimo $\lambda \ll 1$), da lahko $W[J]$ razvijamo po potencah le-tega.

Poglejmo zdaj, kako se spremeni rodovni funkcional v prvem redu potenc po λ . Rezultat sicer že poznamo, saj je to klasični približek, vendar ga bomo zdaj še enkrat izpeljali, tokrat na malo različen način. Ker imamo opravka s funkcijami in ne operatorji, lahko eksponent, ki vsebuje interakcijo ločimo od ostalega dela:

$$\begin{aligned} \exp(iW[J]) &= \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp\left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 + J\phi\right)\right]}{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp\left[i \int d^4x \left(\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4\right)\right]} \\ &= \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp\left(-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4x \phi^4\right) \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi)\right]}{(\text{kot zgoraj})_{J=0}} \end{aligned} \quad (8.12)$$

Iz poenostavljenega zgleada

$$\int dx f(x) e^{jx} = f\left(\frac{d}{dj}\right) \int dx e^{jx} \quad (8.13)$$

uganemo analogno obliko v primeru funkcionalov:

$$\begin{aligned} \exp(iW[J]) &= \frac{\exp\left(-i\frac{\lambda}{4!} \int d^4z \left(\frac{\delta}{\delta iJ(z)}\right)^4\right) \int \mathcal{D}\phi(x) \exp\left[i \int d^4x (\mathcal{L}_0 + J\phi)\right]}{(\text{kot zgoraj})_{J=0}} \\ &= \frac{e^{\hat{O}} e^{iW_0[J]}}{(\text{kot zgoraj})_{J=0}} \rightarrow \frac{1 + \left(1 + \hat{O}\right) (e^{iW_0[J]} - 1)}{(\text{kot zgoraj})_{J=0}} \end{aligned} \quad (8.14)$$

kjer smo definirali operator

$$\hat{O} = \int d^4z \left(-i\frac{\lambda}{4!}\right) \left(\frac{\delta}{\delta iJ(z)}\right)^4 \quad (8.15)$$

in upoštevali le rezultat do reda λ .

Imenovalec poskrbi za to, da je $W[0] = 0$. V naslednjem se bomo zanimali le za Greenove funkcije, tako da ga bomo opustili.

Omejimo se na 4-točkovno Greenovo funkcijo: jasno moramo $\exp(iW_0[J])$ razviti do osme potence izvora J (štiri potence bodo pospravili štirje odvodi zaradi interakcije ϕ^4 , ostale štiri potence pa štirje odvodi iz definicije 4-točkovne Greenove funkcije iz generatorskega funkcionala (6.23)), to pomeni do reda $(iW_0[J])^4$. Na prvi pogled se zdi, da nam ni treba razvijati člena neodvisnega od \hat{O} , pač pa samo četrti odvod četrte potence $iW_0[J]$. Vendar bi v tem primeru dobili tudi nepovezane grafe, kot npr. na sliki (6). Logaritem poskrbi, da se taki nepovezani grafi krajšajo, zato pa moramo seveda konsistentno upoštevati razvoj logaritma:

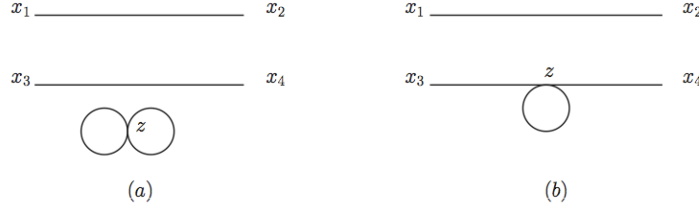


Figure 6: Dva primera nepovezanih grafov.

$$\begin{aligned}
iW[J] &\rightarrow \log \left(1 + (1 + \hat{O}) (e^{iW_0[J]} - 1) \right) \\
&= \left[(1 + \hat{O}) (e^{iW_0[J]} - 1) \right] - \frac{1}{2} \left[(1 + \hat{O}) (e^{iW_0[J]} - 1) \right]^2 \\
&+ \frac{1}{3} \left[(1 + \hat{O}) (e^{iW_0[J]} - 1) \right]^3 + \dots = e^{-iW_0[J]} \hat{O} (e^{iW_0[J]}) \\
&\rightarrow \hat{O} \frac{(iW_0[J])^4}{4!} - (iW_0[J]) \hat{O} \frac{(iW_0[J])^3}{3!} + \frac{(iW_0[J])^2}{2} \hat{O} \frac{(iW_0[J])^2}{2!}
\end{aligned} \tag{8.16}$$

kjer sem zapisal samo člene, ki prispevajo h končnemu rezultatu.

Upoštevamo, da so tretji in višji odvodi funkcionala $iW_0[J]$ enaki nič:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\delta}{\delta iJ(z)} \right)^4 \frac{(iW_0[J])^4}{4!} &= \left(\frac{\delta iW_0[J]}{\delta iJ(z)} \right)^4 + 6(iW_0[J]) \left(\frac{\delta iW_0[J]}{\delta iJ(z)} \right)^2 \left(\frac{\delta^2 iW_0[J]}{\delta (iJ(z))^2} \right) \\
&+ \frac{3}{2} (iW_0[J])^2 \left(\frac{\delta^2 iW_0[J]}{\delta (iJ(z))^2} \right)^2 \\
\left(\frac{\delta}{\delta iJ(z)} \right)^4 \frac{(iW_0[J])^3}{3!} &= 6 \left(\frac{\delta iW_0[J]}{\delta iJ(z)} \right)^2 \left(\frac{\delta^2 iW_0[J]}{\delta (iJ(z))^2} \right) + 3(iW_0[J]) \left(\frac{\delta^2 iW_0[J]}{\delta (iJ(z))^2} \right)^2 \\
\left(\frac{\delta}{\delta iJ(z)} \right)^4 \frac{(iW_0[J])^2}{2!} &= 3 \left(\frac{\delta^2 iW_0[J]}{\delta (iJ(z))^2} \right)^2
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Če vse to seštejemo in upoštevamo

$$\frac{\delta iW_0[J]}{\delta iJ(z)} = \int d^4u iJ(u) i\Delta(u - z) \tag{8.18}$$

vidimo, da nepovezani grafi res odpadejo. Ostane

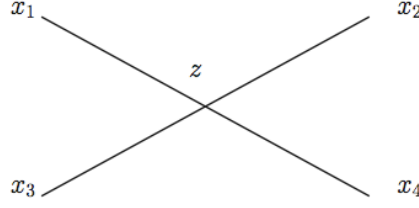


Figure 7: Prvi približek 4-točkovne Greenove funkcije.

$$\begin{aligned}
iW[J] &\rightarrow \int d^4z \left(-i\frac{\lambda}{4!}\right) \left(\frac{\delta iW_0[J]}{\delta iJ(z)}\right)^4 \\
&= \int dx_1 \dots \int dx_4 \frac{\lambda}{4!} J(x_1) \dots J(x_4) \\
&\times (-i) \int dz i\Delta(x_1 - z) \dots i\Delta(x_4 - z)
\end{aligned} \tag{8.19}$$

Končni rezultat za 4-točkovno Greenovo funkcijo je torej (do reda λ)

$$G(x_1, x_2, x_3, x_4) = (-i\lambda) \int d^4z i\Delta(x_1 - z) i\Delta(x_2 - z) i\Delta(x_3 - z) i\Delta(x_4 - z) \tag{8.20}$$

kar že poznamo iz (5.42) ob upoštevanju, da je zdaj $V'''' = \lambda$ in $V'''' = 0$. Zato imamo namesto štirih grafov na sliki 3 samo prvi prispevek, ki ga še enkrat ponazorimo s Feynmanovim diagramom na sliki 7

Kot smo že prej videli, lahko ta postopek sistematiziramo (Feynmanova pravila za teorijo ϕ^4 (8.11) v koordinatnem prostoru):

1. najprej narišemo vse povezane Feynmanove grafe z danimi zunanjimi točkami x_1, \dots, x_n
2. vozlišče ali vertex je v točki z , njemu pripada člen $-i\lambda$ (i ker imamo vedno $\exp(iS)$, $-\lambda$ pa ker tako zgleda interakcijski člen v (8.11), faktorja $4!$ pa smo se znebili, ker je ravno toliko načinov, da štiri zunanje točke x_i povežemo z vertexsom);
3. vsaki povezavi pripada propagator $i\Delta(x_i - z)$;
4. integrirati moramo po celém prostoru z .

Naslednji korak je transformirati po Fourieru vse propagatorje na desni strani enačbe kot v (8.8) ter integrirati po legi interakcije z

$$\begin{aligned}
G_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \\
&\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) e^{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4)} \\
&\times (-i\lambda) \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{p_2^2 - m^2} \frac{i}{p_3^2 - m^2} \frac{i}{p_4^2 - m^2}
\end{aligned} \tag{8.21}$$

V splošnem lahko definiramo n -točkovno Greenovo funkcijo v p prostoru $G(p_1, \dots, p_N)$ kot

$$\begin{aligned}
G_1(x_1, \dots, x_N) &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \dots \int \frac{d^4 p_N}{(2\pi)^4} e^{-i(p_1 x_1 + \dots + p_N x_N)} \\
&\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_N) G(p_1, \dots, p_N)
\end{aligned} \tag{8.22}$$

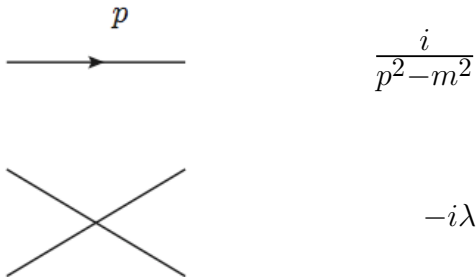
V našem primeru je to kar

$$G(p_1, \dots, p_4) = (-i\lambda) \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{p_2^2 - m^2} \frac{i}{p_3^2 - m^2} \frac{i}{p_4^2 - m^2} \tag{8.23}$$

Feynmanova pravila za teorijo ϕ^4 so v p prostoru torej še bolj enostavna:

1. nariši vse povezane Feynmanove grafe z danimi zunanji delci $1, \dots, n$
2. za vsako vozlišče vzemi $-i\lambda$;
3. za vsak propagator vzemi $i/(p^2 - m^2)$;
4. v vsakem vozlišču se ohrani četverec gibalne količine;
5. če ohranitev gibalne količine v vozliščih ne določi vseh četvercev, je treba po nedoločenih integrirati, za vsakega torej $\int d^4 q / (2\pi)^4$;
6. simetrijski faktor: če se vsi $4!$ ne krajšajo, je treba to upoštevati.

Kar se tiče propagatorja in vozlišča to označimo kot



Ni čudno, da se pravila ujema s tistimi, ki smo jih našli preko kanonične kvantizacije.

8.3 Perturbacija in zanke

V zgornjem primeru smo računali 4 točkovno Greenovo funkcijo do prvega reda po potencah λ . Kar dobimo novega po tem postopku (čeprav tega nismo izpeljali) so višji kvantni popravki. Ti so enaki višjim potencom λ pri dani amplitudi (Greenovi funkcij). Da je to res vidimo iz enačbe (6.12), če upoštevamo naš Lagrangian (8.11) in redefiniramo polje $\phi \rightarrow \hbar^{1/2}\phi$. Pri danem številu zunanjih delcev (fiksni odvod po J) nastopata λ in \hbar le v kombinacij $\hbar\lambda$, kar dokazuje trditev.

Kakšni pa so grafi z višjo potenco λ ? V teoriji ϕ^4 velja za graf z E zunanjimi (external) nogami, I internimi propagatorji in L zaprtimi zankami (loop) relacija

$$4 - E = -2I + 4L \quad (8.24)$$

ki izvira iz čisto dimenzijske analize. Velja namreč, da

$$[W] = M^0 \quad , \quad [J] = M^3 \quad (8.25)$$

vsak funkcionalni odvod pa zaradi (5.36)

$$[\delta/\delta J] = M \quad (8.26)$$

tako da ima E -točkovna Greenova funkcija v x -prostoru (6.23) dimenzijo

$$[G^{(E)}(x)] = M^E \quad (8.27)$$

Torej je Greenova funkcija v p -prostoru (5.44)

$$[G^{(E)}(p)] = M^{4-3E} \quad (8.28)$$

Vsaka zanka da integracijo po notranjih momentih (skupno $4L$), vsak propagator pa prispeva dve inverzni masni dimenziji (skupno $-2(I + E)$).

Podobno lahko iz dejstva, da iz vsakega verteksa izvirajo 4 propagatorji, ter da si interne propagatorje delita dva verteksa, izpeljemo še

$$E + 2I = 4V_4 \quad (8.29)$$

kjer je V_4 število verteksov. Odtod dobimo relacijo

$$L = 1 + V_4 - E/2 \quad (8.30)$$

ki nam pove, da pri fiksnem številu zunanjih nog naraščata število zank in potence sklopitvene konstante λ na enak način.

Torej, da ponovimo. Za izračun fizikalnih količin (sipalni preseki, razpadne širine), kjer nastopa n zunanjih (začetnih in končnih) delcev, rabimo n -točkovno Greenovo funkcijo. To ponazorimo s povezanimi Feynmanovimi grafi, Feynmanova pravila pa posameznemu grafu priredijo analitični izraz kot funkcijo kvantnih števil (gibalnih količin, spinov, itd.) zunanjih delcev.

8.4 Vaja 7

- Enakost med kanoničnim formalizmom in popotnim integralom ponazori enačba

$$\frac{\langle 0|\hat{T}F[\hat{\phi}]e^{i\int\mathcal{L}_{int}(\hat{\phi})}|0\rangle}{\langle 0|\hat{T}e^{i\int\mathcal{L}_{int}(\hat{\phi})}|0\rangle} = \frac{\int\mathcal{D}\phi(x)F[\phi]e^{i\int(\mathcal{L}_0(\phi)+\mathcal{L}_{int}(\phi))}}{\int\mathcal{D}\phi(x)e^{i\int(\mathcal{L}_0(\phi)+\mathcal{L}_{int}(\phi))}} \quad (8.31)$$

kjer so na levi $\hat{\phi}(x)$ operatorji prostih polj, ki jih razvijamo kot ponavadi preko kreacijskih in anihilacijskih operatorjev (kanonična kvantizacija), na desni pa $\phi(x)$ navadne funkcije.

V znanem modelu ϕ^4 pokaži enakost (8.31) do reda λ v primeru 4-točkovne Greenove funkcije. Primerjaj posamezne člene v obeh postopkih.

9 Fizikalne količine (45 min)

Ko imamo n točkovno Greenovo funkcijo, je naslednji korak k računanju fizikalnih količin takoimenovana sipalna ali S matrika. Greenova funkcija je skoraj že ta prava stvar, vendar zagotovo ne čisto. Zunanji delci imajo znano relacijo med energijo in gibalno količino, $p^2 - m^2 = 0$. Če bi to upoštevali, bi zunanji propagatorji v p prostoru divergirali, saj je to ravno njihov pol. Preskripcija pa je enostavna, vzeti je treba to, kar ostane, to je residuum. Število polov nam pove koliko zunanjih delcev je pri procesu, residuum pa je kar amplituda: recimo, da nas zanima proces sipanja delcev, ki jih opisuje zgornji Lagrangian ϕ^4 , recimo delec z gibalno količino p_1 trči v delec z gibalno količino p_2 , ven pa pride n delcev z gibalnimi količinami q_j , $j = 1, \dots, n$. Amplituda za tak proces je kar

$$\begin{aligned} iT(p_1, p_2; q_1, \dots, q_n) &= \lim_{p_i^2, q_j^2 \rightarrow m^2} \prod_{i=1}^2 [-i(p_i^2 - m^2)] \prod_{j=1}^n [-i(q_j^2 - m^2)] \quad (9.1) \\ &\times G(p_1, p_2, q_1, \dots, q_n)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - \dots - q_n) \\ &= G_{amp}(p_1, p_2, q_1, \dots, q_n)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - \dots - q_n) \Big|_{p_i^2, q_j^2 \rightarrow m^2} \\ &= iA(p_1, p_2, q_1, \dots, q_n)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - \dots - q_n) \end{aligned}$$

Torej je dovolj je, da pri računu Greenovih funkcij ne upoštevamo zunanjih propagatorjev, to je tistih, ki so povezani z zunanjimi delci. Tako G.f., G_{amp} , imenujemo amputirano Greenovo funkcijo. Vidimo tudi, da mora veljati ohranitev (četrverca) gibalne količine, zato je pa tudi Greenova funkcija v p prostoru tista količina, ki je bistvena. Razlika med amputirano G.f. G_{amp} in amplitudo⁴ A je v tem, da so četverci gibalnih količin zunanjih nog pri amputiranih G.f. poljubni (le da se skupna gibalna količina ohranja), pri amplitudi pa zadoščajo relaciji $p^2 \equiv p_0^2 - \vec{p}^2 = m^2$. Ko je ta relacija zadoščena pravimo, da je zunanji delec na masni lupini: v veliki oddaljenosti od interakcijske točke se

⁴Nekoliko površno imenujemo z istim imenom amplituda tako količino T kot A iz definicije (9.1).

taki delci obnašajo kot prosti in imajo v približku dobro gibalno količino (so ravni valovi $\exp(-ip_i x_i)$ oz. $\exp(iq_j y_j)$).

Dobro se je zavedati, da so samo zunanji delci na masni lupini ($p^2 = m^2$). Delci v notranjosti Feynmanovega grafa so virtualni, njihova energija k^0 in gibalna količina \vec{k} nista v nobeni zvezi (so neodvisne količine), tako da propagator ne divergira (razen v posebnih slučajih, vendar se to zgodi takrat, ko je treba po tem četvercu virtualnega delca še integrirati).

9.1 * Amplituda preko popotnega integrala

Enačbo (9.1) lahko zapišemo nekoliko bolj formalno. Najprej definiramo takoimenovano S matriko kot

$$\hat{S} = \hat{N} \left[\exp \left(i \int dz \hat{\phi}(z) (\partial_z^2 + m^2) \frac{\delta}{\delta iJ(z)} \right) \right] (iW[J]) \Big|_{J=0} \quad (9.2)$$

kjer kanonično kvantiziran operator prostega realnega skalarnega polja

$$\hat{\phi}(z) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_0} (\hat{a}(p)e^{-ipz} + \hat{a}^\dagger(p)e^{ipz}) \quad (9.3)$$

zadošča Klein-Gordonovi enačbi ($p^2 = m^2$, $p_0 > 0$)

$$(\partial_z^2 + m^2) \hat{\phi}(z) = 0 \quad (9.4)$$

operator \hat{N} pa je normalno urejeni produkt. Ta deluje na operatorje tako, da spravi vse kreacijske operatorje na levi vseh anihilacijskih operatorjev.

Elementi S matrike so vsi produkti v Hilbertovem prostoru med začetnimi stanji (ket-i) in končnimi stanji (bra-ji). Amplitudo (9.1) dobimo kot

$$iT(p_1, p_2; q_1, q_2) = \langle q_1 q_2 | (\hat{S} - \hat{I}) | p_1 p_2 \rangle \quad (9.5)$$

kjer je \hat{I} identiteta (delci, ki gredo ven so isti in z istimi gibalnimi količinami itd. kot delci, ki pridejo noter - nič se ni zgodilo).

9.2 Sipalni presek

Kot vemo že iz kvantne mehanike, je glavni podatek pri sipanju sipalni presek. Ko imamo amplitudo, se sipalni presek dobi podobno kot v KM. To dajmo na kratko ponoviti. Za poenostavit problem, obravnavajmo primer sipanja dveh skalarnih delcev v dva skalarna delca (posplošitev na končno stanje z več delci je direktna, primer fermionov ali umeritvenih bozonov pa bomo komentirali pozneje).

Amplituda za tak prehod je

$$iT(k_1, k_2, p_3, p_4) = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_3 - p_4) iA(k_1, k_2, p_3, p_4) \quad (9.6)$$

Zčetni delci so v resnici valovni paketi, to so porazdelitve za različne gibalne količine z dokaj ostrim vrhom okoli p_1 oz. p_2 (taka je ponavadi eksperimentalna situacija). Začetno stanje je bolj točno opisano z

$$\int d\tilde{k}_1 \int d\tilde{k}_2 f_1(k_1) f_2(k_2) |k_1 k_2\rangle \quad (9.7)$$

kjer smo uporabili krajšo oznako za Lorentzovo invariantno integracijsko mero ($\omega^2 - \vec{k}^2 = m^2$)

$$d\tilde{k} \equiv \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \quad (9.8)$$

Kvadrat amplitude je tedaj

$$\begin{aligned} & \int d\tilde{k}_1 \int d\tilde{k}_2 \int d\tilde{q}_1 \int d\tilde{q}_2 f_1(k_1) f_1^*(q_1) f_2(k_2) f_2^*(q_2) \\ & \times (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_3 - p_4) (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_3 - p_4) \\ & \times A(k_1, k_2, p_3, p_4) A^*(q_1, q_2, p_3, p_4) \end{aligned}$$

Drugo δ -funkcijo v (9.9) prepisemo kot (upoštevajoč prvo δ -funkcijo)

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_3 - p_4) &= (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \\ &= \int d^4 x e^{i(q_1 + q_2 - k_1 - k_2)x} \end{aligned} \quad (9.9)$$

upoštevamo, da imajo valovni paketi izrazit vrh pri p_1 oz. p_2 , tako da lahko zapišemo

$$\begin{aligned} & (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_3 - p_4) A(k_1, k_2, p_3, p_4) A^*(q_1, q_2, p_3, p_4) \\ & \approx (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |A(p_1, p_2, p_3, p_4)|^2 \end{aligned} \quad (9.10)$$

ter definiramo Fourierovo transformacijo porazdelitev $f_j(k_j)$

$$\tilde{f}_j(x) = \int d\tilde{k}_j f_j(k_j) e^{-ik_j x} \quad (9.11)$$

tako da je kvadrat amplitude zdaj (v preostali δ -funkcij smo že prej k_i zamenjali s p_i)

$$\int d^4 x \left| \tilde{f}_1(x) \right|^2 \left| \tilde{f}_2(x) \right|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) |A(p_1, p_2, p_3, p_4)|^2 \quad (9.12)$$

V končnem stanju ne iščemo stanj z neskončno točnimi gibalnimi količinami $\vec{p}_{3,4}$, pač pa vsa stanja z gibalnimi količinami v območju med $\vec{p}_{3,4}$ in $\vec{p}_{3,4} + d\vec{p}_{3,4}$, torej moramo zgornji izraz še pomnožiti z Lorentz invariantnim številom takih stanj

$$d\tilde{p}_3 d\tilde{p}_4 \quad (9.13)$$

Skupno je torej verjetnost prehoda na enoto volumna in časa

$$\frac{dW}{VT} = \left| \tilde{f}_1(x) \right|^2 \left| \tilde{f}_2(x) \right|^2 |A(p_1, p_2, p_3, p_4)|^2 d Lips_2(p_1 + p_2; p_3, p_4) \quad (9.14)$$

kjer je Lorentz invarianten fazni prostor (phase space) za n delce s skupno gibalno količino P v splošnem definiran kot

$$d Lips_n(P; p_1, \dots, p_n) = (2\pi)^4 \delta^4(P - \sum_{i=1}^n p_i) \prod_{j=1}^n \frac{d^3 p_j}{(2\pi)^3 2\omega_j} \quad (9.15)$$

Sipalni presek $d\sigma$ je definiran preko

$$\frac{dW}{VT} = d\sigma j \rho \quad (9.16)$$

kjer je gostota tarče (damo se v laboratorijski sistem, v katerem mirujejo delci 1-tarča)

$$\rho = \left| \tilde{f}_1(x) \right|^2 2m \quad (9.17)$$

(upoštevali smo standardno normalizacijo stanj na $2p_0$), fluks pa je sestavljen iz delcev 2:

$$j = \left| \tilde{f}_2(x) \right|^2 2|\vec{p}_2| \quad (9.18)$$

V splošnem sistemu lahko navidezno neinvarianten produkt $m|\vec{p}_2|$ zapišemo na Lorentzov invarianten način kot

$$m|\vec{p}_2| = [(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2]^{1/2} \quad (9.19)$$

Končno je diferencialni sipalni presek enak

$$d\sigma(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4) = \frac{|A(p_1, p_2, p_3, p_4)|^2}{4 [(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2]^{1/2}} d Lips_2(p_1 + p_2; p_3, p_4) \quad (9.20)$$

Ta količina je Lorentzov skalar, neodvisen od izbire sistema, v katerem merimo.

Posplošitev za sipanje dveh delcev v $n + 2$ delce je sedaj logična in neproblematična:

$$d\sigma(p_1 p_2 \rightarrow p_3 \dots p_{n+2}) = \frac{|A(p_1, p_2, p_3, \dots, p_{n+2})|^2}{4 [(p_1 p_2)^2 - p_1^2 p_2^2]^{1/2}} d Lips_n(p_1 + p_2; p_3, \dots, p_{n+2}) \quad (9.21)$$

9.3 Razpadna širina

Ponavadi se ne zanimamo za možnost, da se tri ali več začetnih delcev siplje, saj je verjetnost, da bi se trije delci srečali zanemarljivo majhna. Imamo pa lahko drugačno možnost, to je da en sam začetni delec razpade v več končnih. V tem primeru ne govorimo o sipalnem preseku, pač pa o razpadni širini. Ta se, kot dobro vemo, spremeni v različnih sistemih (delci, ki letijo, živijo za mirujočega opazovalca dlje, kot enaki delci, ki mirujejo). Kar se ponavadi omenja je lastna razpadna širina, to je za mirujoči delec. Zgornjo enačbo za presek lahko za ta primer le rahlo spremenimo (izpustimo fluks) in dobimo

$$d\Gamma(P \rightarrow p_1 \dots p_n) = \frac{|A(P, p_1, \dots, p_n)|^2}{2m} dLips_n(P; p_1, \dots, p_n) \quad (9.22)$$

kjer je v sistemu razpadajočega delca seveda $P = (m, \vec{0})$.

10 Kvantna elektrodinamika (QED) (2h 15 min)

10.1 Lagrangian

To je teorija polja, ki opisuje elektron in foton, to je elektromagnetno interakcijo nabitega fermiona. Lagrangian, ki to opisuje, smo že zapisali,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieA_\mu) \psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \quad (10.1)$$

kjer je

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (10.2)$$

in ga dobimo preko zahteve o invarianci na lokalne (krajevne in časovno odvisne) transformacije faze U(1):

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi, \quad A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (10.3)$$

10.2 Feynmanova pravila

Feynmanova pravila lahko izpeljemo podobno kot za primere s skalarnimi polji.

10.2.1 Propagatorji

Najprej se omejimo na propagatorje. Te dobimo v p prostoru nekako kot inverz kvadratnega dela Lagrangiana. V primeru realnega skalarja je i krat akcija v eksponentu popotnega integrala bila

$$\begin{aligned}
iS[\phi] &= i \int d^4z \mathcal{L}(\phi(z), \partial\phi(z)) = i \int d^4z \frac{1}{2} [(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2] + \dots \\
&= -\frac{1}{2} \int d^4z \phi(z) i(\partial^2 + m^2)\phi(z) \\
&= -\frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \phi(-p) [(-i)(p^2 - m^2)] \phi(p)
\end{aligned} \tag{10.4}$$

kjer smo v drugo vrstico prišli z integracijo per partes, v tretjo pa preko Fourierove transformacije

$$\phi(z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \phi(p) e^{-ipz} \tag{10.5}$$

Propagator realnega skalarnega polja v p prostoru je definiran kot inverz oglatega oklepaja v (10.4), torej

$$G_S(p) = \frac{i}{p^2 - m^2} \tag{10.6}$$

Če bi imeli opravka s kompleksnim skalarim poljem, bi ne bilo polovičke že na začetku, in tudi ne na koncu, rezultat bi bil pa enak kot (10.6).

Čisto podobno sklepamo pri fermionih ter dobimo

$$G_F(p) = \frac{i}{\not{p} - m} \tag{10.7}$$

kjer smo označili

$$\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu \tag{10.8}$$

Do težave pride pa pri istem postopku za vektorske delce. V tem primeru dobimo po integracijah per partes ter prehodu v p prostor

$$i \int dz \left(-\frac{1}{4} \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} A^\mu(-p) [i(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)] A^\nu(p) \tag{10.9}$$

Inverz oglatega oklepaja pa ne obstaja, saj ima matrika $p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu$ lastni vektor p^ν z lastno vrednostjo nič!

Čeprav nas to preseneča, kakšno težavo bi si pa le morali pričakovati, saj nismo še izbrali umeritve. Zato takoj popravimo napako in ne da bi zlomili Lorentzove simetrije dodajmo člen (4.9):

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} (\partial A)^2 \tag{10.10}$$

To lahko še boljše razumemo s popotnim integralom. Če ne dodamo člena, ki zlomi umeritveno invarianco, imamo namreč integral

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS_{inv}[A]} \quad (10.11)$$

kjer je S_{inv} invarianten del akcije. To bi bilo nekako tako, kot da bi integrirali periodično funkcijo kota α , npr. $f(\cos(\alpha))$, od $-\infty$ do $+\infty$ namesto od 0 do 2π . Drugače povedano, integrand v (10.11) ima preveč simetrije. Integrirati moramo samo po "eni periodi", zato izberemo umeritev, to je zgornji integral zamenjamo z npr.

$$\int \mathcal{D}A_\mu \delta(\partial A) e^{iS_{inv}[A]} \quad (10.12)$$

Ponovimo zgornji račun

$$\begin{aligned} & i \int dz \left[\left(-\frac{1}{4} \right) F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\partial A)^2 \right] \\ = & -\frac{1}{2} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} A^\mu(-p) \left[i (p^2 g_{\mu\nu} - (1 - 1/\xi) p_\mu p_\nu) \right] A^\nu(p) \end{aligned} \quad (10.13)$$

Inverz nastavimo na obliko

$$G_V^{\nu\sigma}(p) = A(p^2) g^{\nu\sigma} + B(p^2) p^\nu p^\sigma \quad (10.14)$$

ter seveda zahtevamo, da

$$\left[i (p^2 g_{\mu\nu} - (1 - 1/\xi) p_\mu p_\nu) \right] G_V^{\nu\sigma}(p) = g_\mu^\sigma \quad (10.15)$$

Končna rešitev nam da

$$G_V^{\nu\sigma}(p) = \frac{i}{p^2} \left(-g^{\nu\sigma} + (1 - \xi) \frac{p^\nu p^\sigma}{p^2} \right) \quad (10.16)$$

Posebno uporabna in enostavna izbira umeritve je 't Hooft-Feynmanova umeritev $\xi = 1$, ki nam da zelo poenostavljen propagator za foton

$$G_V^{\nu\sigma}(p) = \frac{-i g^{\nu\sigma}}{p^2} \quad (10.17)$$

Ta se zelo dosti uporablja, čeprav je splošnejša izbira (10.16) včasih koristna, saj se mora parameter ξ na koncu računa krajšati (fizikalna količina ne more biti odvisna od izbire umeritve), in torej predstavlja splošen račun netrivialen test.

10.2.2 Vozlišča

Naslednja stvar, ki jo moramo sedaj določiti so Feynmanova pravila za vozlišče. Opravka imamo samo z enim takim verteksom, saj imamo en sam interakcijski člen v Lagrangianu

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}A\psi \quad (10.18)$$

Feynmanovo pravilo za ta verteks znamo, kako izračunati. Zanima nas diagram, v katerem komponenta ξ Diracovega fermiona z gibalno količino p_1 izseva komponento η Diracovega fermiona z gibalno količino p_2 ter komponento μ fotona z gibalno količino q . Izračunamo torej Greenovo funkcijo v p prostoru

$$\int dx dy dz G [\psi_\xi(x)\bar{\psi}_\eta(y)A_\mu(z)] e^{-ip_1x+ip_2y+iqz} \quad (10.19)$$

nato pa izpustimo vse tri zunanje propagatorje ter delta funkcijo. Rezultat:

$$ie(\gamma_\mu)_{\xi\eta} \quad (10.20)$$

10.2.3 Fermionske zanke

Pri upoštevanju Wickovega teorema naletimo večkrat na preskakovanje fermionskih polj. Ker le-ta antikomutirajo (z razliko od bozonskih polj, ki komutirajo), dobimo lahko pri taki operaciji ekstra faktor (-1) . Poglejmo bolj natančno, kdaj pride do tega. Dovolj je pogledati le dva možna primera v katera se zreducirajo vsi diagrami. V prvem sta fermionski polji zunanji, v drugem notranji. Zaradi ohranitve fermionske linije (te se vedno nepretrgane, kar lahko vidimo po tem, da nastopa fermionsko polje v Lagrangianu zaradi Lorentzove simetrije vedno v kvadratu) nimamo tretjega primera.

V prvem primeru zгледа del Greenove funkcije ki nas zanima torej

$$\langle 0|\hat{T}\psi_\xi(x)\bar{\psi}_\eta(y)\prod_{i=1}^N i\int dz_i e\bar{\psi}A\psi(z_i)|0\rangle \quad (10.21)$$

kjer so vsi vmesni verteksi le taki, ki so povezani preko fermionske linije. Ni težko si predstavljati, da tukaj ne dobimo nobenega minusa.

Drugi primer pa je tak, ko sta dve vozlišči notranji. Gledamo torej zaprto zanko

$$\langle 0|\hat{T}\prod_{i=1}^N i\int dz_i e\bar{\psi}A\psi(z_i)|0\rangle \quad (10.22)$$

Jasno je tukaj, da dobimo ravno ekstra faktor (-1) .

Da ponovimo: za vsako zaključeno fermionsko zanko dobimo ekstra faktor (-1) . Seveda mora biti zanka v celoti fermionska, od začetka do konca.

10.2.4 Zunanje noge

Kot zadnje moramo še povedati, kaj pripišemo zunanjim delcem. To je nekaj novega, kar še nismo srečali v primeru realnega skalarnega polja. Pa poskusimo uganiti. Seveda tega nimamo na nivoju Greenove funkcije, pač pa v primeru S -matrike, ki smo jo zapisali v (9.2) in moramo sedaj posplošiti za primer vektorskega delca spina 1 A_μ (fotona) in fermionskega delca spina 1/2 (elektrona).

V primeru realnega skalarnega delca smo razvili zunanje prosto asimptotsko polje (ki zadošča KG enačbi) s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji kot ($p_0 = \sqrt{m^2 + \vec{p}^2}$ in m masa skalarnega polja)

$$\hat{\phi}(x) = \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} (a(p)e^{-ipx} + a^\dagger(p)e^{ipx}) \quad (10.23)$$

Podobno naredimo z vektorskim poljem, ki zadošča Maxwellovim enačbam v praznem prostoru ($p_0 = |\vec{p}|$, saj je foton brezmasen)

$$\hat{A}^\mu(x) = \sum_{\lambda=1}^2 \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} (a_\lambda(p)\epsilon_\lambda^\mu(p)e^{-ipx} + a_\lambda^\dagger(p)\epsilon_\lambda^{*\mu}e^{ipx}) \quad (10.24)$$

kjer λ označuje eno izmed dveh možnih transverzalnih polarizacij fotona, $\epsilon_\lambda(p)$ pa je polarizacijski vektor, ki zadošča

$$p_\mu \epsilon_\lambda^\mu(p) = 0 \quad (10.25)$$

Za prosto fermionsko polje, ki zadošča Diracovi enačbi, pa dobimo (zopet velja ista zveza med energijo p_0 in gibalno količino \vec{p} kot v primeru skalarnega polja, m je pa zdaj seveda masa fermiona)

$$\hat{\psi}(x) = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} (b_s(p)u_s(p)e^{-ipx} + d_s^\dagger(p)v_s(p)e^{ipx}) \quad (10.26)$$

kjer s označuje eno izmed dveh možnih spinov fermiona, $b_s(p)$ in $d_s^\dagger(p)$ pa sta anihilacijski operator za fermion (elektron) oz. kreacijski operator za antifermion (pozitron). Podobno je

$$\bar{\psi}(x) = \sum_{s=1}^2 \int \frac{d^3 \vec{p}}{(2\pi)^3 2p_0} (d_s(p)\bar{v}_s(p)e^{-ipx} + b_s^\dagger(p)\bar{u}_s(p)e^{ipx}) \quad (10.27)$$

Da odkrijemo, kakšne faktorje dobimo v primeru zunanjih fermionov ali vektorskih bozonov, se moramo spomniti, kako pridemo v primeru skalarne polj iz definicije S -matrike (9.2) do amplitude (9.1).

Vzemimo primer dveh delcev v dva delca, z gib. kol. p_1 in p_2 na začetku, ter q_1 in q_2 na koncu. Amplituda je po definiciji

$$\begin{aligned}
A(p_1, p_2 \rightarrow q_1, q_2) &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) = \langle q_1, q_2 | (\hat{S} - \hat{I}) | p_1, p_2 \rangle \\
&= \langle 0 | a(q_1) a(q_2) (\hat{S} - \hat{I}) a^\dagger(p_1) a^\dagger(p_2) | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{10.28}$$

del sipalne matrike, ki nas zanima je pa seveda tisti s ta pravim številom kreacijskih in anihilacijskih operatorjev:

$$\hat{S} - \hat{I} \rightarrow \frac{1}{4!} \hat{N} \left[\prod_{i=1}^4 \int dz_i \hat{\phi}(z_i) i (\partial_{z_i}^2 + m^2) \frac{\delta}{\delta i J(z_i)} \right] i W[J] \Big|_{J=0} \tag{10.29}$$

$$= \frac{1}{4} \int dz_1 \int dz_2 \int dz_3 \int dz_4 \tag{10.30}$$

$$\begin{aligned}
&\times \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2k_{01}} a^\dagger(k_1) e^{ik_1 z_1} \int \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2k_{02}} a^\dagger(k_2) e^{ik_2 z_2} \\
&\times \int \frac{d^3 k_3}{(2\pi)^3 2k_{03}} a(k_3) e^{-ik_3 z_3} \int \frac{d^3 k_4}{(2\pi)^3 2k_{04}} a(k_4) e^{-ik_4 z_4} \\
&\times i (\partial_{z_1}^2 + m^2) \dots i (\partial_{z_4}^2 + m^2) G(z_1, z_2, z_3, z_4) \\
&= \frac{1}{4} \int \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2k_{01}} \dots \int \frac{d^3 k_4}{(2\pi)^3 2k_{04}} a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2) a(k_3) a(k_4) \\
&\times (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) G_{amp}(k_1, k_2, k_3, k_4)
\end{aligned} \tag{10.31}$$

kjer *amp* pomeni amputirana (to je Greenova funkcija brez zunanjih nog). Odtod jasno sledi, da

$$A(p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4) = \frac{1}{i} G_{amp}(p_1, p_2, p_3, p_4) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \tag{10.32}$$

kar smo že vedeli.

Zgornja izpeljava nam pomaga pri posplošitvi na zunanje delce s spinom 1/2 ali 1. Seveda se v takih primerih posploši tudi oblika *S* matrike (KG operator moramo npr. zamenjati z Diracovim, itd.), vendar je jasno, da dobimo naslednje ekstra faktorje, če le primerjamo (10.23) s (10.24), (10.26) in (10.27).

Najprej primer zunanjega fotona z gib.kol. *q* in polarizacijo λ . Če nastopa v začetnem stanju, pomnožimo amplitudo z

$$\epsilon_\lambda^\mu(q) \tag{10.33}$$

če pa ga najdemo v končnem stanju, pomnožimo s kompleksno konjugirano vrednostjo

$$\epsilon_\lambda^{\mu*}(q) \tag{10.34}$$

Za fermion z gibalno količino *p* in spinom *s* pa sledeča pravila: prihajajoči delec:

$$u_s(p) \tag{10.35}$$

prihajajoči antidelec:

$$\bar{v}_s(p) \tag{10.36}$$

odhajajoči delec:

$$\bar{u}_s(p) \tag{10.37}$$

odhajajoči antidelec:

$$v_s(p) \tag{10.38}$$

Vsaka fermionska linija v Feynmanove grafu ima puščico, ki kaže v primeru delcev v isto smer kot gibalna količina (v smeri od začetnega stanja proti končnemu stanju), v primeru antidelcev pa v obratno smer. Držimo se pravila, da gremo pri Feynmanovih grafih vedno v nasprotno smer puščice (ki označuje tok fermionskega števila): začnemo najprej z odhajajočim delcem ($\bar{u}_s(p)$) ali prihajajočim antidelcem ($\bar{v}_s(p)$), končamo pa s prihajajočim delcem ($u_s(p)$) ali odhajajočim antidelcem ($v_s(p)$). Tako kot zahteva Lorentzova invarianca, imamo torej vedno na levi spinorje s prečno, na desni pa brez.

10.2.5 Obnova Feynmanovih pravil za QED

Na kratko ponovimo pravila:

- fermionski propagator

$$\left(\frac{i}{\not{p} - m} \right)_{\xi\eta}$$

- fotonski propagator (kovariantna umeritev)

$$\frac{i}{p^2} \left(-g^{\mu\nu} + (1 - \xi) \frac{p^\mu p^\nu}{p^2} \right)$$

- vozlišče

$$ie(\gamma_\mu)_{\xi\eta}$$

- faktor (-1) za vsako zaključeno fermionsko zanko
- prihajajoči (odhajajoči) foton:

$$\epsilon_\lambda^\mu(q) \quad (\epsilon_\lambda^{\mu*}(q))$$

- prihajajoči (odhajajoči) elektron:

$$u_s(p) \quad (\bar{u}_s(p))$$

- prihajajoči (odhajajoči) pozitron:

$$\bar{v}_s(p) \quad (v_s(p))$$

10.3 Vaja 8

- Izračunaj amplitudo pri Comptonskem sipanju $e\gamma \rightarrow e\gamma$.
- Preveri, da je amplituda enaka nič, če zamenjamo $\epsilon_\mu(k) \rightarrow k_\mu$.
- Izračunaj sipalni presek, zopet izpovpreči začetni spin in polarizacijo, ter seštej končne. Zgornjo lastnost amplitude ob $\epsilon_\mu(k) \rightarrow k_\mu$ uporabi za dokaz, da zamenjava

$$\sum_{\lambda} \epsilon_{\lambda}^{\mu} \epsilon_{\lambda}^{\nu*} \rightarrow -g^{\mu\nu}$$

da pravi rezultat.

- Preveri, da v limiti $\omega \rightarrow 0$ (vhodna energija fotona) dobiš Thompsonov presek ($\alpha \equiv e^2/(4\pi)$)

$$\sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}$$

10.4 Ward-Takahashijeve enačbe

Originalen Lagrangian je invarianten na umeritveno transformacijo, nuja po izbiri umeritve pa to pokvari. Seveda pa fizikalni rezultati ne smejo biti odvisne od izbire umeritve (α), ker je to nekaj takega kot izbira baze oz. koordinat. Zaradi te netrivialne zahteve Greenove funkcije zadoščajo posebnim enačbam, ki jih imenujemo identitete Ward-Takahashija. Čeprav so te identitete avtomatične, dovolj je namreč pravilno uporabljati Feynmanova pravila pri izračunu Greenovih funkcij, so kljub vsemu koristne, saj predstavljajo možen test računa.

Pa pogledjmo, kako te enačbe izgledajo. Izpeljemo jih lahko kar iz definicije generatorskega funkcionala. V primeru QED tega sploh nismo zapisali, saj smo Feynmanova pravila izpeljali kar brez tega. Pa dajmo ga zdaj. Vpeljemo generatorski funkcional za tako povezane kot nepovezane grafe

$$\begin{aligned}
Z[J_\mu, \eta, \bar{\eta}] &= \exp(iW[J_\mu, \eta, \bar{\eta}]) \\
&= \frac{1}{N} \int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp \left[i \int dz (\mathcal{L}(A, \psi, \bar{\psi}) + J^\mu A_\mu + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi) \right]
\end{aligned} \tag{10.39}$$

kjer se Lagrangian deli na umeritveno invarianten del ter del, ki eksplicitno lomi invarianco

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{inv} - \frac{1}{2\xi} (\partial A)^2 \tag{10.40}$$

faktor N pa poskrbi, da je funkcional pravilno normiran, $Z[0, 0, 0] = 1$ oz. $W[0, 0, 0] = 0$.

Izvori J_μ so navadna posplošitev izvora v prejšnjih primerih skalarnega realnega polja, le da jih je sedaj 4 namesto en sam. Besedico več zaslužijo fermionski izvori η in $\bar{\eta}$. Vsak izmed njiju ima tudi po 4 (Diracove) komponente, posebej pa je potrebno biti pozorni na njihove antikomutacijske lastnosti. Količine η , $\bar{\eta}$, ψ , $\bar{\psi}$ niso sicer operatorji, saj uporabljamo popolni integral, pač pa Grassmanova števila, ki med seboj antikomutirajo. Tako je npr.

$$\frac{\delta}{\delta \bar{\eta}(x)} \int dz \bar{\eta}(z) \psi(z) = \psi(x) \tag{10.41}$$

kot bi pričakovali tudi v bozonskem primeru, medtem ko dobimo dodaten minus za

$$\frac{\delta}{\delta \eta(x)} \int dz \bar{\psi}(z) \eta(z) = -\bar{\psi}(x) \tag{10.42}$$

ker je operator odvoda (Grassman) moral mimo Grassmana $\bar{\psi}$.

V generatorskem funkcionalu (10.39) transformiramo vsa polja

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha \tag{10.43}$$

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi \tag{10.44}$$

$$\bar{\psi} \rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-i\alpha} \tag{10.45}$$

ter vse razvijemo do reda α . Najprej se integrand v eksponentu spremeni za

$$-\frac{1}{e\xi} (\partial A)^2 \alpha + J^\mu \frac{1}{e} \partial_\mu \alpha - i\alpha \bar{\psi}' \eta + i\alpha \bar{\eta} \psi' \tag{10.46}$$

nato pa po večkratnem integriranju per partes in po razvoju eksponenta dobimo

$$\int \mathcal{D}A \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \left(-\frac{1}{\xi} \partial^2 \partial A - \partial J - ie \bar{\psi}' \eta + ie \bar{\eta} \psi' \right) e^{i \int dz (\mathcal{L}(A, \psi, \bar{\psi}) + JA + \bar{\psi}' \eta + \bar{\eta} \psi')} = 0 \tag{10.47}$$

Z znanim trikom zamenjamo polja v integrandu s funkcionalnimi odvodi po izvorih ter upoštevajoč Grassmanove posebnosti (10.41)- (10.42) sledi

$$-\frac{1}{\xi}\partial_x^2\partial_x^\mu\frac{\delta Z}{\delta iJ^\mu(x)}-\partial^\mu J_\mu(x)Z-ie\eta_\vartheta(x)\frac{\delta Z}{\delta i\eta_\vartheta(x)}+ie\bar{\eta}_\vartheta(x)\frac{\delta Z}{\delta i\bar{\eta}_\vartheta(x)}=0 \quad (10.48)$$

Z indeksom ϑ spominjamo bralca, da moramo po tem Diracovem indeksu seštrevati. Sedaj odvajajmo celoten izraz z

$$\frac{\delta^2}{\delta i\bar{\eta}_\zeta(x_1)\delta i\eta_\rho(x_2)} \quad (10.49)$$

ter postavimo vse izvore na nič: $J_\mu = \eta = \bar{\eta} = 0$. Drugi člen v (10.48) odpade, ostane pa

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\xi}\partial_x^2\partial_x^\mu\left.\frac{\delta^3 Z}{\delta iJ^\mu(x)\delta i\bar{\eta}_\zeta(x_1)\delta i\eta_\rho(x_2)}\right|_0 \\ & -e\delta(x-x_2)\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta i\bar{\eta}_\zeta(x_1)\delta i\eta_\rho(x)}\right|_0 -e\delta(x-x_1)\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta i\eta_\rho(x_2)\delta i\bar{\eta}_\zeta(x)}\right|_0 = 0 \end{aligned} \quad (10.50)$$

kar ni nič drugega kot

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi}\partial_x^2\partial_x^\mu\langle 0|\hat{T}A_\mu(x)\psi_\zeta(x_1)\bar{\psi}_\rho(x_2)|0\rangle \\ & +e\delta(x-x_2)\langle 0|\hat{T}\psi_\zeta(x_1)\bar{\psi}_\rho(x_2)|0\rangle -e\delta(x-x_1)\langle 0|\hat{T}\psi_\zeta(x_1)\bar{\psi}_\rho(x_2)|0\rangle = 0 \end{aligned} \quad (10.51)$$

Pri tem zgornje pričakovane vrednosti časovno urejenega produkta interpretiramo tako kot na levi strani enačbe (8.31) ter upoštevamo posplošeno definicijo časovno urejenega produkta (7.55) za fermione (z minusom)

$$\begin{aligned} \langle 0|\hat{T}\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle & \equiv \langle 0|\psi(x)\bar{\psi}(y)|0\rangle\Theta(x^0-y^0) \\ & -\langle 0|\bar{\psi}(y)\psi(x)|0\rangle\Theta(y^0-x^0) \end{aligned} \quad (10.52)$$

kot bi pričakovali za (antikomutirajoče) Grassmanove spremenljivke. Tritočkovno G.f. kot ponavadi Fourier transformiramo

$$\begin{aligned} & \langle 0|\hat{T}A_\mu(x)\psi_\zeta(x_1)\bar{\psi}_\rho(x_2)|0\rangle \\ & = \int\frac{d^4q}{(2\pi)^4}e^{iqx}\int\frac{d^4p_1}{(2\pi)^4}e^{-ip_1x_1}\int\frac{d^4p_2}{(2\pi)^4}e^{ip_2x_2}(2\pi)^4\delta^4(p_1-p_2-q) \\ & \times G_{\mu\mu'}^{(2)}(q)S_{\zeta\zeta'}(p_1)G_{amp}^{(3)}\left[A^{\mu'}(q)\psi_{\zeta'}(p_1)\bar{\psi}_{\rho'}(p_2)\right]S_{\rho'\rho}(p_2) \end{aligned} \quad (10.53)$$

kjer je $G_{amp}^{(3)}$ tritočkovna amputirana G.f., to je brez propagatorjev zunanjih nog, $G^{(2)}$ in S pa sta propagatorja fotona in elektrona, vse v p prostoru:

$$\langle 0|\hat{T}A_\alpha(x)A_\beta(y)|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} G_{\alpha\beta}^{(2)}(p) \quad (10.54)$$

$$\langle 0|\hat{T}\psi_\zeta(x)\bar{\psi}_\rho(y)|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} S_{\zeta\rho}(p) \quad (10.55)$$

Uporabimo (10.16) in dobimo

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\xi} \partial_x^2 \partial_x^\mu \langle 0|\hat{T}A_\mu(x)\psi_\zeta(x_1)\bar{\psi}_\rho(x_2)|0\rangle \\ &= \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iqx} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1x_1} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2x_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - q) \\ & \times (-1) q_\mu S_{\zeta\zeta'}(p_1) G_{amp}^{(3)} [A^\mu(q)\psi_{\zeta'}(p_1)\bar{\psi}_{\rho'}(p_2)] S_{\rho'\rho}(p_2) \end{aligned} \quad (10.56)$$

Drugi člen v (10.51) je najprej

$$e \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq(x-x_2)} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1x_1} \int \frac{d^4p'_2}{(2\pi)^4} e^{ip'_2x_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p'_2) S_{\zeta\rho}(p_1) \quad (10.57)$$

po redefiniciji $p'_2 = p_2 + q$ pa dobimo

$$e \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iqx} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1x_1} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2x_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - q) S_{\zeta\rho}(p_1) \quad (10.58)$$

Podobno je tretji člen najprej

$$- e \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq(x-x_1)} \int \frac{d^4p'_1}{(2\pi)^4} e^{-ip'_1x_1} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2x_2} (2\pi)^4 \delta^4(p'_1 - p_2) S_{\zeta\rho}(p_2) \quad (10.59)$$

po redefiniciji $p'_1 = p_1 - q$ pa

$$- e \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iqx} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1x_1} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2x_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - q) S_{\zeta\rho}(p_2) \quad (10.60)$$

Ko seštejemo (10.56), (10.58) in (10.60) ter izpustimo vse skupne faktorje sledi

$$- q_\mu S_{\zeta\zeta'}(p_1) G_{amp}^{(3)} [A^\mu(q)\psi_{\zeta'}(p_1)\bar{\psi}_{\rho'}(p_2)] S_{\rho'\rho}(p_2) + e S_{\zeta\rho}(p_1) - e S_{\zeta\rho}(p_2) = 0 \quad (10.61)$$

Pomnožimo še z

$$(S^{-1}(p_1))_{\alpha\zeta} (S^{-1}(p_2))_{\rho\beta} \quad (10.62)$$

(implicitno seštevamo po dvakrat nastopajočih Diracovih indeksih) ter končno dobimo

$$-q_\mu G_{amp}^{(3)} [A^\mu(q)\psi_\alpha(p_1)\bar{\psi}_\beta(p_2)] + e (S^{-1}(p_2))_{\alpha\beta} - e (S^{-1}(p_1))_{\alpha\beta} = 0 \quad (10.63)$$

To je Wardova identiteta, ki velja v vseh redih perturbacijske teorije. Preverimo jo v najnižem redu. Upoštevamo (10.20) in (10.7):

$$-q_\mu i e (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} + e \frac{\not{p}_2 - m}{i} - e \frac{\not{p}_1 - m}{i} = 0 \quad (10.64)$$

kar je čisto res zaradi ohranitve gibalne količine $q = p_1 - p_2$.

Pri izpeljavi smo privzeli, da velja (10.56), kar pa vemo zagotovo res le v najnižjem redu. Izkaže se, da je to res vedno, kar pa ne bomo dokazali.

11 Nekaj novih količin (45 min)

Do sedaj smo spoznali rodovni funkcional, Greenove funkcije, amputirane G.f., oboje tako v x kot v p prostoru, amplitude, S -matriko. Praktično gledano, je bila amputirana G.f. v p prostoru, ki postane kar amplituda, ko postavimo njene zunanje gibalne količine na masno lupino, najbolj uporabna.

Obstajajo pa še osnovnejši gradniki, iz katerih lahko enostavno izračunamo amputirane G.f.

11.1 Rodovni funkcional za povezane grafe

Čeprav smo že v prejšnjem poglavju definirali rodovni funkcional za tako povezane, kot nepovezane Feynmanove grafe $Z[J]$:

$$Z[J] = \exp(iW[J]) \quad (11.1)$$

V računih smo pa vedno uporabljali le rodovni funkcional za povezane grafe $W[J]$ in preko

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \left. \frac{\delta^n iW[J]}{\delta iJ(x_1) \dots \delta iJ(x_n)} \right|_{J=0} \quad (11.2)$$

izračunali povezane Greenove funkcije.

11.2 1-delčno nerazcepna (1-PI) vozlišča

Do sedaj smo grafe delili na povezane in nepovezane. Povezani so bili vsi tisti, ki smo jih lahko razdelili na dva dela le, če smo prerezali vsaj eno linijo grafa (pri nepovezanih lahko najdemo vsaj eno delitev, ki ne seče nobene linije grafa).

Definirajmo še bolj specialne grafe: to so tisti, ki jih lahko razdelimo na dva dela le, če presekamo vsaj dve liniji. Take F. grafe opisujejo 1-delčno nerazcepna (one particle irreducible, 1-PI) vozlišča ali G.f.

n-točkovna 1-PI vozlišča v p prostoru bodo tisti osnovni gradniki, ki smo jih omenili prej. Dobimo jih preko Legendrove transformacije

$$W[J] = \Gamma[\phi] + \int dx J(x)\phi(x) \quad (11.3)$$

Tako kot je $W[J]$ generator G.f. vseh povezanih grafov, je $\Gamma[\phi]$ generator 1-delčno nerazcepnih vozlišč. To bomo sedaj preverili na nekaj primerih.

Količini J in ϕ sta neodvisni, zato pa velja (po definiciji)

$$\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \phi(x) \quad (11.4)$$

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} = -J(x) \quad (11.5)$$

Če vzamemo limito $J(x) \rightarrow 0$, dobimo vakuumsko pričakovano vrednost 1-točkovne Greenove funkcije

$$\phi_{cl}(x) = \left. \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} \right|_{J=0} = \langle 0 | \hat{T} \phi(x) | 0 \rangle \quad (11.6)$$

to je rešitev enačbe gibanja

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_{cl}(x)} = 0 \quad (11.7)$$

V limiti konstantnih polj je to vakuumska pričakovana vrednost $\langle \phi \rangle$.

Nasplošno se bomo držali zapisa, da sta

$$G(x_1, \dots, x_n) \equiv \frac{\delta^n iW[J]}{\delta iJ(x_1) \dots \delta iJ(x_n)} \quad (11.8)$$

$$\Gamma(x_1, \dots, x_n) \equiv \frac{\delta^n \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_n)} \quad (11.9)$$

Druga odvoda sta torej

$$G(x, y) \equiv \frac{\delta^2 iW[J]}{\delta iJ(x)\delta iJ(y)} = -i \frac{\delta\phi(x)}{\delta J(y)} = -i \frac{\delta\phi(y)}{\delta J(x)} \quad (11.10)$$

$$\Gamma(x, y) \equiv \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} = -\frac{\delta J(x)}{\delta\phi(y)} = -\frac{\delta J(y)}{\delta\phi(x)} \quad (11.11)$$

in sta si inverz eden drugemu:

$$\int dy G(x, y)\Gamma(y, z) = \int dy (-i) \frac{\delta\phi(x)}{\delta J(y)} (-1) \frac{\delta J(y)}{\delta\phi(z)} = i\delta(x - z) \quad (11.12)$$

To enačbo zdaj funkcionalno odvajajmo po

$$\frac{\delta}{\delta iJ(v)} = -i \int du \frac{\delta\phi(u)}{\delta J(v)} \frac{\delta}{\delta\phi(u)} = \int du G(v, u) \frac{\delta}{\delta\phi(u)} \quad (11.13)$$

Dobimo

$$\int dy G(x, y, v)\Gamma(y, z) + \int dy \int du G(x, y)G(v, u)\Gamma(u, y, z) = 0 \quad (11.14)$$

Pomnožimo z $G(z, w)$ ter integriramo po $\int dz$:

$$iG(x, w, v) + \int dy \int dz \int du G(x, y)G(w, z)G(v, u)\Gamma(y, z, u) = 0 \quad (11.15)$$

V limiti $J \rightarrow 0$ je $\Gamma(y, z, u)$ jasno nič drugega kot (do nepomembne faze natančno) amputirana 3-točkovna G.f. v x prostoru.

Dobimo lahko tudi (v določenem smislu) inverz zgornje enačbe:

$$\Gamma(y, z, u) = \int dx \int dw \int dv \Gamma(y, x)\Gamma(z, w)\Gamma(u, v)G(x, w, v) \quad (11.16)$$

Pa dajmo še enkrat odvajati po $iJ(t)$. Z enakostjo (11.13) in večkratnem upoštevanju (11.15) dobimo po spremembi označitve točk

$$\begin{aligned} G(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \int dy_1 \int dy_2 \int dy_3 \int dy_4 \\ &\times G(x_1, y_1)G(x_2, y_2)G(x_3, y_3)G(x_4, y_4) \\ &\times G_{amp}(y_1, y_2, y_3, y_4) \end{aligned} \quad (11.17)$$

kjer je 4-točkovna amputirana G.f. povezana z 1-PI preko

$$\begin{aligned}
-iG_{amp}(y_1, y_2, y_3, y_4) &= \Gamma(y_1, y_2, y_3, y_4) & (11.18) \\
&+ i \int dz \int dz' \Gamma(y_1, y_2, z) G(z, z') \Gamma(z', y_3, y_4) \\
&+ i \int dz \int dz' \Gamma(y_1, y_3, z) G(z, z') \Gamma(z', y_2, y_4) \\
&+ i \int dz \int dz' \Gamma(y_1, y_4, z) G(z, z') \Gamma(z', y_2, y_3)
\end{aligned}$$

Jasno je, da lahko 4-točkovno G.f. (11.17) razdelimo na dva dela s prerezom ene same linije: lahko prerežemo enega izmed zunanjih propagatorjev $G(x_i, y_i)$, ali pa, v grafih iz zadnjih treh členov v (11.18), notranji propagator $G(z, z')$.

Podobno lahko nadaljujemo za poljubno G.f. $G^{(n)}$, ki jo lahko vedno sestavimo z osnovnimi gradniki, 1-delčnimi nerazcepnimi vozlišči $\Gamma^{(i)}$, $i = 3, \dots, n$ in propagatorji $G^{(2)}$.

Vse to lahko tudi enostavno prevedemo v p-prostor. Kot ponavadi definiramo te količine kot

$$\begin{aligned}
G(x_1, \dots, x_n) &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1 x_1} \dots \int \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} e^{-ip_n x_n} \\
&\times \tilde{G}^{(2)}(p_1) \dots \tilde{G}^{(2)}(p_n) \\
&\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \tilde{G}_{amp}(p_1, \dots, p_n) & (11.19)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma(x_1, \dots, x_n) &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1 x_1} \dots \int \frac{d^4 p_n}{(2\pi)^4} e^{-ip_n x_n} \\
&\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) \tilde{\Gamma}(p_1, \dots, p_n) & (11.20)
\end{aligned}$$

kar nam da za zgornje 3- in 4-točkovne amputirane G.f.

$$\tilde{G}_{amp}(p_1, p_2, p_3) = i\tilde{\Gamma}(p_1, p_2, p_3) \quad (11.21)$$

$$\begin{aligned}
\tilde{G}_{amp}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= i\tilde{\Gamma}(p_1, p_2, p_3, p_4) & (11.22) \\
&+ i\tilde{\Gamma}(p_1, p_2, -p_1 - p_2) \tilde{G}(p_1 + p_2) i\Gamma(-p_3 - p_4, p_3, p_4) \\
&+ i\Gamma(p_1, p_3, -p_1 - p_3) \tilde{G}(p_1 + p_3) i\tilde{\Gamma}(-p_2 - p_4, p_2, p_4) \\
&+ i\tilde{\Gamma}(p_1, p_4, -p_1 - p_4) \tilde{G}(p_1 + p_4) i\tilde{\Gamma}(-p_2 - p_4, p_2, p_3)
\end{aligned}$$

kjer se avtomatično upošteva, da je vsota vseh četvercev ohranjena.

11.3 Vaja 9

- Izračunaj amplitudo za proces $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ za nepolarizirane fermione v QED na drevesnem redu. Izračunaj diferencialni sipalni presek $d\sigma/d\Omega$ ter totalni sipalni presek σ .

- Pri procesu $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ izračunaj vse možne diferencialne preseke za polarizirane fermione. Pri računu vzemi približek $m_e = m_\mu = 0$.

12 ∞ (6 h)

Že večkrat smo se srečali z neskončnimi integrali. Ti niso nastopali v prvih približkih (drevesni redi Feynmanovih grafov), ampak šele pri popravkih (zanke).

12.1 Regularizacija

Prvi korak k ukrotitvi neskončnosti je njihova regularizacija, to je redefinicija teorije tako, da so izrazi končni, originalno teorijo in njene divergence pa dobimo nazaj šele po neki limiti. Najbolj uporabljena regularizacija je dimenzijska, saj ne pokvari umeritvene invariance. V bistvu gre za to, da neskončen integral v 4 dimenzijah posplošimo v integral v d dimenzijah, kjer pa d ni nujno celo število. Integrali se dajo izračunati za splošen d , rezultati pa imajo ponavadi pole za cele dimenzije. Odtod problemi, ko limitiramo z $d \rightarrow 4$ oz. $\epsilon \equiv 4 - d \rightarrow 0$.

Pa pogledjmo to bolj podrobno v primeru ϕ^4 . Dvo-točkovna 1-PI G.f. je do reda 1 zanke

$$\Gamma^{(2)}(p^2, m^2, \lambda, \epsilon) = p^2 - m^2 + \frac{1}{i} \frac{1}{2} (-i\lambda) \int \frac{d^{4-\epsilon}k}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{i}{k^2 - m^2} \quad (12.1)$$

Za $\epsilon = 0$ je integral seveda neskončen, saj ostane za velike k v bistvu $\int_{-\infty}^{+\infty} k dk$. To pa ni več res za splošen necel ϵ . Pogledamo recimo v Peskina:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i \Gamma(n - d/2)}{(4\pi)^{d/2} \Gamma(n)} \Delta^{-n+d/2} \quad (12.2)$$

To izkoristimo za naš primer, uporabimo relacije

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (12.3)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \Gamma(\epsilon/2) = 2/\epsilon - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (12.4)$$

kjer je $\gamma \approx 0.577$ Euler-Mascheroni-jeva konstanta, ter dobimo do reda $\mathcal{O}(\epsilon^0)$

$$\Gamma^{(2)}(p^2, m^2, \lambda, \epsilon) = p^2 - m^2 + \frac{\lambda m^2}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi + 1 - \ln m^2 \right) \quad (12.5)$$

Izraz postane jasno divergenten v smiselni fizikalni limiti štirih dimenzij. Podobno dobimo za štiritočkovno 1-PI G.f. do reda ene zanke

$$\Gamma^{(4)}(p_i, m^2, \lambda, \epsilon) = -\lambda + I(s, m^2, \lambda, \epsilon) + I(t, m^2, \lambda, \epsilon) + I(u, m^2, \lambda, \epsilon) \quad (12.6)$$

kjer je

$$I(p^2, m^2, \lambda, \epsilon) = \frac{1}{i} \frac{1}{2} (-i\lambda)^2 \int \frac{d^{4-\epsilon}k}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \quad (12.7)$$

in smo uvedli Mandelstamove spremenljivke (upoštevamo $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$)

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \quad (12.8)$$

$$t \equiv (p_1 + p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2 \quad (12.9)$$

$$u \equiv (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2 \quad (12.10)$$

za katere velja

$$s + t + u = 4m^2 \quad (12.11)$$

(v splošnem je desna stran enaka $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$).

Zopet nam priskoči na pomoč Peskin. Najprej uporabimo

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^n} \quad (12.12)$$

da dobimo

$$I(p^2, m^2, \lambda, \epsilon) = \frac{\lambda^2}{2i} \int \frac{d^{4-\epsilon}k}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - m^2 + (p^2 + 2pk)x]^2} \quad (12.13)$$

S spremembo spremenljivke

$$k' = k + xp \quad (12.14)$$

se znebimo člena linearne v k -ju, tako da lahko zopet uporabimo enačbo (12.2). Rezultat je

$$I(p^2, m^2, \lambda, \epsilon) = \frac{\lambda^2}{2(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \int_0^1 dx \ln(m^2 - p^2 x(1-x)) \right] \quad (12.15)$$

12.2 Renormalizacija

Dvo- in štiri-točkovni 1-PI G.f. smo regularizirali, vendar ostajata neskončni v limiti $\epsilon \rightarrow 0$. Še preden to limito opravimo, redefiniramo parametre našega modela: m^2 in λ . To lahko naredimo, saj so konec koncev fizikalno merljive količine amplitude oz. 1-PI G.f., ne pa nujno tudi direktno parametri Lagrangiana. Torej zapišimo

$$m^2 = m_R^2 - \delta m^2 \quad (12.16)$$

$$\lambda = \lambda_R \mu^\epsilon Z_\lambda \quad (12.17)$$

Z indeksom R označimo renormalizirane, to je končne, količine. Seveda stlačimo vse nevarne člene $1/\epsilon$ v δm^2 oz. $\delta Z_\lambda = Z_\lambda - 1$, lahko pa tudi nekaj končnega. Možnih izbir je seveda neskončno, fizikalne količine pa od te izbire seveda ne smejo biti odvisne.

Kot smo rekli, je v definicijah (12.16) in (12.17) še veliko možnosti izbire. m_R in λ_R naj bosta končna. Neskončnosti se znebimo, če izberemo npr. sledeče renormalizacijske pogoje:

$$\Gamma^{(2)}(m_R^2, m^2, \lambda, \epsilon) = 0 \quad (12.18)$$

$$\Gamma^{(4)}(0, m^2, \lambda, \epsilon) = -\lambda_R \mu^\epsilon \quad (12.19)$$

Formalno sta δm^2 in δZ_λ višjega reda v sklopitveni konstanti λ_R kot m_R^2 oz. 1. To pomeni, da sta

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda_R m_R^2}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi + 1 - \ln \frac{m_R^2}{\mu^2} \right) \quad (12.20)$$

$$\delta Z_\lambda = \frac{3\lambda_R}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln \frac{m_R^2}{\mu^2} \right) \quad (12.21)$$

Definirajmo renormalizirane funkcije $\Gamma_R^{(n)}$, ki so funkcije renormaliziranih parametrov, kot (kot bomo videli pozneje, se ta definicija rahlo spremeni v bolj splošnih primerih, v našem primeru ϕ^4 na eni zanki, pa je v redu)

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i, m_R^2, \lambda_R) = \Gamma^{(n)}(p_i, m^2, \lambda, \epsilon) \quad (12.22)$$

Torej so sedaj renormalizirane 1-PI G.f. (medtem smo se končno vrnili v štiridimenzionalni prostor, to je, pognali smo limito $\epsilon \rightarrow 0$)

$$\Gamma_R^{(2)}(p^2, m_R^2, \lambda_R) = p^2 - m_R^2 \quad (12.23)$$

oz.

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(4)}(p_i, m_R^2, \lambda_R) = & -\lambda_R + I_R(s, m_R^2, \lambda_R, m_R^2) \\ & + I_R(t, m_R^2, \lambda_R, m_R^2) + I_R(u, m_R^2, \lambda_R, m_R^2) \end{aligned} \quad (12.24)$$

kjer smo označili

$$I_R(p^2, m_1^2, \lambda, m_2^2) = -\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dx \ln \frac{m_1^2 - p^2 x(1-x)}{m_2^2} \quad (12.25)$$

12.3 Nadaljna komplikacija: renormalizacija polja

Videli smo, da so popravki k dvo- in štiri-točkovni 1-PI Greenovi funkciji oblike

$$\Gamma^{(2)}(p^2, m^2, \lambda, \epsilon) = p^2 - m^2 + I^{(2)}(p^2, m^2, \lambda, \epsilon) \quad (12.26)$$

$$\Gamma^{(4)}(p_i, m^2, \lambda, \epsilon) = -\lambda + I^{(4)}(p_i, m^2, \lambda, \epsilon) \quad (12.27)$$

V primeru ϕ^4 do ene zanke je bilo dovolj renormalizirati maso in sklopitveno konstanto. Pri dveh zankah ali pa pri malo bolj kompliciranih teorijah se pa izkaže, da je tudi $I^{(2)}$ funkcija p^2 in sicer sorazmerna $1/\epsilon$. V tem primeru moramo renormalizirati še polje

$$\phi = Z_\phi^{1/2} \phi_R \quad (12.28)$$

To moramo narediti tudi v primeru, da je $I^{(2)}(p^2)$ končna, a neničelna v limiti $\epsilon \rightarrow 0$. To vidimo na sledeči način. Definiramo m_{POL}^2 kot

$$\Gamma^{(2)}(m_{POL}^2, m^2, \lambda, \epsilon) = 0 \quad (12.29)$$

V naših zgornjih primerih, je bil $m_R^2 = m_{POL}^2$, vendar to ni nujno res v splošnem. Residuum pola propagatorja v splošnem ni 1, pač pa lahko

$$\frac{d\Gamma^{(2)}}{dp^2}(m_{POL}^2, m^2, \lambda, \epsilon) = Z_\phi^{-1} \neq 1 \quad (12.30)$$

Za take primere pa enačba za amplitudo ne velja. Izpeljali smo jo namreč za pravilno normirana ($Z_\phi = 1$) polja, za katere KG operator spravi propagator zunanje noge na δ funkcijo. Imenujemo tako polje ϕ_R , njegov izvor ali ponor pa J_R . Izvor ali ponor J nekanonično normiranega polja ϕ pa definiramo preko

$$J_R \phi_R = J \phi \quad (12.31)$$

odkoder

$$J = Z_\phi^{-1/2} J_R \quad (12.32)$$

Shematsko je amplituda tedaj

$$\begin{aligned} A^{(n)} &\sim [i(\partial^2 + m^2)]^n \left(\frac{\delta}{\delta J_R} \right)^n W[J_R] \Big|_{J_R=0} \\ &\rightarrow Z_\phi^{-n/2} [i(\partial^2 + m^2)]^n G^{(n)} \end{aligned} \quad (12.33)$$

Če upoštevamo, da

$$G^{(n)} \sim [G^{(2)}]^n G_{amp}^{(n)} \quad (12.34)$$

in

$$-i(\partial^2 + m^2) \begin{Bmatrix} G^{(n)} \\ G_R^{(n)} \end{Bmatrix} \sim \begin{Bmatrix} Z_\phi \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (12.35)$$

postane (12.33)

$$A^{(n)} \sim Z_\phi^{n/2} G_{amp}^{(n)} \quad (12.36)$$

Po drugi strani pa je

$$G^{(n)} \sim \langle \phi^n \rangle = Z_\phi^{n/2} G_R^{(n)} \quad (12.37)$$

odkoder sledi, da lahko (12.33) zapišemo

$$A^{(n)} \sim G_{amp,R}^{(n)} \quad (12.38)$$

kar smo pričakovali.

Renormalizirane 1-PI G.f. definiramo po primerjavi (12.33)-(12.38) kot

$$\Gamma_R^{(n)}(p_i, m_R^2, \lambda_R) = Z_\phi^{n/2}(m^2, \lambda, \epsilon) \Gamma^{(n)}(p_i, m^2, \lambda, \epsilon) \quad (12.39)$$

Renormalizacijski pogoji so

$$\Gamma_R^{(2)}(m_R^2, m_R^2, \lambda_R) = 0 \quad (12.40)$$

$$\frac{d\Gamma_R^{(2)}}{dp^2}(m_R^2, m_R^2, \lambda_R) = 1 \quad (12.41)$$

$$\Gamma_R^{(4)}(0, m_R^2, \lambda_R) = -\lambda_R \quad (12.42)$$

s katerimi izračunamo δm^2 , δZ_λ in $\delta Z_\phi = Z_\phi - 1$.

12.4 Protičleni

Zamenjavo golih količin m^2 , λ , ϕ z renormaliziranimi m_R^2 , λ_R , ϕ_R lahko naredimo že od vsega začetka. Goli Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \quad (12.43)$$

zamenjamo z vsoto renormaliziranega Lagrangiana

$$\mathcal{L}_R = \frac{1}{2}(\partial\phi_R)^2 - \frac{1}{2}m_R^2\phi_R^2 - \frac{\lambda_R\mu^\epsilon}{4!}\phi_R^4 \quad (12.44)$$

in protičlenov (CT=counter-terms)

$$\mathcal{L}_{CT} = \frac{1}{2} \delta Z_\phi (\partial \phi_R)^2 - \frac{1}{2} (\delta Z_\phi m_R^2 - Z_\phi \delta m^2) \phi_R^2 - \frac{\lambda_R \mu^\epsilon}{4!} (Z_\lambda Z_\phi^2 - 1) \phi_R^4 \quad (12.45)$$

Te nove člene obravnavamo kot prave člene Lagrangiana, izpeljemo zanje Feynmanova pravila ter jih upoštevamo pri Feynmanovih diagramih. Seveda so formalno višje potence v sklopitveni konstanti λ_R . Lahko jih razvijemo po potencah sklopitvene konstante (koeficienti so seveda lahko singularni v $1/\epsilon$)

$$\delta m^2 = \delta m_1^2 \lambda_R + \delta m_2^2 \lambda_R^2 + \dots \quad (12.46)$$

$$\delta Z_\lambda = \delta Z_{\lambda 1} \lambda_R + \delta Z_{\lambda 2} \lambda_R^2 + \dots \quad (12.47)$$

$$\delta Z_\phi = \delta Z_{\phi 1} \lambda_R + \delta Z_{\phi 2} \lambda_R^2 + \dots \quad (12.48)$$

in jih torej moramo formalno upoštevati v pravem redu v potencah po λ_R .

12.5 Različni renormalizacijski pogoji (sheme)

Zgornji renorm. pogoji niso sveti. Lahko jih izberemo drugačne, in večkrat to tudi res naredimo. Na kratko opišimo sedaj takoimenovano shemo \overline{MS} , ki se dosti rabi predvsem v kromodinamiki.

Tukaj nimamo nobenih pogojev v kinematičnih točkah kot prej, pač pa določimo protičlene enostavno z zahtevo, da se znebimo vseh delov $2/\epsilon - \gamma + \ln 4\pi$. Ime \overline{MS} pomeni minimal subtraction, prečna pa je zato, ker poleg divergentnega dela, pospravimo v protičlen še zgornja končna.

V prejšnjem primeru ϕ^4 bi to pomenilo

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda_R m_R^2}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right) \quad (12.49)$$

$$\delta Z_\lambda = \frac{3\lambda_R}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right) \quad (12.50)$$

$$\delta Z_\phi = 0 \quad (12.51)$$

Seveda z gledajo renormalizirane 1-PI G.f. različno kot prej

$$\Gamma_R^{(2)}(p^2, m_R^2, \lambda_R, \mu) = p^2 - m_R^2 + \frac{\lambda_R m_R^2}{2(4\pi)^2} \left(1 - \ln \frac{m_R^2}{\mu^2} \right) \quad (12.52)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(4)}(p_i, m_R^2, \lambda_R, \mu) &= -\lambda_R + I_R(s, m_R^2, \lambda_R, \mu^2) \\ &+ I_R(t, m_R^2, \lambda_R, \mu^2) + I_R(u, m_R^2, \lambda_R, \mu^2) \end{aligned} \quad (12.53)$$

Spomniti se pa moramo, da sta m_R in λ_R zdaj nekaj čisto drugega kot sta bila prej (različni številki).

12.6 Vaja 10

- K Lagrangianu za ϕ^4 dodaj fermion ter člene

$$\bar{\psi}(i\cancel{\partial} - m_f)\psi - y\phi\bar{\psi}\psi \quad (12.54)$$

- Izračunaj popravek k vertexu $\bar{\psi}\psi\phi$ na eni zanki ter renormaliziraj y v \overline{MS} shemi.
- Izračunaj vertex ϕ^3 na eni zanki ter pokaži, da divergira.
- Od tod sledi, da bi od vsega začetka morali dodati člen $M\phi^3$, renormalizacija parametra M pa bi krajšala divergenco pri vertexu ϕ^3 , ki se pojavi na eni zanki, podobno kot je renormalizacija parametra y odpravila divergenco vertexa $\bar{\psi}\psi\phi$.
- Kaj se zgodi v limiti $m_f \rightarrow 0$? Zakaj se tedaj (ob $M = 0$ seveda) vertex ϕ^3 ne generira na eni zanki? Kakšna simetrija to prepove?

12.7 Enačbe renormalizacijske grupe

Zgornji izrazi so navidez nekoliko presenetljivi, saj zglada, da so fizikalno merljive količine odvisne od poljubnega parametra μ , ki se je prištulil v izraze preko dimenzijske regularizacije in zahteve po brezdimenzijski renormalizirani sklopitveni konstanti. To bi se zgodilo celo v teorijah brez masnega parametra: renormalizacija sama ustvari dimenzijski faktor, kar imenujemo dimenzijska transmutacija. Tako ali drugače, odvisnost od neznanega μ je le navidezna. Pokazali bomo, da so renormalizirani parametri (m_R^2 , λ_R v \overline{MS} shemi) tudi od μ odvisni, tako da se skupni efekt nevtralizira in so fizikalne količine neodvisne od izbire μ .

To preveriti je seveda važno, imeli bomo pa še nadaljno korist. Pokazali bomo namreč, da lahko preko tega trika seštejemo neskončno vrsto nevarnih velikih logaritmov, ki se pojavijo v nekaterih kinematskih limitah, ter tako rešimo sam perturbacijski razvoj.

Začnimo takoj s spoznanjem, da so vsi goli parametri neodvisni od μ .

$$0 = \mu \frac{d\lambda}{d\mu} = \mu \frac{d}{d\mu} (\lambda_R \mu^\epsilon Z_\lambda(\lambda_R, \epsilon)) \quad (12.55)$$

Odtod dobimo enačbo

$$\epsilon \lambda_R + \mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} \left(1 + \lambda_R \frac{\partial \ln Z_\lambda(\lambda_R, \epsilon)}{\partial \lambda_R} \right) = 0 \quad (12.56)$$

Rešitev za neznanke nastavimo kot razvoj po pozitivnih potencah renormalizirane sklopitvene konstante (više potence pridejo v poštev šele na nivoju dveh zank)

$$\mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = A\lambda_R + B\lambda_R^2 + \dots \quad (12.57)$$

Upoštevajoč (12.50) dobimo

$$\mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = -\epsilon\lambda_R + \frac{3\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \quad (12.58)$$

Zdaj lahko mirno potegnemo limito $\epsilon \rightarrow 0$ ter dobimo enačbo, ki opisuje spremembo renormalizirane sklopitvene konstante s skalo μ .

$$\mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = \frac{3\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \quad (\equiv \beta(\lambda_R)) \quad (12.59)$$

Desno stran, razvoj po potencah λ_R , imenujemo β funkcijo. Enačbo lahko integriramo

$$\lambda_R(\mu) = \frac{\lambda_R(\mu_0)}{1 - \frac{3\lambda_R(\mu_0)}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0}} \quad (12.60)$$

Z večanjem skale pridemo do singularnosti, ker je beta funkcija pozitivna. To pomeni nekako, da se sklopitvena konstanta večja s skalo, pri kateri jo merimo. Seveda pa približek odpove preden dosežemo singularnost, ki jo imenujemo pol Landau-ova, saj postane λ_R dovolj velika, da se ne moremo več zadovoljiti z nivojem ene zanke.

Podobno lahko naredimo za maso:

$$0 = \mu \frac{dm^2}{d\mu} = \mu \frac{d}{d\mu} (m_R^2 - \delta m^2(m_R^2, \lambda_R, \epsilon)) \quad (12.61)$$

odkoder

$$\mu \frac{dm_R^2}{d\mu} + \left(m_R^2 \mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} + \lambda_R \mu \frac{dm_R^2}{d\mu} \right) \frac{1}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right) = 0 \quad (12.62)$$

Podobno kot prej razvijemo

$$\mu \frac{dm_R^2}{d\mu} = C\lambda_R + \dots \quad (12.63)$$

in ob uporabi (12.58) dobimo v prvem redu

$$\mu \frac{dm_R^2}{d\mu} = \frac{\lambda_R}{(4\pi)^2} m_R^2 \quad (12.64)$$

katere rešitev je

$$m_R^2(\mu) = \frac{m_R^2(\mu_0)}{\left(1 - \frac{3\lambda_R(\mu_0)}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0} \right)^{1/3}} \quad (12.65)$$

12.8 Ekspliciten primer

Predstavljamo si, da imamo pospeševalnik delcev ϕ , ki jih opisujemo z nam že dobro znanim Lagrangianom ϕ^4 . Zanimamo se za elastično sipanje dveh delcev (to pomeni, da je število in tip delcev na koncu enako kot na začetku).

Vhodna delca imata četverca gibalne količine v težiščnem sistemu (ki naj bo enak laboratorijskemu)

$$p_1^\mu = (E, 0, 0, p) \quad (12.66)$$

$$p_2^\mu = (E, 0, 0, -p) \quad (12.67)$$

končna delca pa

$$p_3^\mu = -(E, p \sin \theta, 0, p \cos \theta) \quad (12.68)$$

$$p_4^\mu = -(E, -p \sin \theta, 0, -p \cos \theta) \quad (12.69)$$

kjer je

$$E^2 - p^2 = m^2 \quad (12.70)$$

in je m^2 pol propagatorja. V drevesnem redu je kar masni parameter v Lagrangianu, v redu ene zanke pa m_R^2 definiran preko (12.23) v našem posebnem primeru, oz. preko (12.29) v splošnem. To je tudi masa, ki jo čuti gravitacija in nastopa v Newtonovem gravitacijskem zakonu.

Mislimo si, da nam nekako uspe izmeriti sipalni presek σ_{exp} v limiti, ko imata vhodna delca zelo majhno gibalno količino (to je ponavadi težko, saj pravzaprav pomeni, da se vhodna delca sploh ne gibljeta, torej ne pride do sipanja, vendar si lahko mislimo nekakšno limito). To izberemo samo zato, ker so vse enačbe v tej točki enostavnejše, v realnem primeru merimo v drugi točki. V tej ugodni limitni ($p \rightarrow 0$) kinematski točki faznega prostora so Mandelstamove spremenljivke

$$s \rightarrow 4m_R^2 \quad (12.71)$$

$$t \rightarrow 0 \quad (12.72)$$

$$u \rightarrow 0 \quad (12.73)$$

V drevesnem redu dobimo

$$\Gamma^{(4)}(p_i, m, \lambda) = -\lambda \quad (12.74)$$

amplituda je neodvisna od gibalnih količin. Ker merimo presek, moramo izračunati še fazni prostor itd. po formuli (9.20). Rezultat je

$$\sigma = \frac{|\Gamma^{(4)}|^2}{64\pi E^2} = \frac{\lambda^2}{64\pi E^2} \quad (12.75)$$

Sklopitveno konstanto λ določimo preko izmerjenega σ_{exp} v limiti (12.71)-(12.73):

$$\sigma_{exp} = \frac{\lambda^2}{64\pi m^2} \quad (12.76)$$

Torej je v splošnem

$$\sigma = \sigma_{exp} \left(\frac{m}{E} \right)^2 \quad (12.77)$$

Recimo pa, da s to natančnostjo nismo zadovoljni. V tem primeru poskusimo uporabiti rezultate v naslednjem popravku, to je približku ene zanke. Za renormalizacijske pogoje izberimo (12.40)-(12.42), tako da je izraz za 4-točkovno 1PI G.f. (12.24). Ta je v kinematski točki, kjer merimo (12.71)-(12.73) enak (izračunati moramo integrale tipa (12.25))

$$\Gamma_{exp}^{(4)} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \quad (12.78)$$

Pri kvadriranju $\Gamma^{(4)}$ ne smemo upoštevati najvišje potence λ_R^4 , saj je ta že naslednjega reda (če bi računali do dveh zank, bi imeli še red λ^3 v (12.78), kar bi, pomnoženo z drevesnim redom, dalo tudi isto potenco), tako da je

$$\sigma_{exp} = \frac{1}{64\pi m_R^2} \left(\lambda_R^2 - 2 \frac{\lambda_R^3}{(4\pi)^2} \right) \quad (12.79)$$

Preko te enačbe izračunamo numerično vrednost λ_R . Če je ta dovolj majhna, to je da

$$\frac{\lambda_R}{(4\pi)^2} \ll 1 \quad (12.80)$$

perturbativni razvoj Greenovih funkcij konvergira in je račun konsistenten.

Sipalni presek v poljubni kinematski točki pa seveda izračunamo preko (9.20) in (12.24), kjer pa je zdaj λ_R numerično nabitana preko (12.79).

Kaj pa, če bi namesto (12.42) uporabili drugačen pogoj, npr. v limiti (12.71)-(12.73)

$$\Gamma_R^{(4)} \rightarrow -\lambda'_R \quad (12.81)$$

Tedaj je

$$\sigma_{exp} = \frac{\lambda'^2_R}{64\pi m_R^2} \quad (12.82)$$

Kot vidimo, je λ'_R numerično zdaj različen od λ_R , končni rezultat pa enak do popravkov formalno višjega reda v potencah sklopitvene konstante. Numerično je torej fizikalni rezultat (sipalni presek kot funkcija gibalnih količin) lahko rahlo odvisna od izbire renormalizacijske sheme, vendar je pri dobri konvergenci (12.80) razlika primerno majhna.

Kaj pa, če uporabimo \overline{MS} shemo? Da se čimbolj izognemo komplikacijam, uporabimo to shemo le za sklopitveno konstanto, medtem ko naj bo masa še vedno pol propagatorja:

$$\Gamma_R^{(2)} = p^2 - m_R^2 \quad (12.83)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_R^{(4)} &= -\lambda_R(\mu) + I_R(s, m_R^2, \lambda_R(\mu), \mu^2) \\ &+ I_R(t, m_R^2, \lambda_R(\mu), \mu^2) + I_R(u, m_R^2, \lambda_R(\mu), \mu^2) \end{aligned} \quad (12.84)$$

Sklopitvena konstanta $\lambda_R(\mu)$ je sedaj, z razliko od prejšnjih, drseča, to je odvisna od parametra μ preko enačbe renormalizacijske grupe (12.59). To nas ne sme splašit. Po popolnoma enakem postopku kot prej dobimo najprej v limiti (12.71)-(12.73)

$$\Gamma_{exp}^{(4)} \rightarrow -\lambda_R(\mu) + \frac{\lambda_R^2(\mu)}{(4\pi)^2} \left(1 + 3 \ln \frac{\mu}{m_R} \right) \quad (12.85)$$

Pri $\mu = m_R$ imamo isti izraz kot prej, glej (12.78)

$$\Gamma_{exp}^{(4)} = -\lambda_R(m_R) + \frac{\lambda_R^2(m_R)}{(4\pi)^2} \quad (12.86)$$

torej je $\lambda_R(m_R)$ numerično enak λ_R , ki ga dobimo preko enačbe (12.79). Ko integriramo (12.59), upoštevamo ta robni pogoj:

$$\lambda_R(\mu) = \frac{\lambda_R(m_R)}{1 - \frac{3\lambda_R(m_R)}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu}{m_R}} \quad (12.87)$$

Pozoren bralec se lahko zdaj upravičeno vpraša, ali lahko sploh ta zadnji izraz ohranimo v tej obliki, ali pa moramo razviti po potencah $\lambda_R(m_R)$, kot ponavadi. Vendar je tukaj razlika, saj nastopa še $\ln(\mu/m_R)$, ki bi v principu lahko bil velik. Če je dovolj majhen

$$\frac{\lambda_R(m_R)}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu}{m_R} \ll 1 \quad (12.88)$$

lahko mirne duše razvijemo do kvadratnega reda, vstavimo v (12.84), ter dobimo

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(p_i, m_R^2, \lambda_R) &= -\lambda_R + I_R(s, m_R^2, \lambda_R, m_R^2) \\ &+ I_R(t, m_R^2, \lambda_R, m_R^2) + I_R(u, m_R^2, \lambda_R, m_R^2) \end{aligned} \quad (12.89)$$

točno isto kot (12.24). V tem primeru ni popolnoma nobene razlike med originalno shemo in \overline{MS} shemo.

Do razlike pa pride, ko (12.88) ni izpolnjena, čeprav (12.80) je. To je jasno možno le pri zelo (eksponentno) velikih razmerjih μ/m_R . V tem primeru nam je rešitev RG pomagala sešteti vse potence

$$\left(\frac{\lambda_R(m_R)}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu}{m_R} \right)^n \quad (12.90)$$

ki nastopajo v redu n -te zanke. Seveda nismo n -te zanke za $n > 1$ sploh računali, rešitev enačb RG pa nam omogoča, da vsaj te, v tej limiti dominantne člene resumiramo.

Pozoren bralec bo nedvomno spet zbeگان. Zakaj bi pa sploh uporabljali tako velika (ali majhna) razmerja μ/m_R , saj jo lahko (vsaj v principu) izberemo poljubno? Razlog za to najdemo, če se sprašujemo za obnašanje preseka za zelo velike energije, to je ko npr. $s/m_R^2 \rightarrow \infty$. V primeru (12.24) bi popravek k drevesnemu redu $-\lambda_R$ bil oblike

$$\frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{s}{m_R^2} \quad (12.91)$$

in ta številka sploh ni nujno manjša od ena. Višji redi bi prispevali še više potence

$$\left(\frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{s}{m_R^2} \right)^n \quad (12.92)$$

in razvoj ne bi konvergirala.

Ta problem rešimo z drsečo sklopitveno konstanto (12.87) in uporabo (12.85) pri $\mu \approx E$. Tedaj so namreč razmerja

$$\left(\frac{\lambda_R(m_R)}{(4\pi)^2} \ln \frac{s}{\mu^2} \right)^n \quad (12.93)$$

ki nastopajo v (12.85) in morebiti v višjih redih dovolj majhna, da se nam ni treba bati za konvergenco. Seveda pa smo vse tovrstne prispevke teh višjih redov spravili v drsečo sklopitveno konstanto

$$\lambda_R(E) = \frac{\lambda_R(m_R)}{1 - \frac{3\lambda_R(m_R)}{(4\pi)^2} \ln \frac{E}{m_R}} \quad (12.94)$$

Celoten postopek konvergira pod pogojem , da

$$\frac{\lambda_R(E)}{(4\pi)^2} \ll 1 \quad (12.95)$$

kar pa ni res, ko se približamo Landau-ovemu polu (tega se bomo izogibali kot hudiča).

Vidimo, da smo z resumacijo rešili perturbacijski razvoj v primeru zelo velikih (ali majhnih) energij. In v tem je moč sheme z drsečimi sklopitvenimi konstantami.

12.9 Vaja 11

- Izračunaj diferencialni nepolarizirani sipalni presek za $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$. Pri tem uporabljaj rezultate za $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$. Podobno s pomočjo znanih rezultatov za Comptonso sipanje $e\gamma \rightarrow e\gamma$ izračunaj presek za anihilacijo $e^+ e^- \rightarrow \gamma\gamma$. Komentiraj "crossing" simetrijo.

12.10 Vaja 12

- Obravnavaj sistem z interakcijo $\lambda\sigma\phi_1\phi_2$. Za primer, ko pripadajoče mase zadoščajo $m_\sigma > m_1 + m_2$ izračunaj razpadno širino Γ_σ v drevesnem redu. Pokaži, da v najnižjem neničelnem redu λ velja optični teorem

$$m_\sigma\Gamma_\sigma = \text{Im}(\Gamma_{\sigma\sigma}^{(2)}(m_\sigma^2))$$

kjer je $\Gamma_{\sigma\sigma}^{(2)}(p^2)$ 2-točkovna 1-PI G.f. za σ .

13 Kvantna elektrodinamika do ene zanke (1h30min)

V tem poglavju bom uporabljal metodo protičlenov, vse količine bodo renormalizirane, čeprav ne bom pisal eksplisitno oznake R .

Tedaj je drevesni red renormaliziranega Lagrangiana za QED (izberimo si Feynmanovo umeritev $\xi = 1$)

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}i\cancel{\partial}\psi - m\bar{\psi}\psi + e\mu^{\epsilon/2}\bar{\psi}A\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}(\partial A)^2 \quad (13.1)$$

medtem ko so protičleni enake oblike

$$\mathcal{L}_{CT} = \delta Z_2\bar{\psi}i\cancel{\partial}\psi - \delta m\bar{\psi}\psi + \delta Z_1 e\mu^{\epsilon/2}\bar{\psi}A\psi - \frac{\delta Z_3}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \quad (13.2)$$

Te nove člene obravnavamo kot majhno motnjo. So namreč višjega reda v potencah sklopitvene konstante (δZ_i in δm so reda e), zato jih obravnavamo kot interakcijo. Zanje zapišemo sledeča Feynmanova pravila

- protičlen za fermionski propagator

$$i(\delta Z_2\cancel{p} - \delta m) \quad (13.3)$$

- protičlen za fotonski propagator

$$-i\delta Z_3(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu) \quad (13.4)$$

- protičlen za verteks

$$i\delta Z_1 e\mu^{\epsilon/2}\gamma_\mu \quad (13.5)$$

Da je prvi pravilen, lahko preverimo, če upoštevamo celoten kvadratni del za fermion

$$(1 + \delta Z_2)\bar{\psi}i\not{p}\psi - (m + \delta m)\bar{\psi}\psi$$

Jasno je propagator v tem primeru

$$\frac{i}{(1 + \delta Z_2)\not{p} - (m + \delta m)}$$

Če zdaj razvijemo dobimo (upoštevamo da $(M_1 M_2)^{-1} = M_2^{-1} M_1^{-1}$)

$$\begin{aligned} \frac{i}{(\not{p} - m) + (\delta Z_2 \not{p} - \delta m)} &= \frac{i}{(\not{p} - m)[1 + (\not{p} - m)^{-1}(\delta Z_2 \not{p} - \delta m)]} \\ &= \frac{i}{\not{p} - m} + \frac{i}{\not{p} - m} [i(\delta Z_2 \not{p} - \delta m)] \frac{i}{\not{p} - m} + \dots \end{aligned}$$

kar sovpada z zgornjim pravilom.

Podobno se ni težko prepričati, da da celoten kvadratni del fotona

$$-\frac{1 + \delta Z_3}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}(\partial A)^2$$

sledeči propagator

$$\frac{-i}{(1 + \delta Z_3)p^2} \left(g_{\mu\nu} + \delta Z_3 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2} \right)$$

ki lahko razvijemo v

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-ig_{\mu\alpha}}{p^2} [-i\delta Z_3 (p^2 g^{\alpha\beta} - p^\alpha p^\beta)] \frac{-ig_{\beta\nu}}{p^2} + \dots$$

zopet kot pravi F. pravilo.

O korekciji verteksa pa seveda ne bi zgubljali besed.

13.1 Propagator elektrona

Prispevek ene zanke k temu se ponavadi označi

$$\frac{i}{\not{p} - m} (-i\Sigma(p)) \frac{i}{\not{p} - m}$$

kar da za 1-PI G.f. elektrona

$$\Gamma_\psi^{(2)}(p) = \not{p} - m + \delta Z_2 \not{p} - \delta m - \Sigma(p) \quad (13.6)$$

Sedaj pa k računu:

$$-i\Sigma(p) = (ie\mu^{\epsilon/2}\gamma^\alpha) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{i}{\not{k} - m} \frac{-ig_{\alpha\beta}}{(k-p)^2} (ie\mu^{\epsilon/2}\gamma^\beta) \quad (13.7)$$

Kot ponavadi uporabimo identiteto

$$\frac{1}{\not{k} - m} = \frac{\not{k} + m}{k^2 - m^2} \quad (13.8)$$

Definicija γ matrik

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \quad (13.9)$$

velja v poljubnih dimenzijah (tudi necelih), zato pa je ($g^\alpha_\alpha = d$)

$$\gamma^\alpha \gamma_\alpha = d \quad (13.10)$$

$$\gamma^\alpha \gamma^\mu \gamma_\alpha = -(d-2)\gamma^\mu \quad (13.11)$$

Dobimo najprej

$$\Sigma(p) = -ie^2\mu^\epsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-(d-2)\not{k} + dm}{(k^2 - m^2)(k-p)^2} \quad (13.12)$$

z znanim trikom pa še

$$\Sigma(p) = -ie^2\mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-(d-2)\not{k} + dm}{[k^2 - m^2(1-x) + (p^2 - 2kp)x]^2} \quad (13.13)$$

Uvedemo novo spremenljivko $k' = k - xp$ (in črtico izpustimo)

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= -ie^2\mu^\epsilon \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{-(d-2)x\not{p} + dm}{[k^2 - m^2(1-x) + p^2x(1-x)]^2} \\ &= \frac{e^2\mu^\epsilon}{(4\pi)^d} \Gamma(2-d/2) \int_0^1 dx \frac{-(d-2)x\not{p} + dm}{[m^2(1-x) - p^2x(1-x)]^{2-d/2}} \\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2} (\not{p} - 4m) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right) + \mathcal{O}(1) \end{aligned} \quad (13.14)$$

Primerjamo z (13.6) in dobimo v \overline{MS} shemi

$$\delta Z_2 = -\frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right) \quad (13.15)$$

$$\delta m = -4m \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right) \quad (13.16)$$

13.2 Propagator fotona

Vse prispevke na nivoju ene zanke (vključno s protičleni) zapišemo kot

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-ig_{\mu\alpha}}{p^2} [i\Pi^{\alpha\beta}(p) - i\delta Z_3 (p^2 g^{\alpha\beta} - p^\alpha p^\beta)] \frac{-ig_{\beta\nu}}{p^2} + \dots \quad (13.17)$$

kjer je (spomni se na faktor (-1) zaradi fermionske zanke!)

$$\begin{aligned} i\Pi^{\alpha\beta}(p) &= (-1) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} Tr \left(\frac{i}{\not{k} + \not{p} - m} i e \mu^{\epsilon/2} \gamma^\alpha \frac{i}{\not{k} - m} i e \mu^{\epsilon/2} \gamma^\beta \right) \\ &= -e^2 \mu^\epsilon \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{Tr [(\not{k} + \not{p} + m) \gamma^\alpha (\not{k} + m) \gamma^\beta]}{[(k+p)^2 - m^2] [k^2 - m^2]} \end{aligned} \quad (13.18)$$

Posplošiti moramo velikost γ matrik v d dimenzijah. Povsem konsistentno lahko definiramo

$$Tr(1) = f(d) \quad (13.19)$$

$$Tr(\gamma^\alpha \gamma^\beta) = f(d) g^{\alpha\beta} \quad (13.20)$$

$$Tr(\gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu \gamma^\nu) = f(d) (g^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu} g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu}) \quad (13.21)$$

pod edinim pogojem, da je $f(4) = 4$.

Dobimo

$$\begin{aligned} i\Pi^{\alpha\beta}(p) &= -e^2 \mu^\epsilon f(d) \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{2k^\alpha k^\beta + k^\alpha p^\beta + p^\alpha k^\beta + (m^2 - k(k+p)) g^{\alpha\beta}}{[(k+p)^2 - m^2] [k^2 - m^2]} \\ &= -e^2 \mu^\epsilon f(d) \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{2k^\alpha k^\beta + k^\alpha p^\beta + p^\alpha k^\beta + (m^2 - k(k+p)) g^{\alpha\beta}}{[k^2 - m^2 + (p^2 + 2kp)x]^2} \end{aligned}$$

Zopet uvedemo novo spremenljivko $k' = k + xp$ (in črtico izpustimo)

$$\begin{aligned} i\Pi^{\alpha\beta}(p) &= -e^2 \mu^\epsilon f(d) \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{[k^2 - m^2 + p^2 x(1-x)]^2} \\ &\quad \times [-2x(1-x)p^\alpha p^\beta + ((2/d - 1)k^2 + m^2 + p^2 x(1-x)) g^{\alpha\beta}] \end{aligned} \quad (13.22)$$

kjer sem upošteval relacijo

$$k^\alpha k^\beta \rightarrow \frac{k^2}{d} g^{\alpha\beta} \quad (13.23)$$

ki velja seveda pod integralom.

Preveriti želimo sedaj, ali dobi foton maso zaradi popravkov ene zanke. To bi bila katastrofa, saj bi pomenilo, da smo zlomili umeritveno invarianco. Kot bomo videli, na srečo do tega ne pride, kar nam potrjuje prepričanje, da dimenzijska regularizacija eksplicitno ohranja umeritveno invarianco.

Morebitni masni člen dobimo, ko postavimo $p \rightarrow 0$ v zgornjem izrazu. Sledi

$$\begin{aligned} \Pi^{\alpha\beta}(0) &= -e^2 \mu^\epsilon f(d) g^{\alpha\beta} \int_0^1 dx \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{m^2 + (2/d - 1)k^2}{(k^2 - m^2)^2} \\ &= -e^2 \mu^\epsilon f(d) g^{\alpha\beta} \left[m^2 \frac{i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(2 - d/2)}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{2-d/2} \right. \\ &\quad \left. + (2/d - 1) \frac{-i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{d}{2} \frac{\Gamma(2 - d/2 - 1)}{\Gamma(2)} \left(\frac{1}{m^2}\right)^{2-d/2-1} \right] \end{aligned} \quad (13.24)$$

Ob upoštevanju (12.3) je rezultat točno

$$i\Pi^{\alpha\beta}(0) = 0 \quad (13.25)$$

kot smo pričakovali (in upali).

Sedaj pa še divergentne dele. Pri dokazu o brezmasnosti fotona smo dokazali, da velja

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{m^2 + (2/d - 1)k^2}{(k^2 - m^2)^2} = 0 \quad (13.26)$$

Odtod sledi

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{m^2 + (2/d - 1)k^2}{[k^2 - m^2 + p^2 x(1 - x)]^2} = \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{p^2 x(1 - x)}{[k^2 - m^2 + p^2 x(1 - x)]^2} \quad (13.27)$$

odkoder

$$i\Pi^{\alpha\beta}(p) = -\frac{2e^2 \mu^\epsilon f(d) i}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}} (p^2 g^{\alpha\beta} - p^\alpha p^\beta) \Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right) \int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{[m^2 - p^2 x(1-x)]^{\epsilon/2}} \quad (13.28)$$

Limita $\epsilon \rightarrow 0$ nam da

$$i\Pi^{\alpha\beta}(p) = -i \frac{4}{3} \frac{e^2}{(4\pi)^2} (p^2 g^{\alpha\beta} - p^\alpha p^\beta) \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right) + \mathcal{O}(1) \quad (13.29)$$

Ob zahtevi, da δZ_3 v (13.17) ravno krajša divergentne dele, dobimo

$$\delta Z_3 = -\frac{4}{3} \frac{e^2}{(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right) \quad (13.30)$$

13.3 Vaja 13

- V \overline{MS} shemi pokaži v QED na nivoju ene zanke, da velja $Z_1 = Z_2$, kar sledi iz potrebe po umeritveni invarianci

$$D_\alpha = \partial_\alpha - ieA_\alpha = \partial_\alpha - ie_R A_{R\alpha}$$

13.4 Vaja 14

- Izračunaj anomalni magnetni moment elektrona v QED do 1 zanke. Rezultat primerjaj z najnovejšimi meritvami in teoretskimi napovedmi v PDG (dobiš na [6]).

Literatura

- [1] L. H. Ryder, "Quantum Field Theory," Cambridge, Uk: Univ. Pr. (1985) 443p
- [2] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, "An Introduction To Quantum Field Theory," Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p
- [3] W. Siegel, "Fields," arXiv:hep-th/9912205.
- [4] S. Weinberg, "The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations," Cambridge, UK: Univ. Pr. (1995) 609 p
- [5] S. Weinberg, "The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications," Cambridge, UK: Univ. Pr. (1996) 489 p
- [6] <http://inspirehep.net/>
- [7] <http://arxiv.org/>