Kvantna teorija polja

Borut Bajc

2009

CIP - Kataložni zapis o publikaciji
Narodna in univerzitetna knjižnica, Ljubljana
530.22(0.034.2)
BAJC, Borut
Kvantna teorija polja [Elektronski vir] / Borut Bajc. - El. knjiga. - Ljubljana : samozal., 2009
Način dostopa (URL): http://www-f1.ijs.si/ bajc/ktpstalno.pdf
ISBN 978-961-92817-1-0
250121216

Kvantna teorija polja

Borut Bajc
Institut J. Stefan, 1000 Ljubljana, Slovenija

1 Lekcija 1 (45min): Uvod, relativnost

Te skripte se bodo stalno spreminjale in dopolnjevale. Je v bistvo kratek pregled tega, kar je (bilo) predavanega. Za bolj natančne opise in izpeljave pa naj bralec seže predvsem po knjigi Ryder-a, ki je približno prave dolžine in globine za enosemesterski tečaj, če izpustimo nekaj poglavij. Za tiste, ki jih snov posebno zanima, pa svetujem knjigo Peskina in Schroederja [1], ali pa npr. skripte Siegela [2], ki se dobijo zastonj na spletu (so pa zelo obširne), ali Weinberga [3, 4]. Za poljubno informacijo o fiziki osnovnih delcev priporočam spires [5], za dnevne novosti (novi članki) pa [6].

V teku predavanj se bom skoraj vedno držal konvencije $c = 1$ in $\hbar = 1$. To ne predstavlja nič drugega kot posebno izbiro enot. Tako imajo npr. mase in energija isto enoto, ki jo izberemo tipično GeV (gigaelektronvolt=10^9 eV), čas in lega pa GeV^{-1}. Pretvorba iz teh enot v klasične gre zelo enostavno: količino, ki jo želimo pretvoriti, pomnožimo s pravimi potencami $\hbar$ oz. c.

1.1 Motivacija in cilji

Dodiplomski študij fizike nas je izučil tako iz kvantne mehanike kot iz relativnosti (tu in skozi cel tečaj imam v mislih posebno teorijo relativnosti). Pri fiziki delcev pa pridemo zelo hitro do hitrosti le-teh blizu svetlobne. Torej je opis nepopolen. Smisel tega tečaja je naučiti, kako lahko izračunamo merljive fizikalne količine kot sta sipalni presek in razpadna širina na relativistično invarianten način.

1.2 Lorentzove transformacije

Bistvo relativnosti so Lorentzove transformacije. Te bomo izpeljali kot rotacije 4-dimenzijonalnega prostora (čas x^0 in prostorske koordinate x^i, na kratko x^α). Indeksi z latinskimi črkami bodo označevali prostorske koordinate in tekli od 1 do 3, indeksi z grškimi črkami pa od 0 do 3.

Spomnimo se najprej, kako opišemo rotacije v ravnini (2-dimenzijonalnem prostoru). Čisto enostavno je

$$\begin{pmatrix} x' \\ y\prime \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \tag{1}$$

Rotacijsko matriko zapišemo lahko (preveri!) na nekoliko čuden način kot

$$O = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \exp(i\alpha T) \tag{2}$$

kjer imenujemo matriko

$$T = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3}$$

generator rotacije v 2-dimenzijonalnem prostoru. Matrike (2) tvorijo Lie-jevo grupo SO(2). Lie-jevo zato, ker je parameter α zvezen, SO(d) pa v splošnem pomeni ortogonalne ($OO^T = O^T O = I$) rotacije v d-dimenzijonalnem prostoru z enotsko determinanto ($detO = 1$).

Taka oblika je zelo uporabna pri posplošitvi. V d-dimenzijonalnem prostoru zarotiramo vektor $x = (x^1, ..., x^d)^T$ preko grupnega elementa O ($d \times d$ matriko). Vsi ti elementi tvorijo grupo SO(d), vsak element pa je opisan z $d(d-1)/2$ koti $\alpha^{ab} = -\alpha^{ba}$ preko

$$O = \exp\left(\frac{i}{2}\alpha^{ab} T_{ab}\right) \tag{4}$$

in prav tolikimi generatorji rotacije (Kroneckerjev δ je 1, če sta indeksa enaka in 0 drugače)

$$(T_{ab})^{kl} = -i\left(\delta_a^k \delta_b^l - \delta_b^k \delta_a^l\right) \tag{5}$$

Spomniti se moramo, da označita indeksa a in b generator (lahko bi označili drugače, npr. z zaporednim številom od 1 do $d(d-1)/2$, $T_{12} \to T_1$, $T_{13} \to T_2$, itd.), medtem ko nam k in l povesta, o kakšnem elementu matrike govorimo.

V primeru SO(2) je seveda en sam element, T_{12}, ki smo ga označili zato kar brez indeksa.

Upodobitev generatorjev preko (5) je le ena izmed neskončno mnogih. Le-te lahko upodobimo kot $n \times n$ matrike, upodobitev (5) je najniže dimenzijonalna (d) in imenujemo fundamentalna upodobitev grupe SO(d). V splošnem pa vsi generatorji (poljubne upodobitve) zadoščajo algebri generatorjev grupe SO(d), ki je definirana preko komutatorja

$$[T_{ab}, T_{cd}] = i\,(\delta_{ac}T_{bd} + \delta_{bd}T_{ac} - \delta_{bc}T_{ad} - \delta_{ad}T_{bc}) \tag{6}$$

Upoštevajoč, da je $T_{ab} = -T_{ba}$ in $\delta_{ab} = +\delta_{ba}$, lahko preverimo konsistenco zgornje oblike tako, da zamenjamo 1) $a \leftrightarrow b$, 2) $c \leftrightarrow d$, 3) istočasno $a \leftrightarrow c$ in $b \leftrightarrow d$. Ni težko tudi preveriti, da upodobitev (5) res zadošča definiciji (6).

Še nekaj: če bi dopustili, da je determinanta ortogonalnih matrik lahko tudi -1, bi dobili grupo O(d) namesto SO(d). V treh dimenzijah to pomeni npr., da imamo tudi zrcaljenje okoli poljubne ravnine ($x^i \to -x^i$ za en sam i) ali inverzijo ($x^i \to -x^i$ za vse i).

Sedaj pa se povrnimo k Lorentzovim transformacijam. Prostor-čas je sicer res 4-dimenzijonalen prostor, vendar posebnega tipa, saj čas kljub vsemu ni prostor. To se vidi npr. pri invariantah. Spomnimo se, da je razdalja elementov v 4-dimezijonalnem prostoru $c^2(\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 - (\Delta z)^2$, ne pa vsota kvadratov, kot bi bila v navadnem Evklidskem prostoru. To pomeni, da dobimo produkt dveh vektorjev v prostoru Minkowskega, če med njima damo matriko - metrični tenzor, ki posebej skrbi za te dodatne minuse. Če sta npr. $a^\mu = (a^0, a^i)$ in $b^\mu = (b^0, b^i)$, potem je produkt

$$a^0b^0 - a^1b^1 - a^2b^2 - a^3b^3 = a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu \tag{7}$$

kjer je metrični tenzor

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Vedno se poslužujemo konvecije, da pomenita dva enaka Lorentzova indeksa seštevanje (to je brez eksplicitnega sumacijskega znaka), nastopati pa morata eden zgoraj, eden pa spodaj (nikoli oba zgoraj ali oba spodaj). Zato je tu uporabno tudi dvigovanje oz. zniževanje indeksov preko metričnega tenzorja. Tako lahko zgornjo enačbo zapišemo na več ekvivalentnih načinov

$$a^\mu g_{\mu\nu} b^\nu = a^\mu b_\mu = a_\mu g^{\mu\nu} b_\nu = a_\mu b^\mu \tag{9}$$

kjer smo definirali

$$a_\mu \equiv g_{\mu\nu} a^\nu = (a_0, a_1, a_2, a_3) = (a^0, -a^1, -a^2, -a^3) \tag{10}$$

ter inverz metričnega tenzorja, to je

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{11}$$

ki je definiran preko

$$\left(g g^{-1}\right)_\mu^{\ \nu} = g_{\mu\alpha} g^{\alpha\nu} = \delta_\mu^{\ \nu} \tag{12}$$

$$\left(g^{-1} g\right)^\mu_{\ \nu} = g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta^\mu_{\ \nu} \tag{13}$$

Odtod tudi vidimo, da je $g_\mu^{\ \nu} = \delta_\mu^{\ \nu}$.

Prejšnje definicije za SO(d) grupe sedaj posplošimo za SO(d_+,d_-), kjer imamo metrični tenzor v diagonali d_+ enic in d_- minus enic (v našem primeru nas zanima primer SO(1,3)). Vse zgornje definicije so v redu, le da moramo sistematično vse δ zamenjati z g in vse produkte matrike razumeti z vmesnim g. Tako je npr. definicija komutatorja v algebri SO(1,3)

$$[T_{\alpha\beta}, T_{\mu\nu}] = i \left(g_{\alpha\mu} T_{\beta\nu} + g_{\beta\nu} T_{\alpha\mu} - g_{\beta\mu} T_{\alpha\nu} - g_{\alpha\nu} T_{\beta\mu}\right) \tag{14}$$

definicijo za grupni element (4), kar je matrika v 4-dimenzijonalnem prostoru Minkowskega, pa moramo pri razvoju v vrsto razumeti kot

$$\Lambda^\mu_{\ \nu} = \delta^\mu_{\ \nu} + \frac{\theta^{\alpha_1\beta_1}}{2} \left(iT_{\alpha_1\beta_1}\right)^\mu_{\ \nu} + \frac{1}{2}\frac{\theta^{\alpha_1\beta_1}}{2}\frac{\theta^{\alpha_2\beta_2}}{2} \left(iT_{\alpha_1\beta_1}\right)^{\mu\lambda} \left(iT_{\alpha_2\beta_2}\right)_{\lambda\nu} + ... \tag{15}$$

Sedaj pa ni težko preveriti, da opisuje (15) res Lorentzove transformacije

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \tag{16}$$

Preverimo npr., da opisuje rotacija v smeri $\theta^{01} = \alpha$ res Lorentzovo transformacijo v smeri x. Tedaj je

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \left[\delta + \alpha \left(iT_{01}.g\right) + \frac{\alpha^2}{2}\left(iT_{01}.g\right)^2 + ...\right]^{\mu}{}_{\nu} \tag{17}$$

Iz definicij sledi

$$iT_{01}.g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{18}$$

in končno

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & -\sinh\alpha & 0 & 0 \\ -\sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Končno uvedemo novo spremenljivko, $\cosh\alpha = 1/\sqrt{1-v^2}$, ter dobimo natanko Lorentzovo transformacijo (v je hitrost).

Podobno se pod Lorentzom transformira poljuben tenzor

$$T'^{\alpha_1...\alpha_n} = \Lambda^{\alpha_1}{}_{\beta_1}...\Lambda^{\alpha_n}{}_{\beta_n} T^{\beta_1...\beta_n} \tag{20}$$

Dobro si je še zapomniti, da sledi iz definicije (15) zaradi antisimetrije generatorjev

$$\Lambda_{\mu}{}^{\sigma} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\sigma}{}_{\mu} \tag{21}$$

odkoder sledi relacija

$$\Lambda^{\mu}{}_{\nu}\Lambda_{\mu}{}^{\sigma} = \delta^{\sigma}{}_{\nu} \tag{22}$$

Zato so produkti vektorjev Lorentzovi skalarji:

$$a'^{\mu} b'_{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} a^{\nu} \Lambda_{\mu}{}^{\sigma} b_{\sigma} = a^{\nu} b_{\nu} \tag{23}$$

2 Lekcija 2 (45min): Še o Lorentzovi grupi

2.1 Spinorji

Na prvi pogled se zdi, da je fundamentalna upodobitev genaratorjev (5) tudi najosnovnejša upodobitev, iz katerih lahko dobimo transofrmacije višjih tenzorjev po vzoru (20). V resnici pa to ni res, kajti obstaja še bolj enostavna upodobitev Lorentzove grupe, iz katere lahko izpeljemo celo transformacijsko matriko $\Lambda^\mu{}_\nu$, ki nastopa v (16) oz. (20).

To sledi iz sledeče izpeljave (omejimo se na štiri dimenzije): predstavljamo si, da obstajajo 4 matrike γ^μ velikosti 4×4, ki zadoščajo Diracovi algebri

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} \equiv \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \tag{24}$$

Tedaj matrike

$$\Sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right] \tag{25}$$

zadoščajo komutacijskim pravilom (14).

Matrike, ki jih rabimo lahko napišemi npr. (v kiralni upodobitvi) kot

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \tag{26}$$

kjer so $\sigma^\mu = (1, \sigma^i)$, $\bar{\sigma}^\mu = (1, -\sigma^i)$ in σ^i Paulijeve matrike. Spinorska upodobitev Ψ Lorentzove grupe je tedaj tista, ki se transformira kot

$$\Psi' = \Lambda_{1/2}\Psi = \exp\left(\frac{i}{2}\alpha^{\mu\nu}\Sigma_{\mu\nu}\right)\Psi \tag{27}$$

V našem primeru (4d) je to štiridimenzionalen Diracov spinor. Ker je prostor-čas sodo dimenzijonalen, so generatorji Lorentzovih transformacij v spinorski upodobitvi bločno diagonalni. Torej so nerazcepne upodobitve Lorentzove grupe pravzaprav dvodimenzijonalne. V bazi (26) so to kar Weylova spinorja ψ_L in ψ_R:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \tag{28}$$

Pod parnostjo postane

$$\Psi \to \gamma^0 \Psi \tag{29}$$

oz.

$$\psi_L \leftrightarrow \psi_R \tag{30}$$

Matriko Lorentzove transformacije v fundamentalni upodobitvi $\Lambda^\mu{}_\nu$ kot obljubljeno izpeljemo lahko iz matrike Lorentzove transformacije v spinorski upodobitvi $\Lambda_{1/2}$:

$$\Lambda_{1/2}^{-1} \gamma^\mu \Lambda_{1/2} = \Lambda^\mu{}_\nu \gamma^\nu \tag{31}$$

Za poznejšo rabo uvedemo še matriko 4×4

$$\gamma^5 \equiv i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{32}$$

ter

$$\bar{\Psi} \equiv \Psi^\dagger \gamma^0 \tag{33}$$

ki se transformira kot

$$\bar{\Psi}' = \bar{\Psi} \Lambda_{1/2}^{-1} \tag{34}$$

Vseh 16 možnih bilinearnih kombinacij Diracovih spinorjev zapišemo lahko kot

$$\begin{aligned} S &= \bar{\Psi}\Psi & (35) \\ P &= \bar{\Psi}\gamma^5\Psi & (36) \\ V^\mu &= \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi & (37) \\ A^\mu &= \bar{\Psi}\gamma^\mu\gamma^5\Psi & (38) \\ T^{\mu\nu} &= \bar{\Psi}\left[\gamma^\mu, \gamma^\nu\right]\Psi & (39) \end{aligned}$$

Izbrane črke so kratice (S =skalar, P =psevdoskalar, V =vektor, A =aksijalni vektor, T =tenzor), ki označujejo obnašanje pod Lorentzovimi transformacijami

$$
\begin{aligned}
(S', P') &= (S, P) && (40)\\
(V'^{\mu}, A'^{\mu}) &= \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\,(V^{\nu}, A^{\nu}) && (41)\\
T^{\mu\nu} &= \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}T^{\alpha\beta} && (42)
\end{aligned}
$$

in parnostjo

$$
\begin{aligned}
S &\to +S && (43)\\
P &\to -P && (44)\\
V^{\mu} &\to (-1)^{\delta_{\mu 0}+1}\,V^{\mu} && (45)\\
A^{\mu} &\to (-1)^{\delta_{\mu 0}}\,A^{\mu} && (46)\\
T^{\mu\nu} &\to (-1)^{\delta_{\mu 0}+\delta_{\nu 0}}\,T^{\mu\nu} && (47)
\end{aligned}
$$

2.2 Vse upodobitve Lorentzove grupe

Splošne generatorje SO(1,3) lahko označimo kot

$$
T_{0a} = K_a \quad , \quad T_{ab} = \epsilon_{abc}J_c \qquad (48)
$$

kjer je tenzor Levi-Civite ϵ_{abc} antisimetričen na izmenjavo poljubnih dveh indeksov ter $\epsilon_{123} = 1$. V generatorjih K spoznamo generatorje Lorentzovih premikov (boost), v generatorjih J pa generatorje vrtenja v 3-dimenzijonalnem prostoru (vrtilna količina!). Tedaj se komutacijska pravila (14) zapišejo kot

$$
\begin{aligned}
[K_a, K_b] &= -i\epsilon_{abc}J_c && (49)\\
[J_a, K_b] &= i\epsilon_{abc}K_c && (50)\\
[J_a, J_b] &= i\epsilon_{abc}J_c && (51)
\end{aligned}
$$

Čeprav to zgleda bolj nekompaktno od prejšnjega zapisa, nam nudi več vpogleda. Zadnja enačba ni nič drugega kot komutacijska pravila za operator vrtilne količine. Definiramo lahko nove linearne kombinacije generatorjev

$$
\begin{aligned}
A_a &= \frac{1}{2}\,(J_a + iK_a) && (52)\\
B_a &= \frac{1}{2}\,(J_a - ik_a) && (53)
\end{aligned}
$$

čigar komutacijska pravila se poenostavijo

$$[A_a, A_b] = i\epsilon_{abc}A_c \quad (54)$$
$$[A_a, B_b] = 0 \quad (55)$$
$$[B_a, B_b] = i\epsilon_{abc}B_c \quad (56)$$

To so pa komutacijska pravila za rotacijo v 2-dim kompleksnem prostoru (glej zgornja pravila za operatorje vrtilne količine). Govorimo torej o grupi SU(2), ki imajo tri elemente (splošen SU(n), to so rotacije - ne več ortogonalne, pač pa unitarne matrike - v n-dim kompleksnem prostoru, ima $n^2 - 1$ generatorjev). A in B so torej generatorji dveh grup SU(2).

Generatorji grupe SO(4) se torej razdelijo na generatorje dveh ločenih in neodvisnih rotacij, dveh SU(2) (en z generatorji A, drugi z generatorji B). Torej je grupa SO(4) lokalno ekvivalentna grupi SU(2)×SU(2).

Polja, ki opisujejo osnovne delce, se transformirajo kot irudicibilne upodobitve Lorentzove grupe, in jih lahko karakteriziramo z dvema večkratnika polovičke, to je z enim spinskim številom za vsak SU(2). Tako je najenostavnejša upodobitev Lorentzov skalar $(0, 0)$. Nato imamo dve vrsti spinorjev. Zgornji grupi označimo z indeksoma L (left) in R (right), tako da imamo lahko dve vrsti osnovnih (Weylovih) spinorjev $\psi_L \sim (1/2, 0)$ oz. $\psi_R \sim (0, 1/2)$, ki ju imenujemo levoročni oz. desnoročni spinor. Fizikalno lahko opisujemo z vsakim od njiju le brezmasne fermione, medtem ko potrebujemo oba (oz. Diracov spinor) za opis masivnega fermiona. Slednji se transformira nad Lorentzovimi transformacijami preko $\Lambda_{1/2}$, glej (27), odtod tudi oznaka 1/2, saj imamo opravka z delci s spinom 1/2. Še zadnjo upodobitev, ki jo bomo stalno uporabljali: to je vektorski bozon $A^\mu \sim (1/2, 1/2)$, ki je delno spin 0 $(= 1/2 - 1/2)$ in delno spin 1 $(= 1/2 + 1/2)$. Pod Lorentzom se transformira kot (16).

2.3 Vaje

1. Preveri, da $\Sigma_{\mu\nu} = c\,[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$ zadošča komutacijskim pravilom za SO(d_+, d_-) in določi c.

2. Pokaži, da so $\Sigma_{\mu\nu}$ bločno diagonalni v kiralni upodobitvi γ matrik.

3. Dokaži enačbo (31).

4. Preveri enačbe (49)-(51), oz. preveri proporcijonalni faktor pri definiciji operatorja vrtilne količine iz T_{ab}.

5. Pokaži, da je Diracova enačba Lorentz kovarijantna.

3 Lekcija 3 (45min): Kvantna mehanika, enačbe za razne spine

3.1 Schrödingerjeva enačba

V kvantni mehaniki smo tipično reševali Schrd̈ingerjevo enačbo oblike

$$i\frac{\partial}{\partial t}\Psi = \left(-\frac{1}{2m_k}\nabla_k^2 + V\right)\Psi \tag{57}$$

kjer seštevamo po vsek delcih $k = 1, ..., N$, Ψ je valovna funkcija sistema, V pa potencijal. Odtod se da izpeljati kontinuitetno enačbo

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho = -\nabla_k.\overrightarrow{j}_k \tag{58}$$

kjer je

$$\rho = \Psi^*\Psi \tag{59}$$

pozitivno definitna količina, in jo lahko torej interpretiramo kot verjetnostna gostota (verjetnost, da je sistem v takem stanju),

$$\overrightarrow{j}_k = -\frac{i}{2m_k}\left(\Psi^*\nabla_k\Psi - \Psi\nabla_k\Psi^*\right) \tag{60}$$

pa verjetnostni tok k-tega delca. Enačba (57) nam pove samo to, da se verjetnost ohranja.

3.2 Klein-Gordonova enačba

Schrödingerjeva enačba je eksplicitno nerelativistična. Izvira iz nerelativistične zveze za energijo

$$E = \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m} + V \tag{61}$$

in zamenjavo energije in gibalne količine z ustreznimi operatorji

$$E \to i\frac{\partial}{\partial t} \quad , \quad \vec{p} \to -i\nabla \tag{62}$$

Posplošitev za relativističen primer se zdi torej enostavna: iz

$$E^2 = \vec{p}^{\,2} + m^2 \tag{63}$$

dobimo Klein-Gordonovo (KG) enačbo (za prosti delec)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\Phi = -m^2\Phi \tag{64}$$

Če vpeljemo

$$\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right) \tag{65}$$

lahko KG enačbo zapišemo eksplicitno relativistično invariantno:

$$\partial^\mu \partial_\mu \Phi = -m^2\Phi \tag{66}$$

Enačba ima dve glavni napaki. Prvič, rešitev vsebuje tudi negativne energije, saj je koren enačbe (63)

$$E = \pm\sqrt{\vec{p}^{\,2} + m^2} \tag{67}$$

Ko bi vpeljali poljubno interakcijo (zgornja oblika KG enačbe opisuje le kinematiko, saj je za prost delec), bi lahko delec s pozitivno energijo prešel v enakega z negativno, kar se gotovo ne zgodi. Drugič, podobno kot v primeru Schrödingerjeve enačbe lahko poiščemo relativistični tok

$$j^\mu = \frac{i}{2m}\left(\Phi^* \partial^\mu \Phi - \Phi \partial^\mu \Phi^*\right) \tag{68}$$

ki zaradi KG avtomatično zadošča kontinuitetni enačbi

$$\partial_\mu j^\mu = 0 \tag{69}$$

Na žalost pa zdaj

$$\rho = j^0 = \frac{i}{2m}\left(\Phi^* \frac{\partial}{\partial t}\Phi - \Phi \frac{\partial}{\partial t}\Phi^*\right) \tag{70}$$

ni več pozitivno definitna količina in je torej ne moremo več interpretirati kot verjetnostno gostoto.

Drugače povedano, rešitev KG enačbe Φ ni več valovna funkcija. Izkazalo se bo, da se vsi problemi rešijo, ko polje Φ interpretiramo kot operator, ki spreminja število delcev.

3.3 Diracova enačba

V prejšnjem razdelku nismo nikjer povedali, za katere delce (s kakšnim spinom) velja KG enačba. Odgovor je preprost: ker je to le kinematska enačba, v njej ni nobene interakcije in izvira le iz zveze med energijo, gibalno količino in maso. Torej naj bi veljala za poljuben spin. In to je res, vendar je to tudi vse le za skalarje, to je delce s spinom 0, ali drugače povedano, za upodobitve $(0,0)$ Lorentzove grupe. Za drugačne delce pa imamo še dodatne zveze.

Tako velja za delce s spinom 1/2 že znana Diracova enačba

$$(i\partial\!\!\!/ - m)\,\Psi = 0 \tag{71}$$

kjer smo uporabili znano Feynmanovo konvencijo

$$a\!\!\!/ \equiv \gamma^\mu a_\mu \tag{72}$$

Diracova enačba je kovarijantna na Lorentzove transformacije, za brezmasne delce pa se zreducira na dve neodvisni enačbi, eno za ψ_L, eno za ψ_R.

Relativistično invarianten tok

$$j^\mu = \bar{\Psi}\gamma^\mu\Psi \tag{73}$$

ima pozitivno definitno ničto komponento, ki jo torej lahko intepretiramo kot gostoto verjetnosti, podobno kot pri Schrödingerjevi enačbi.

Z nastavkom ($px \equiv p_\mu x^\mu$)

$$\Psi = u^{(\alpha)}e^{-ipx} \quad (\text{ali } \ v^{(\alpha)}e^{+ipx}) \tag{74}$$

lahko enačbo rešimo in vidimo, da sta dve lastni vrednosti ($\alpha = 1,2$) za energijo pozitivni (u), dve pa negativni (v). Ker pa opisuje Diracova enačba delce s spinom 1/2, so te negativne energije nenevarne. Obratno: Dirac je zaradi rešitev z negativno energijo napovedal obstoj antidelcev, to je delcev, ki imajo vse naboje obratne od delcev. Da bi prepovedal prehod delcev s pozitivno energijo k negativnim energijam, je vsa možna stanja z negativno energijo zapolnil. Vakuum (osnovno stanje sistema) ima torej vsa stanja z negativno energijo zapolnjena. Stanje enega delca s pozitivno energijo je torej stabilno, saj ne more, zaradi Paulijevega izključitvenega načela, preiti v stanje z negativno energijo, ki je že zapolnjeno. Po drugi strani pa tak vakuum dopušča, da z dodatkom energije en delec z negativno energijo spravimo v stanje s pozitivno energijo, njegovo prejšnje stanje pa ostane prazno. Luknja v negativnih stanjih pomeni antidelec, tako da smo z dodatkom energije iz vakuuma tvorili par delec-antidelec.

Čeprav je Diracova enačba dosti boljša od KG ali Schrödingerjeve, saj nima prejšnjih težav in je eksplicitno relativistična, kljub temu pri dovolj visoki energiji odpove. Razlog za to je v tem, da ni zmožna opisati spremembe števila delcev, to je pa nujno, kot smo ravnokar videli (iz vakuuma lahko dobimo dva nova delca, pravzaprav en delec in en antidelec). To stanje bo rešil šele konsistenten opis v okviru kvantne teorije polja.

3.4 Maxwellove enačbe

Še zelo kratka omemba Maxwellovih enačb. Te lahko zapišemo eksplicitno relativistično kovarijantno kot

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{75}$$
$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu \tag{76}$$

kjer je A_μ potencijal elektromagnetnega polja. $F_{\mu\nu}$ se seveda (to je razvidno iz oblike) pod Lorentzom transformira kot tenzor z dvema indeksoma, A_μ in j_μ pa kot vektorja.

3.5 Vaje

1. Reši Diracovo enačbo za prost delec, zapiši eksplicitno $u^{(\alpha)}(p)$, $v^{(\alpha)}(p)$.

2. Ob normalizaciji

$$\bar{u}^{(\alpha)}(p)u^{(\alpha')}(p) = 2m\,\delta^{\alpha\alpha'} \tag{77}$$
$$\bar{v}^{(\alpha)}(p)v^{(\alpha')}(p) = -2m\,\delta^{\alpha\alpha'} \tag{78}$$

izračunaj količine

$$P_+ \equiv \sum_{\alpha=1}^{2} u^{(\alpha)}(p)\bar{u}^{(\alpha)}(p) \tag{79}$$

$$P_- \equiv -\sum_{\alpha=1}^{2} v^{(\alpha)}(p)\bar{v}^{(\alpha)}(p) \tag{80}$$

3. Ob privzetku, da velja

$$u^{(\alpha)}\bar{u}^{(\alpha)} = \frac{1}{2}\left(1+\gamma^5 \not{S}^{(\alpha)}\right) P_+ \tag{81}$$

   izračunaj eksplicitno četverec polarizacije $S_\mu^{(\alpha)}$ (spin) ter preveri, da je $p^\mu S_\mu = 0$. Vajo ponovi še za $v^{(\alpha)}$.

4. Izračunaj za $n = 0, ..., 4$

$$Tr\left(\gamma_{\mu_1}...\gamma_{\mu_n}\right) \tag{82}$$

$$Tr\left(\gamma_5\gamma_{\mu_1}...\gamma_{\mu_n}\right) \tag{83}$$

5. Kaj se zgodi z Diracovo enačbo, če je $m = 0$ (Weyl, dvokomponentni spinorji)?

6. Iz Maxwellovih enačb zapisanih preko električnega polja $\overrightarrow{E}$ in magnetnega polja $\overrightarrow{B}$ izpelji relativistično invariantne enačbe za vektorski potencial A_μ. Diskutiraj o izbiri umeritve.

4 Lekcija 4 (45min): Enačbe gibanja, interne simetrije

4.1 Akcija

Vse zgornje enačbe gibanja se dajo izpeljati iz znanega principa ekstrema akcije, ki ga že poznamo iz klasične mehanike. Tu ga le posplošimo za primer polj v 4-dim. prostor-času. Predstavljamo si, da imamo Lagrangevo gostoto (od tu dalje jo bom večkrat imenoval kar Lagrangian), ki je skalar nad Lorentzovimi (a tudi ostalimi, glej pozneje) transformacijami. Je funkcija polj ϕ ter njihovih prvih odvodov $\partial_\mu\phi$, torej $\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)$.

Akcija je definirana kot prostorski in časovni integral Lagrangiana

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi) \tag{84}$$

Princip ekstrema akcije pravi, da dobimo enačbe gibanja, če zahtevamo, da se akcija ne spremeni ob majhni spremembi vrednosti polj $\phi \to \phi' = \phi + \delta\phi$)

$$\begin{aligned} S[\phi'] - S[\phi] &= \int d^4x \left[\mathcal{L}(\phi', \partial_\mu\phi') - \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi)\right] \\ &= \int d^4x \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi}\delta\phi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta(\partial_\mu\phi)\right] \\ &= \int d^4x \left[\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\delta\phi\right) + \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right)\right)\delta\phi\right] = 0 \end{aligned} \tag{85}$$

V prehodu na zadnjo vrstico smo upoštevali, da je razlika odvodov enaka odvodu razlike $\delta(\partial_\mu\phi) = \partial_\mu\delta\phi$ ter integrirali per partes.

Prvi člen je totalen odvod. Njegov integral je torej odvisen le od vrednosti polj na robu (v neskončnosti). Če se omejimo na polja in/ali na spremembe polj $\delta\phi$, ki so v neskončnosti dovolj majhna, potem ta člen nič ne prispeva. Akcija je torej ekstremalna za vrednosti polj, ki zadoščajo Euler-Lagrangevim enačbam

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\phi)}\right) = 0 \tag{86}$$

Kakšne Lagrangiane sploh uporabljamo? Kot smo že omenili, naj bo Lagrangian skalar nad Lorentzovimi transformacijami. Želimo tudi, da v primeru prostih polj (nič interakcije) pravilno reproducira enčbe iz prejšnjega poglavja za različne spine, to je Klein-Gordonovo enačbo (spin 0), Diracovo enačbo (spin 1/2) in Maxwellove enačbe (spin 1).

Ni težko preveriti, da je Lagrangian za prosto realno skalarno polje

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{87}$$

kjer izvira normalizacija na polovičko v prvem členu (z odvodi) iz podobne definicije pri klasični mehaniki:

$$L = \frac{1}{2} m \left(\frac{d\overrightarrow{x}}{dt} \right)^2 \tag{88}$$

Spomniti se moramo namreč, da ustreza času t in koordinatam delca $\overrightarrow{x}(t)$ v klasični mehaniki četverec $x^\mu = (t, \overrightarrow{x})$ in polja $\phi_i(x^\mu)$ v teoriji polja.

Za prosto kompleksno polje pa

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi \tag{89}$$

Normalizacija je v zadnjem primeru izbrana tako, da se kompleksno polje izrazi z dvema skalarnima kot $\phi = (\phi_1 + i\phi_2)/\sqrt{2}$.

Podobno je za fermione

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} \left(i\gamma^\mu \partial_\mu - m \right) \psi \tag{90}$$

kjer moramo pri izpeljavi Euler-Lagrangevih enačb obravnavati ψ in $\bar{\psi}$ kot neodvisni polji.

Končno dobimo Maxwellove enačbe iz

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \mathcal{L}_{gf} \tag{91}$$

kjer je zadnji člen odvisen od izbire umeritve (gf=gauge fixing). Če je umeritev npr. Lorentzova, potem je

$$\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi} \left(\partial_\mu A^\mu \right)^2 \tag{92}$$

kjer je ξ Lagrangev multiplikator.

Faktor $-1/4$ v (91) dobimo, če za produkt časovnih odvodov krajevnih komponent vektorja A^i tudi zahtevamo normalizacijo podobno kot v (87). Za časovne komponente A^0 pa sploh nimamo tega kinetičnega člena, kar samo potrjuje, da vse štiri komponente v A^μ niso fizikalne, in še dodatno kliče po členu, ki določa umeritev (recimo (92)).

4.2 Noetherin izrek

Povrnimo se k enačbi (85). Privzamimo, da polja ϕ zadoščajo enačbam gibanja. Zanimajmo se na interne simetrije Lagrangiana, to je na take $\delta\phi$, za katere je Lagrangian invarianten. Tedaj je prvi člen pod integralom enak nič po celem prostoru (in ne samo po integraciji ali, drugače povedano, v neskončnosti, kot za poljuben $\delta\phi$)

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi \right) = 0 \tag{93}$$

Če je polj več, moramo posamezne prispevke seveda sešteti. Tu se zanimamo za zvezne transformacije, ki jih opisujemo z Lievo grupo (T_a so generatorji)

$$\phi' = e^{i\alpha^a T_a} \phi \tag{94}$$

Tedaj je $\delta\phi = i\alpha^a T_a \phi$. Skupno dobimo toliko ohranitvenih tokov, kolikor generatorjev transformacije imamo:

$$\partial_\mu j_a^\mu = 0 \ \ , \ \ j_a^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} i T_a \phi \tag{95}$$

Poglejmo že znan primer Lagrangiana za prosto kompleksno polje (89). Simetrija tu je U(1) faza:

$$\phi' = e^{i\alpha}\phi \ \ , \ \ \phi^{*\prime} = e^{-i\alpha}\phi^* \tag{96}$$

na katero je invarianten Lagrangian (89). Tedaj je tok

$$j^\mu = i \left(\phi \partial^\mu \phi^* - \phi^* \partial^\mu \phi \right) \tag{97}$$

Ta tok smo že spoznali v prejšnjem poglavju in je izviral iz Klein-Gordonove enačbe, tu pa kar iz simetrije Lagrangiana. Pravimo, da se tok (95) ohranja, ker se količina

$$Q_a = \int d^3x j_a^0 \tag{98}$$

ki ji pravimo naboj, s časom ne spreminja:

$$\frac{dQ_a}{dt} = \int d^3x \partial_0 j_a^0 = \int d^3x \partial_\mu j_a^\mu = 0 \tag{99}$$

Upoštevali smo, tako kot ponavadi, da polja dovolj hitro padajo v neskončnosti, ter uporabili Gaussov izrek (integral po prostoru divergence je integral po robu). Tok (95) in naboj (98) imenujemo Noetherin tok in Noetherin naboj. Noetherin izrek pravi, da se taki naboji ohranjajo.

5 Lekcija 5 (45min): Umeritvena invarianca

Pri transformacijah (94) smo se do sedaj omejili na take, pri katerih so prametri α_a konstante. V tem razdelku bomo obravnavali izredno pomemben primer, ko so ti parametri funkcije koordinat, $\alpha_a = \alpha_a(x)$. Take imenujemo umeritvene transformacije.

Motivacija za le-te izvira iz umeritvene invariance Maxwellovih enačb. Če želimo fermion

$$\mathcal{L} = \bar{\psi} i \gamma^\mu \partial_\mu \psi \tag{100}$$

sklopiti z EM poljem, to naredimo po že znanem receptu iz kvantne mehanike

$$i\partial_\mu \to p_\mu \to p_\mu + eA_\mu \to i\partial_\mu + eA_\mu \to iD_\mu \tag{101}$$

Definirali smo kovarijantni odvod

$$D_\mu \psi = \left(\partial_\mu - ieA_\mu\right) \psi \tag{102}$$

Lagrangian

$$\mathcal{L}_1 = \bar{\psi} i \gamma^\mu D_\mu \psi \tag{103}$$

je invarianten na umeritvene (gauge) transformacije

$$\psi \to e^{i\alpha(x)}\psi \ \ , \ \ A_\mu \to A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha \tag{104}$$

saj je lastnost kovarijantnega odvoda na polje ta, da se transformira pod umeritvenimi transformacijami kot polje samo

$$(D_\mu \psi)' = e^{i\alpha(x)} D_\mu \psi \tag{105}$$

Podobno je kinetični člen za EM polje

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \tag{106}$$

invarianten na umeritvene transformacije, saj je to že tenzor EM polja sam

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu && (107) \\ F'_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu} && (108) \end{aligned}$$

Vsota (103) in (106) tvori Lagrangian za fermion plus EM polje.

Transformacije (104) tvorijo, kot vemo, grupo U(1), to je sprememba faze fermiona. Stvar lahko posplošimo za druge grupe, in to sta prva naredila Yang in Mills v petdesetih letih, ki sta prva zapisala Lagrangian invarianten na umeritvene transformacije grupe SU(2).

Še bolj splošno, želimo razumeti, kakšni Lagrangiani so invariantni na

$$\psi' = U\psi \ \ , \ \ U = U(\alpha(x)) \ \ , \ \ U^\dagger = U^{-1} \tag{109}$$

kjer so U unitarne matrike, elementi grupe SU(N). Členi oblike $\bar{\psi}\psi$ bi bili invariantni, zaradi unitarnosti transformacijske matrike U. Problemi pa nastanejo, ko imamo opravka z odvodi:

$$\partial_\mu \psi' = U \partial_\mu \psi + (\partial_\mu U)\, \psi \tag{110}$$

tako da zaradi drugega člena kinetični člen v Lagrangianu ni invarianten

$$\bar{\psi}' i\gamma^\mu \partial_\mu \psi' \neq \bar{\psi} i\gamma^\mu \partial_\mu \psi \tag{111}$$

Podobno kot prej s poljem fotona A_μ želimo tudi zdaj navaden odvod pretvoriti v kovarijantnega. Spomnimo se, da imamo zdaj grupo SU(N) in torej $N^2 - 1$ umeritvenih bozonov, enako število kot število generatorjev transformacij. Najprej definiramo matriko

$$A_\mu \equiv A_\mu^a T^a \tag{112}$$

kjer naj bodo generatorji T^a v isti upodobitvi kot ψ. Če je npr. ψ v fundamentalni upodobitvi, so v primeru SU(2) generatorji T^a kar pravilno normalizirane Paulijeve matrike $\sigma^a/2$, v primeru SU(3) pa Gell-Mannove matrike.V vsakem primeru je konvencija, da so generatorji v fundamentalni upodobitvi normirani na

$$Tr\left(T^a T^b\right) = \frac{1}{2}\delta^{ab} \tag{113}$$

(drugačna izbira za normo pa samo redefinira sklopitveno konstanto g). Uporabimo podoben trik kot prej. Uvedemo kovarijantni odvod

$$D_\mu\psi \equiv (\partial_\mu - igA_\mu)\,\psi \tag{114}$$

ki naj se nad gauge transformacijami

$$\psi' = e^{i\alpha_a(x)T^a}\psi \ \ , \ \ A'_\mu = UA_\mu U^\dagger + \frac{c}{g}\partial_\mu\,(U)\,U^\dagger \tag{115}$$

obnaša kot (105). Spremembo vektorskega polja (pravzaprav matrike (112)) smo poskusili uganit, konstanto c pa določimo preko pogoja (105) za $\alpha(x) \equiv \alpha_a(x)T^a$ in dobimo $c = -i$.

Kako pa dobimo invarianto za kinetične člene umeritvenega bozona A_μ? Smiselno je določit podobno obliko kot prej, le da vzamemo sedaj sled, ker imam o opravka z matrikami:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4c_2}Tr\,(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \tag{116}$$

kar še ne pove dosti, saj še nismo definirali $F_{\mu\nu}$ za splošno SU(N) grupo. Poskus z (107) se izkaže za neuspešnega, zato poskusimo z nastavkom (zahtevamo antisimetričnost na zamenjavo indeksov)

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + c_1 g\,[A_\mu, A_\nu] \tag{117}$$

Zahteva po

$$F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger \tag{118}$$

in torej po invarianci (116) določi $c_1 = -i$. Zadnjo konstanto c_2 pa določimo preko normalizacije. Želimo imeti za vsako umeritveno polje A^a_μ enako normalizacijo kinetičnega člena kot za primer elektromagnetizma. Tedaj je c_2 le normalizacijski faktor generatorjev (v dani upodobitvi)

$$Tr\left(T^aT^b\right) = c_2\delta^{ab} \tag{119}$$

in torej enak 1/2 v primeru fundamentalne upodobitve.

Še dva komentarja.

Prvič, splošne formule za SU(N) lahko uporabimo tudi za primer elektromagnetizma, le da je sedaj edini generator $T^a = q$ konstanta, ki ni nujno normalizirana enako za različna polja. To pomeni, da ima lahko vsako polje ψ_q svoj lasten q. Tako lahko npr. interpretramo e kot naboj elektrona (zanj je $q = 1$), tako da ima up kvark $q = 2/3$, kvark down $q = -1/3$, itd. Produkt

qe je torej U(1) naboj polja ψ_q. Tu je razlika med abelovimi U(1) in neabelovimi SU(N) grupami. Medtem ko ima lahko v abelovem primeru vsako polje svoj naboj, je naboj v neabelovem primeru odvisen le od upodobitve grupe.

Drugič, tako kot smo definirali kovarijantni odvod za fermione, bi lahko enako za bozone.

$$D_\mu \phi \equiv (\partial_\mu - igA_\mu)\,\phi \tag{120}$$

invariantni kinetični člen pa

$$\mathcal{L} = (D_\mu \phi)^\dagger \, D^\mu \phi \tag{121}$$

5.1 Vaje

1. Pokaži, da pomeni Noetherin izrek za translacije in rotacije ohranitev energije, gibalne količine in vrtilne količine.

2. Izračunaj c_1 iz enačbe (117), tako da preveriš, ali se polje elektromagnetnega tenzorja transformira pravilno kot $F'_{\mu\nu} = UF_{\mu\nu}U^\dagger$. Preveri, ali se isti tenzor da zapisati kot $D_\mu A_\nu - D_\nu A_\mu$ ali $[D_\mu, D_\nu]$.

3. Zapiši invarianten Lagrangian za adjungirano upodobitev umeritvene simetrije SU(N).

4. Zapiši eksplicitno kinetične člene za vsa polja standardnega modela.

6 Lekcija 6 (1h30min): Kvantna mehanika drugače

6.1 Greenove funkcije

Schrödingerjeva enačba ohranja število nastopajočih delcev, rešitev (valovna funkcija) se pa iz $\psi(x_a, t_a)$ (x_a se nanašajo na koordinate vseh delcev ob začetnem času t_a) spremeni v $\psi(x_b, t_b)$ (x_b se nanašajo na koordinate vseh delcev ob končnem času t_b). To lahko nazorno zapišemo preko Greenove funkcije $G(x_b, t_b; x_a, t_a)$:

$$\psi(x_b,t_b) = \int G(x_b,t_b;x_a,t_a)\psi(x_a,t_a)dx_a \tag{122}$$

Sistem torej poznamo v celoti, ko poznamo Greenove funkcije. To bo res tudi pozneje v teoriji polja, ko se lahko število nastopajočih delcev spremeni, vendar tedaj interpretacija (122) seveda ne bo veljala.

V splošnem je enačba, ki jo rešujemo, oblike

$$\mathcal{O}_{x_b,t_b}\psi(x_b,t_b) = 0 \tag{123}$$

Ta je npr. lahko

$$\mathcal{O}_{x_b,t_b} = -\frac{1}{2m_b}\nabla^2_{x_b} + V(x_b,t_b) - i\frac{\partial}{\partial t_b} \tag{124}$$

Če bi znali enčbe reševati eksaktno, bi se tu poglavje zaljučilo. Ker pa jih praktično nikoli ne znamo, se moramo posluževati približkov. Najpogosteje to naredimo na sistematičen način tako, da uporabimo perturbacijski razvoj. Operator $\mathcal{O}$ razdelimo na del, ki ga znamo analitično rešiti (to je tipično sistem brez interakcije) ter ostanek:

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}^0 + \mathcal{O}^1 \tag{125}$$

Operator $\mathcal{O}^0$ izberemo tako, da znamo rešiti tako homogeno kot nehomogeno enačbo

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^0_{x,t}\psi_0(x,t) &= 0 && (126)\\ \mathcal{O}^0_{x_2,t_2}G_0(x_2,t_2;x_1,t_1) &= -i\delta(x_2-x_1)\delta(t_2-t_1) && (127) \end{aligned}$$

V primeru (124) je za en delec v D prostorskih dimenzijah to recimo (Heavisideova funkcija $\theta(t)=1$ za $t>0$ in 0 drugače)

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^0 &= -\frac{1}{2m}\nabla^2 - i\frac{\partial}{\partial t} && (128)\\ \mathcal{O}^1 &= V && (129)\\ \psi_0(x,t) &\propto e^{-i\left(Et-\overrightarrow{p}\,\overrightarrow{x}\right)} \quad , \quad E = \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m} && (130)\\ G_0(x_2,t_2;x_1,t_1) &= \left(\frac{m}{2\pi it}\right)^{D/2}\exp\left[\frac{im\overrightarrow{x}^2}{2t}\right]\theta(t) && (131) \end{aligned}$$

kjer sta $\overrightarrow{x} \equiv \overrightarrow{x}_2 - \overrightarrow{x}_1$ in $t \equiv t_2 - t_1$.

Za $D = 1$ izpeljimo (131) iz (127). Kot ponavadi nam invarianca na traslacije pove, da je Greenova funkcija G_0 odvisna le od razlik $x_x = x_2 - x_1$ in $x_t = t_2 - t_1$:

$$G_0(x_2, t_2; x_1, t_1) \to G_0(x) \tag{132}$$

Rešitev (127) nastavimo preko integrala

$$G_0(x) = \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \tilde{G_0}(k) e^{-ikx} \tag{133}$$

Dobimo

$$\tilde{G_0}(k) = \frac{i}{k_t - k_x^2/(2m)} \tag{134}$$

To je bilo izračunano formalno, za integracijo po d^2k pa rabimo še predpis, kako se izogniti polu na realni asi $k_t = k_x^2/2m$. To naredimo tako, da dodamo v imenovalcu člen $+i\epsilon$, kjer je $\epsilon > 0$ infinitezimalno majhen in ga bomo na koncu računov lahko postavili na nič. Tedaj je nov pol

$$k_t = \frac{k_x^2}{2m} - i\epsilon \tag{135}$$

to je v četrtem kvandrantu kompleksne ravnine $(Re(k_t), Im(k_t))$. Integracijo po (realnem) k_t od $-\infty$ do $+\infty$ lahko torej pretvorimo v zaključen integral okoli zgornje polravnine, če je $t < 0$ ali okoli spodnje polravnine za $t > 0$ (integral na polosi v neskončnosti konvergira, če $Re(-ik_t t) = Im(k_t)t < 0$). Edini pol v celi k_t ravnini pa je, kot rečeno v četrtem kvadrantu, torej je integral avtomatično nič za $t < 0$. V obratnem primeru pa dobimo

$$G_0(x) = \theta(t) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \exp\left[-i\left(\frac{k_x^2}{2(m+i\epsilon)}t - k_x x\right)\right] \tag{136}$$

(da novi ϵ ni čisto enak prejšnjemu, nas v resnici ne zanima, važno je le, da ima isti predznak). Da je za $t < 0$ integral nič smo poskrbeli s Heavisideom.

Zadnji integral pospravimo s pomočjo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\lambda x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\lambda}} \tag{137}$$

kar je res pod pogojem, da je $Re(\lambda) > 0$, za kar se moramo v našem zgornjem primeru zahvaliti pozitivnemu ϵ-u. To uporabimo in pridemo do (131), kar smo želeli dokazat.

Tipičen proces, ki ga bomo študirali, bo sipanje, ko delci prihajajo od zelo daleč. Tedaj ($t_a \to -\infty$) so ti delci v bistvu prosti, torej rešijo homogeno enačbo (126). Seveda to ne more biti čisto res, saj je ravni val prisoten po celem prostoru, torej tudi v bližini, kjer je interakcija. V resnici pa so delci seveda paketi in v neskončnosti ne čutijo interakcije. Približek, da je valovna funcija v neskončnosti za proste delce mora torej dobro veljati:

$$\psi(x_a, t_a) = \psi_0(x_a, t_a) \tag{138}$$

Rešitev (123) zadošča integralski enačbi

$$\psi(x_b, t_b) = \psi_0(x_b, t_b) - i \int G_0(x_b, t_b; x, t)\mathcal{O}^1_{x,t}\psi(x, t)dxdt \tag{139}$$

kar se lahko prepričamo, če direktno delujemo z operatorjem $\mathcal{O}^0_{x_b,t_b}$.

Sedaj smo pa že tu: ψ na desni strani zopet razvijemo podobno kot nam nakaže enačba sama, in dobimo perturbacijski razvoj (za $\mathcal{O}^1 = V$)

$$\begin{aligned}\psi(x_b, t_b) = \psi_0(x_b, t_b) + \int G_0(x_b, t_b; x, t)(-i)V(x, t)\psi_0(x, t)dxdt \\ + \int G_0(x_b, t_b; x, t)(-i)V(x, t)G_0(x, t; x', t')(-i)V(x', t')\psi_0(x', t')dxdtdx'dt' + ...\end{aligned} \tag{140}$$

S $\psi_0(x, t)$ imamo v mislih enako funkcijo kraja in časa kot smo jo imeli na začetku (ista gibalna količina), to je

$$\psi_0(x, t) = \int G_0(x, t; x_a, t_a)\psi_0(x_a, t_a)dx_a \tag{141}$$

ki velja za $t > t_a$, zato da je zadoščeno (126).

Enak razvoj lahko seveda ponovimo za Greenovo funkcijo, kar nam da

$$\begin{aligned}G(x_b, t_b; x_a, t_a) &= G_0(x_b, t_b; x_a, t_a) \\ &+ \int G_0(x_b, t_b; x, t)(-i)V(x, t)G_0(x, t; x_a, t_a)dxdt + ...\end{aligned} \tag{142}$$

6.2 Vaje

1. V Ryderju si poglej kanonično kvantizacijo. Natančno predelaj primer realnega skalarnega polja.

2. Isto naredi tudi za kompleksno skalarno polje, fermion in brezmasni vektorski bozon, s poudarkom na razlike v primerjavi z realnim skalarnim poljem.

7 Lekcija 7 (1h30min): Od kvantne mehanike do kvantne teorije polja

7.1 Popotni integral

Enačbo (122) bi lahko v principu posplošili za primere, ko se število delcev ne ohranja (to bomo rabili v kvantni teoriji polja in dosegli z ustrezno interakcijo)

$$\begin{pmatrix} \psi(1) \\ \psi(2) \\ ... \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & ... \\ G_{21} & G_{22} & \\ ... & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0(1) \\ \psi_0(2) \\ ... \end{pmatrix} \tag{143}$$

kjer smo vse integracije izpustili, številke v oklepaju pa označijo število delcev. Ta formalen zapis še ne pove, kako se G_{ij} računajo. Schrödingerjeva enačba ohranja število delcev, tako da jo lahko uporabljamo (za nerelativistične delce) kvečjemu za diagonalne elemente G_{ii}. V kvantni teoriji polja poznamo tak neskončno dimenzijonalen sistem integralno diferencialnih enačb za elemente G_{ij} pod imenom Schwinger-Dysonovih enačb. Za večino primerov pa bi radi našli kaj bolj uporabnega: da bi lahko Greenovo funkcijo reda n (to je enako številu vhodnih plus izhodnih delcev) računali brez ozira na Greenove funkcije višjega reda.

To bomo dosegli s tako-imenovanim popotnim integralom, ki ga je Feynman vpeljal v štiridesetih letih prejšnjega stoletja.

Vse izhaja iz preprostega argumenta: interferenčni pojav z režami, ki je pri klasični optiki značilen za svetlobo, velja v kvantni mehaniki tudi za delce. To v bistvu pomeni, da je delec pravzaprav opravil vse možne poti.

Recimo, da je v času t_a valovna funkcija delca $\psi(x_a, t_a)$, želimo pa izračunati, kakšna je valovna funkcija v končnem času $\psi(x_b, t_b)$. Rabimo torej poznati Greenovo funkcijo $G(x_b, t_b; x_a, t_a)$. Potegniti moramo torej vse poti, ki iz poljubne začetne točke x_a v času t_a preidejo v poljubno končno točko x_b v času t_b. Za določen $x(t)$ s pravim začetnim in končnim pogojem $x(t_{a,b}) = x_{a,b}$ pride do spremembe faze

$$\Delta\phi = \int_a^b (pdx - Edt) = \int_{t_a}^{t_b} dt\,(p\dot{x} - H(x,p)) = \int_{t_a}^{t_b} dtL(x,\dot{x}) \tag{144}$$

kjer je kot ponavadi $p = \partial L(x,\dot{x})/\partial\dot{x}$. Če je možna ena sama pot $x_1(t)$, potem je

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) \propto \;\; e^{i\Delta\phi_1} \tag{145}$$

če sta možni dve, $x_1(t)$ in $x_2(t)$, imamo

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) \propto \;\; e^{i\Delta\phi_1} + e^{i\Delta\phi_2} \tag{146}$$

v splošnem pa imamo lahko poljubno pot, to pomeni, da moramo za vsak $t_i \in [t_a, t_b]$ integrirat $x(t_i)$ od $-\infty$ do $+\infty$. Seveda je takih t_i oz. integracij po $x(t_i)$ neskončno, zato bomo tako operacijo definirali kot limito:

$$\begin{aligned} G(x_b, t_b; x_a, t_a) \;&=\; \lim_{n\to\infty} C_n \int_{-\infty}^{+\infty} dx_1 \ldots \int_{-\infty}^{+\infty} dx_n \\ &\times\;\; \exp\left[i \sum_{i=0}^{n} \Delta t\; L\left(\frac{x_{i+1}+x_i}{2}, \frac{x_{i+1}-x_i}{\Delta t} \right) \right] \end{aligned} \tag{147}$$

kjer smo celoten interval razdelili enakomerno na $\Delta t = (t_b - t_a)/n$, ter upoštevali pogoje $x_0 = x_a$ in $x_{n+1} = x_b$. Konstanto C_n bomo določili v kratkem.

To definicijo na kratko pišemo kot

$$G(x_b, t_b; x_a, t_a) = \int \mathcal{D}x(t) \exp\left[i \int_{t_a}^{t_b} dtL(x,\dot{x}) \right] \tag{148}$$

v mislih pa imamo vedno (147).

Da se prepričamo v resničnost zgornje definicije ter da izračunamo še neznano konstanto, preverimo, ali Greenova funkcija (147) zadošča Schrödingerjevi enačbi, kot pričakujemo zaradi (122):

$$C_n = \left(\frac{m}{2\pi i \Delta t}\right)^{\frac{n+1}{2}} \tag{149}$$

Zgornji izraz (148) moramo razumeti za primer več delcev N v D dimenzijah kot

$$\begin{aligned} G(x_1^b, x_2^b, ..., x_{ND}^b, t_b; x_1^a, x_2^a, ..., x_{ND}^a, t_a) &= \int \mathcal{D}x_1(t)\mathcal{D}x_2(t)...\mathcal{D}x_{ND}(t) \\ &\times \exp\left[i\int_{t_a}^{t_b} dt L(x_i, \dot{x}_i)\right] \end{aligned} \tag{150}$$

kjer se titpičen enodimenzijonalen Lagrangian za en delec

$$L(x, \dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 - V(x,t) \tag{151}$$

posploši v

$$L(x_i, \dot{x}_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i}{2} \sum_{j=1}^{D} \dot{x}^2_{(i-1)D+j} - V(x_i, t) \tag{152}$$

Naslednji korak je pretvoriti zgornji izraz v še bolj uporabno obliko. To sledi iz spoznanja, da ima Greenova funkcija (148) več informacije kot jo pravzaprav rabimo. Celotno odvisnost od začetnih koordinat x_a in končnih x_b pravzaprav ne rabimo v eksplicitni obliki. Kar nas zanima je takozvana S-matrika, definirana kot

$$S_{ba} = \lim_{t_{a,b}\to\mp\infty} \int \psi_b^*(x_b, t_b) G(x_b, t_b; x_a, t_a) \psi_a(x_a, t_a) dx_b dx_a \tag{153}$$

kjer smo z indeksoma pri $\psi_{a,b}$ označili različna kvantna števila (energije, gibalne količine) prostih (pravzaprav ψ_0) sistemov na začetku oziroma koncu. Elementi S-matrike opisujejo verjetnost za prehod iz začetnega stanja a v končno stanje b.

Da poenostavimo, obravnavajmo sistem enega delca. Tedaj lahko do iste matrike pridemo (kako, bomo videli pozneje, za sedaj verjemimo), če poznamo propagator iz t_a v t_b

$$G(t_b, t_a) = \frac{\int \mathcal{D}x(t) x(t_b) x(t_a) \exp\left[i\int_{-\infty}^{+\infty} dt L(x, \dot{x})\right]}{\int \mathcal{D}x(t) \exp\left[i\int_{-\infty}^{+\infty} dt L(x, \dot{x})\right]} \tag{154}$$

Imenujemo jo tudi korelacijska funkcija: pove nam, kako je sistem v času t_a koreliran s sistemom v času t_b, ali drugače povedano, kako sistem v prejšnjem času t_a vpliva na stanje sistema v poznejšem času t_b.

Razlika s prejšnjim izrazom (148) je, da integriramo akcijo za vse čase, zato pa imamo $x(t_b)$ in $x(t_a)$ v števcu. To lahko spravimo v še bolj kompaktno obliko. Uvedemo generatorski funkcional (tok $j = j(t)$ je funkcija časa)

$$Z[j] = \frac{\int \mathcal{D}x(t) \exp\left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dt\,(L(x,\dot{x}) + j(t)x)\right]}{\int \mathcal{D}x(t) \exp\left[i \int_{-\infty}^{+\infty} dt L(x,\dot{x})\right]} \tag{155}$$

Propagator (154) lahko torej dobimo kot drugi odvod generatorskega funkcionala

$$G(t_b, t_a) = \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 Z[j]}{\delta j(t_b) \delta j(t_a)}\bigg|_{j=0} \tag{156}$$

kjer je funkcionalni odvod v splošnem definiran kot

$$\frac{\delta F[f(t)]}{\delta f(\tau)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{F[f(t) + \epsilon\delta(t-\tau)] - F[f(t)]}{\epsilon} \tag{157}$$

Tok $j(t)$ lahko v zgornji enačbi (156) interpretiramo tako, da v začetnem času t_a kreira delec, v končnem času t_b pa ga anihilira. To ne sme zgledati kot nefizikalno. V resnici se ravno to zgodi: delec v danem stanju nekje nastane (izvor npr. elektronov, ki jih pospešimo v pospeševelniku), v drugem stanju pa drugje izgine (v detektorju).

7.2 Vaje

1. Izpelji izraz (149) iz zahteve, da (148) zadošča Schrödingerjevi enčbi.

2. V primeru prostega polja ($L = m\dot{x}^2/2$) izpelji (131) iz direktne definicije (148).

3. Izračunaj vakuumsko pričakovano vrednost časovno urejenega produkta dveh prostih skalarnih polj

$$\begin{aligned} \langle 0 \left| \hat{T}\phi(x)\phi(y) \right| 0\rangle &\equiv \langle 0 \left| \phi(x)\phi(y) \right| 0\rangle \Theta(x^0 - y^0) \\ &+ \langle 0 \left| \phi(y)\phi(x) \right| 0\rangle \Theta(y^0 - x^0) \end{aligned} \tag{158}$$

in pokaži, da zadošča enačbi ($c=?$)

$$\left(\partial_x^2 + m^2\right) \left\langle 0 \left| \hat{T}\phi(x)\phi(y) \right| 0 \right\rangle = c\delta^4(x-y) \tag{159}$$

7.3 Končno kvantna teorija polja

Vse te priprave so nam postavile glavne objekte v obliko, ki jo lahko takoj posplošimo. Ponovimo: sistem poznamo, ko poznamo generatorski funkcional $Z[j]$ (155).

Do teorije polja pridemo s sledečo zamenjavo

$$\begin{aligned} t &\rightarrow x^\mu = (t, x^i) && (160) \\ x(t) &\rightarrow \phi(x^\mu) = \phi(x) && (161) \end{aligned}$$

Generatorski funkcional je zdaj

$$Z[J] = \frac{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp\left[i \int d^4x \left(\mathcal{L}(\phi, \partial\phi) + J\phi\right)\right]}{\int \mathcal{D}\phi(x) \exp\left[i \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \partial\phi)\right]} \tag{162}$$

Greenove funkcije za n delcev (imenujemo jih n-točkovne Greenove funkcije) pa dobimo kot

$$G(x_1, ..., x_n) = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J(x_1)...\delta J(x_n)} \bigg|_{J=0} \tag{163}$$

Poudariti moramo več stvari v zvezi z zgornjimi enačbami.

Prvič, v (162) integriramo Lagrangevo gostoto po celem štiri dimenzijonalnem prostor času. To je podobno kot smo prej v (155) integrirali po času od minus do plus neskončnosti.

Drugič, v teoriji polja vsaki vrsti delca pripada posebno polje. Tako pripada npr. delcu elektronu svoje polje, kvarku up svoje polje, itd. Zgornjo definicijo smo zapisali za splošno polje ϕ. Če imamo opravka z več različnimi polji, potem moramo integrirati po vseh. Če študiramo npr. sistem delca ϕ (karkoli to je) in fotona A_μ, potem moramo integrirati po $\mathcal{D}\phi$ in po $\mathcal{D}A_\mu$. Po pravici povedano, zgornjo definicijo bomo lahko uporabljali brez skrbi le za delce s spinom nič. Za fermione ali umeritvene bozone bomo rabili še dodatna pojasnila.

Tretjič, več enakih delcev (npr. 3 elektrone) ne pomeni več integracije, pač pa samo več odvodov. Tako je npr. (163) povezana z verjetnostjo (to še ni S-matrika), da pride do prehoda iz n_1 ϕ-delcev v n_2 ϕ-delce, kjer velja $n_1 + n_2 = n$. n funkcionalnih odvodov generatorskega funkcionala pomeni torej skupno število začetnih in končnih delcev. Pravzaprav je vsak delec nastal ali izginil v svojem času t_i in kraju $\overrightarrow{x}_i$

Četrtič, končno se zavemo, čemu je imenovalec v (162): prehod iz vakuuma v vakuum brez vmesnih izvorov oz. ponorov delcev je normiran na 1, to je, nič se ne zgodi.

Petič, formulacija preko popotnega integrala je eksplicitno relativistično invariantna (če smo seveda Lagrangian zapisali kot Lorentzov skalar), tako da lahko na morebitne probleme v zvezi z relativističnimi delci pozabimo.

8 Lekcija 8 (2h15min): Generatorski funkcional

8.1 Poseben primer prostih delcev

Ta primer seveda ni zanimiv za dinamiko, saj je ni. Se bomo pa seznanili z metodo ter postavili temelje v najenostavnejšem primeru, takem, ki ga znamo eksaktno izračunati. Perturbacijsko bomo pozneje razvijali okoli te rešitve.

Obravnavajmo sistem prostih realnih bozonov spina nič. Tak Lagrangian smo že srečali, to je KG Lagrangian

$$\mathcal{L}_0 = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 \tag{164}$$

Karkoli drugega z višjo potenco polja ϕ postane interakcija, del, ki ga znamo v 4 dimenzijah obravnavati samo perturbativno. To izvira iz dejstva, da znamo integrirati kvečjemu le Gaussov integral (137), karkoli z višjo potenco v eksponentu ni več v analitični domeni. V Gaussovo obliko moramo sedaj spraviti akcijo z Lagrangianom plus členom z izvorom

$$\int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{m^2}{2}\phi^2 + J\phi\right] = \int d^4x \left[-\frac{1}{2}\phi\left(\partial^2 + m^2\right)\phi + J\phi\right] \tag{165}$$

Pri prehodu na desno stran enačbe smo integrirali per partes, ter upoštevali, da so polja v neskončnosti zanemarljivo majhna.

Eksponent take akcije integriramo po $\mathcal{D}\phi$, zato skušajmo se znebiti linearnega člena v (165). V ta namen opravimo translacijo $\phi(x) \to \phi(x) + \phi_0(x)$ (nad to transformacijo se integralska mera ne spremeni, $\mathcal{D}\phi(x) \to \mathcal{D}\phi(x)$) in dobimo

$$\int d^4x \left[-\frac{1}{2} (\phi + \phi_0) \left(\partial^2 + m^2 \right) (\phi + \phi_0) + J (\phi + \phi_0) \right] \tag{166}$$

$\phi_0(x)$ je lahko poljuben, zato ga izberemo kot rešitev enačbe

$$\left(\partial^2 + m^2 \right) \phi_0(x) = J(x) \tag{167}$$

Kar nam ostane je torej

$$\int d^4x \left[-\frac{1}{2} \phi \left(\partial^2 + m^2 \right) \phi + \frac{1}{2} J \phi_0 \right] \tag{168}$$

$\phi_0(x)$ je v bistvu preko (167) funkcional izvora $J(x)$. Definiramo takoimenovani Feynmanov propagator (Greenovo funkcijo) $\Delta_F(x)$ kot rešitev

$$\left(\partial_x^2 + m^2 \right) i\Delta_F(x-y) = -i\delta^4(x-y) \tag{169}$$

tako da je

$$\phi_0(x) = \int d^4y \, i\Delta_F(x-y) \, iJ(y) \tag{170}$$

Feynmanov propagator lahko tudi izračunamo, najuporabnejša oblika je preko Fourierove transformacije:

$$i\Delta_F(z) = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{ie^{-ikz}}{k^2 - m^2 + i\epsilon} \tag{171}$$

Pri računu celotnega generatorskega funkcionala moramo še integrirat po $\mathcal{D}\phi(x)$: karkoli ta integracija da, je za sedaj nebistvena, saj se krajša med števcem in imenovalcem. Ostane končno (z indeksom 0 označimo generatorski funkcional za prosto polje)

$$Z_0[J] = \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \, iJ(x) \, i\Delta_F(x-y) \, iJ(y) \right] \tag{172}$$

Odtod lahko izračunamo brez težav vse Greenove funkcije (163). Začnimo s prvo

$$G(x_1) = \frac{1}{i}\frac{\delta Z[J]}{\delta J(x_1)}\bigg|_{J=0} = \int d^4z\, i\Delta_F(x_1 - z)\, iJ(z) Z[J]\bigg|_{J=0} = 0 \tag{173}$$

kjer smo upoštevali, da je $\Delta_F(x) = \Delta_F(-x)$. Ni težko uvideti, da so vse Greenove funkcije z lihim številom delcev nič.

$$\begin{aligned} G_0(x_1, x_2) = &\quad i\Delta_F(x_1 - x_2) &(174)\\ G_0(x_1, x_2, x_3, x_4) = &\quad i\Delta_F(x_1 - x_2)\, i\Delta_F(x_3 - x_4) \\ &+ \; i\Delta_F(x_1 - x_3)\, i\Delta_F(x_2 - x_4) \\ &+ \; i\Delta_F(x_1 - x_4)\, i\Delta_F(x_2 - x_3) &(175) \end{aligned}$$

To lahko nadaljujemo tudi za višje Greenove funkcije, vendar si je poučno rezultate ponazorit preko takoimenovanih Feynmanovih grafov (ali diagramov). Točke x_i v štiridimenzijonalnem prostor-času povežemo preko propagatorjev: tako npr. ponazarja $G_0(x_1, x_2)$ iz (174) povezavo ali propagator med točki x_1 in x_2, 4-točkovno Greenovo funkcijo (175) pa tri možne grafe, v katerih štiri točke povežeta dva propagatorja. To se nadaljuje tudi za višje točkovne Greenove funkcije.

8.2 Interakcija

Vse to smo izračunali eksaktno v primeru prostih polj. Vendar je vsa zanimivost pravzaprav v interakciji, tako da jo moramo sedaj vpeljati. To gre preko dodatka k prostemu Lagrangianu (164)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{176}$$

Še prej besedico o masnih dimenzijah količin. Koordinate imajo masno dimenzijo $[x] = -1$, ker je akcija brezdimenzijska pa ima $[\mathcal{L}] = 4$ in $[\phi] = 1$, tako da je sklopitvena konstanta λ tudi brezdimenzijska (zato smo izbrali ravno tako interakcijo).

Že ta navidez minimalen dodatek napravi problem dosti težji, tako da lahko upamo le izračunati Greenove funkcije perturbativno. Predpostavljamo torej, da je dodaten, interakcijski člen dovolj majhen (recimo $\lambda \ll 1$), da lahko $Z[J]$ razvijamo po potencah le-tega.

Poglejmo zdaj, kako se spremeni generatorski funkcional v prvem redu potenc po λ: eksponent akcije razvijemo

$$Z[J] = \frac{1}{N} \int \mathcal{D}\phi(x) \left[1 - i \int d^4 z \frac{\lambda}{4!} \phi^4(z) + \ldots \right] e^{i \int d^4 x (L_0 + J\phi)} \tag{177}$$

kjer N poskrbi za pravilno normalizacijo $Z[0] = 1$. Sedaj uporabimo rezultat prejšnjega primera prostega polja ter zapišemo

$$Z[J] = \frac{1}{N} \left[1 + \int d^4 z \left(-i \frac{\lambda}{4!} \right) \left(\frac{1}{i^4} \frac{\delta^4}{\delta J^4(z)} \right) + \ldots \right] Z_0[J] \tag{178}$$

Omejimo se na 4-točkovno Greenovo funkcijo: jasno moramo $Z_0[J]$ razviti do osme potence izvora J (štiri potence bodo pospravili štirje odvodi zaradi interakcije ϕ^4, ostale štiri potence pa štirje odvodi iz definicije 4-točkovne Greenove funkcije iz generatorskega funkcionala (163)). Daljši račun nam da

$$\begin{aligned} G_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{N} \Big[G_0(x_1, x_2, x_3, x_4) + (-i\lambda) \int d^4 z \\ &\times \; i\Delta_F(x_1 - z)\, i\Delta_F(x_2 - z)\, i\Delta_F(x_3 - z)\, i\Delta_F(x_4 - z) \\ &+ \; \text{nepovezani grafi } \Big] \end{aligned} \tag{179}$$

Tu smo upoštevali definicijo povezanih grafov: to so tisti grafi, v katerih je vsaka točka zvezno povezana z vsako drugi točko. Nepovezani grafi so pa seveda vsi ostali. To razdelitev na povezane in nepovezane grafe smo naredili nalašč. Imamo dve vrsti nepovezanih grafov: tiste, v katerih vsaj del interakcije ni povezan z nobeno zunanjo točko, in ostale. Za prve poskrbi normalizacijski faktor N, ostali pa so v bistvu diagrami, ki jih lahko dobimo kot zmnožek nižje točkovnih Greenovih funkcij. Poglejmo to bolj natančno: iz definicije je

$$N = \left[1 + \int d^4 z \left(-i \frac{\lambda}{4!} \right) \left(\frac{1}{i^4} \frac{\delta^4}{\delta J^4(z)} \right) + \ldots \right] Z_0[J] \Big|_{J=0} \tag{180}$$

Pišimo

$$W[J] \equiv \log Z_0[J] = \frac{1}{2} \int d^4 u \int d^4 v \, iJ(u)\, i\Delta(u - v)\, iJ(v) \tag{181}$$

Tedaj je N do reda λ enak

$$
\begin{aligned}
N &= 1 + \int d^4z \left(-i\frac{\lambda}{4!}\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 \frac{1}{2!}W^2[J]\Bigg|_{J=0} \\
&= 1 + \left(-i\frac{\lambda}{4!}\right) 3\,[i\Delta(0)]^2 \int d^4z \qquad (182)
\end{aligned}
$$

4-točkovna Greenova funkcija iz (178) je torej

$$
\begin{aligned}
G(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \frac{1}{N}\prod_{i=1}^{4}\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(x_i)}\right) \qquad (183) \\
&\times \left[\frac{1}{2!}W^2[J] + \int d^4z \left(-i\frac{\lambda}{4!}\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta}{\delta J(z)}\right)^4 \frac{1}{4!}W^4[J]\right]
\end{aligned}
$$

Oglati oklepaj je enak

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}W^2[J] + \int d^4z \left(-i\frac{\lambda}{4!}\right) \\
&\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J^2(z)}\right)^2 W^2[J]\right. \\
&+6\left(\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J^2(z)}\right)\left(\frac{1}{i}\frac{\delta W[J]}{\delta J(z)}\right)^2 W[J] \\
&\left.+\left(\frac{1}{i}\frac{\delta W[J]}{\delta J(z)}\right)^4\right) \qquad (184)
\end{aligned}
$$

kjer moramo še upoštevati

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{i}\frac{\delta W[J]}{\delta J(z)} &= \int d^4u\, iJ(u)\, i\Delta(u-z) \qquad (185) \\
\frac{1}{i^2}\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J^2(z)} &= i\Delta(0) \qquad (186)
\end{aligned}
$$

Vpliv normalizacijskega člena N je ravno ta, da krajša prvi člen v oklepaju, ki tako odpade, drugi člen v oklepaju pa je nebistven, saj vsebuje dvotočkovne Greenove funkcije zunanjih točk $i\Delta(x_i - x_j)$, in jih zato izpustimo. Končni rezultat za 4-točkovno Greenovo funkcijo je torej (do reda λ)

$$\begin{aligned} G_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (-i\lambda) \int d^4 z \\ &\times i\Delta_F(x_1 - z)\, i\Delta_F(x_2 - z)\, i\Delta_F(x_3 - z)\, i\Delta_F(x_4 - z) \end{aligned} \tag{187}$$

To lahko dobimo čisto nazorno (Feynmanova pravila za teorijo ϕ^4 (176) v koordinatnem prostoru):

0) Nariši vse povezane Fynmanove grafe z danimi zunanjimi točkami $x_1, \ldots, x_n$

1) vozlišče ali verteks je v točki z, njemu pripada člen $-i\lambda$ (i ker imamo vedno $\exp(iS)$, $-\lambda$ pa ker tako zgleda interakcijski člen v (176), faktorja 4! pa smo se znebili, ker je ravno toliko načinov, da štiri zunanje točke x_i povežemo z verteksom);

2) vsaki povezavi pripada propagator $i\Delta_F(x_i - z)$;

3) integrirati moramo po celem prostoru z.

Naslednji korak je transformirati po Fourieru vse propagatorje na desni strani enačbe kot v (171) ter integrirati po legi interakcije z

$$\begin{aligned} G_1(x_1, x_2, x_3, x_4) &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_2}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_3}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 p_4}{(2\pi)^4} \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 + p_3 + p_4) e^{-i(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4)} \\ &\times (-i\lambda) \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{p_2^2 - m^2} \frac{i}{p_3^2 - m^2} \frac{i}{p_4^2 - m^2} \end{aligned} \tag{188}$$

V splošnem lahko definiramo n-točkovno Greenovo funkcijo v p prostoru $\tilde{G}(p_1, \ldots, p_N)$ kot

$$\begin{aligned} G_1(x_1, \ldots, x_N) &= \int \frac{d^4 p_1}{(2\pi)^4} \cdots \int \frac{d^4 p_N}{(2\pi)^4} e^{-i(p_1 x_1 + \ldots + p_4 x_4)} \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \ldots + p_N) \tilde{G}(p_1, \ldots, p_N) \end{aligned} \tag{189}$$

V našem primeru je to kar

$$\tilde{G}(p_1, \ldots, p_4) = (-i\lambda) \frac{i}{p_1^2 - m^2} \frac{i}{p_2^2 - m^2} \frac{i}{p_3^2 - m^2} \frac{i}{p_4^2 - m^2} \tag{190}$$

Feynmanova pravila za teorijo ϕ^4 so v p prostoru torej še bolj enostavna:

0) nariši vse povezane Feynmanove grafe z danimi zunanjimi delci $1, \ldots, n$

1) za vsako vozlišče vzemi $-i\lambda$;

2) za vsak propagator vzemi $i/(p^2 - m^2)$;

3) v vsakem vozlišču se ohrani četverec gibalne količine;

4) če ohranitev gibalne količine v vozliščih ne določi vseh četvercev, je treba po nedoločenih integrirat, za vsakega torej $\int d^4q/(2\pi)^4$;

5) simetrijski faktor: če se vsi 4! ne krajšajo, je treba to upoštevati.

V zgornjem primeru smo računali 4 točkovno Greenovo funkcijo do prvega reda po potencah λ.

Torej, da ponovimo. Za izračun fizikalnih količin (sipalni preseki, razpadne širine), kjer rabimo Greenove funkcije z n zunanjimi (začetnimi in končnimi) delci, rabimo n-točkovno Greenovo funkcijo. To ponazorimo s povezanimi Feynmanovimi grafi, Feynmanova pravila pa posameznemu grafu priredijo analitični izraz kot funkcijo kvantnih števil (gibalnih količin, spinov, itd.) zunanjih delcev.

8.3 Vaje

(A)

1. Preveri, da se v primeru 2 -točkovne G.f. nepovezani deli krajšajo do reda $\mathcal{O}(\lambda)$ vključno.

2. V modelu ϕ^4 izpelji iz definicije 6-točkovno Greenovo funkcijo za povezane grafe do reda $\mathcal{O}(\lambda^2)$. Kako zgleda v p prostoru?

3. Nariši povezane Feynmanove grafe za 8-točkovno G.f. do reda $\mathcal{O}(\lambda^3)$. Uporabi Feynmanova pravila in zapiši isto G.f. v p prostoru.

4. Izračunaj 2-točkovno G.f. v p prostoru do reda $\mathcal{O}(\lambda)$. Kje se zatakne?

(B)

1. Obravnavaj model dveh realnih polj ϕ in χ z Lagrangianom

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 + \frac{1}{2}(\partial\chi)^2 - \frac{1}{2}m_\phi^2\phi^2 - \frac{1}{2}m_\chi^2\chi^2 - \frac{\lambda}{4}\phi^2\chi^2 \qquad (191)$$

2. Izpelji Feynmanova pravila v p prostoru.

3. Nariši vse povezane Feynmanove grafe za vse možne neničelne 2 točkovne G.f. do reda λ ter 4 in 6 točkovne G.f. do reda λ^2.

4. Uporabi F. pravila v p prostoru za vse zgornje primere.

9 Lekcija 9 (2h 15 min): Fizikalne količine

9.1 S matrika

Ko imamo n točkovno Greenovo funkcijo, je naslednji korak k računanju fizikalnih količin takoimenovana sipalna ali S matrika. Greenova funkcija je skoraj že ta prava stvar, vendar zagotovo ne čisto. Zunanji delci imajo znano relacijo med energijo in gibalno količino, $p^2 - m^2 = 0$. Če bi to upoštevali, bi zunanji propagatorji v p prostoru divergirali, saj je to ravno njihov pol. Preskripcija pa je enostavna, vzeti je treba to, kar ostane, to je residuum. Število polov nam pove koliko zunanjih delcev je pri procesu, residuum pa je kar amplituda: recimo, da nas zanima proces sipanja delcev, ki jih opisuje zgornji Lagrangian ϕ^4, recimo delec z gibalno količino p_1 trči v delec z gibalno količino p_2, ven pa pride n delcev z gibalnimi količinami q_j, $j = 1, ..., n$. Amplituda za tak proces je kar

$$\begin{aligned} A(p_1, p_2; q_1, ...q_n) &= \frac{1}{i} \prod_{i=1}^{2} \left[-i\left(p_i^2 - m^2\right)\right] \prod_{j=1}^{n} \left[-i\left(q_j^2 - m^2\right)\right] \\ &\times \tilde{G}(p_1, p_2, q_1, ...q_n)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - ... - q_n) \\ &= \frac{1}{i} \tilde{G}_{amp}(p_1, p_2, q_1, ...q_n)(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - ... - q_n) \end{aligned} \tag{192}$$

Torej je dovolj je, da pri računu Greenovih funkcij ne upoštevamo zunanjih propagatorjev, to je tistih, ki so povezani z zunanjimi delci. Tako G.f., G_{amp}, imenujemo amputirano Greenovo funkcijo. Vidimo tudi, da mora veljati ohranitev (četverca) gibalne količine, zato je pa tudi Greenova funkcija v p prostoru tista količina, ki je bistvena. Razlika med amputirano G.f. in amplitudo je v tem, da so četverci gibalnih količinin zunanjih nog pri amputiranih G.f. poljubni (le da se skupna gibalna količina ohranja), pri amplitudi pa zadoščajo relaciji $p_0^2 - \overrightarrow{p}^2 = m^2$. Ko je ta relacija zadoščena pravimo, da je zunanji delec na masni lupini: v veliki oddaljenosti od interakcijske točke se taki delci obnašajo kot prosti in imajo v približku dobro gibalno količino (so ravni valovi $\exp(-ip_ix_i)$ oz. $\exp(iq_jy_j)$).

Dobro se je zavedati, da so samo zunanji delci na masni lupini ($p^2 = m^2$). Delci v notranjosti Feynmanovega grafa so virtualni, njihova energija k^0 in gibalna količina $\overrightarrow{k}$ nista v nobeni zvezi (so neodvisne količine), tako da propagator ne divergira (razen v posebnih slučajih, vendar se to zgodi takrat, ko je treba po tem četvercu virtualnega delca še integrirat).

Za zaključek pa še kaj je sipalna matrika. To je matrika, simbolično nekako $S = I + iA$, elementi so med vsemi začetnimi stanji in vsemi končnimi stanji, I je identiteta (delci, ki gredo ven so isti in z istimi gibalnimi količinami itd. kot delci, ki pridejo noter - nič se ni zgodilo), A pa amplituda zgornje oblike.

Sedaj pa poskusimo nekoliko bolje motivirati zgornjo enačbo za amplitudo prehoda oz. za sipalno matriko. Ta je definirana kot

$$S_{\beta\alpha} = {}_{out}\langle\beta|\alpha\rangle_{in} = {}_{in}\langle\beta|\hat{S}|\alpha\rangle_{in} \tag{193}$$

kjer so začetna in končna stanja $|\alpha\rangle_{in}$ in $|\beta\rangle_{out}$ zapisana v različnih bazah *in* in *out*. Matrika $\hat{S}$ spreminja bazo *in* v bazo *out*.

Isto stanje lahko zapišemo različno

$$\begin{aligned} {}_{out}\langle\beta| &= {}_{out}\langle 0|\hat{a}_{out}(\beta) = {}_{in}\langle 0|\hat{S}\hat{a}_{out}(\beta) \\ &= {}_{in}\langle\beta|\hat{S} = {}_{in}\langle 0|\hat{a}_{in}(\beta)\hat{S} \end{aligned} \tag{194}$$

kjer sem rabil simbolično $\hat{a}_{in}(\beta)$ in $\hat{a}_{out}(\beta)$ za skupino anihilacijskih operatorjev, ki tvorijo iz vakuuma *in* ali vakuuma *out* stanje ${}_{in}\langle\beta|$ in ${}_{out}\langle\beta|$.

Odtod sledi seveda

$$\hat{a}_{out}(p) = \hat{S}^\dagger \hat{a}_{in} \hat{S} \tag{195}$$

in seveda

$$\hat{\phi}_{out}(x) = \hat{S}^\dagger \hat{\phi}_{in}(x) \hat{S} \tag{196}$$

za asimptotske operatorje iz kanonske kvantizacije

$$\hat{\phi}_{in,out}(x) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3 2p_0} \left(\hat{a}_{in,out}(p)e^{-ipx} + \hat{a}^\dagger_{in,out}(p)e^{ipx}\right) \tag{197}$$

ki zadošča KG enačbi ($p^2 = m^2$, $p_0 > 0$!)

$$\left(\partial_x^2 + m^2\right) \hat{\phi}_{in,out}(x) = 0 \tag{198}$$

Sedaj zapišimo operatorsko identiteto

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}_{hom}(x) + \int dy\, G(x-y) \left(\partial_y^2 + m^2\right) \hat{\phi}(y) \tag{199}$$

ki je veljavna ob pogoju

$$\left(\partial_x^2 + m^2\right) \hat{\phi}_{hom}(x) = 0 \tag{200}$$

$$\left(\partial_x^2 + m^2\right) G(x-y) = \delta(x-y) \tag{201}$$

V (199) integriramo per partes in dobimo izraz za rešitev homogene KG enačbe (200)

$$\hat{\phi}_{hom}(x) = -\left(\int_{y_0^+} - \int_{y_0^-}\right) d^3y \left[G(x-y)\partial_{y_0}\hat{\phi}(y) - \partial_{y_0}G(x-y)\hat{\phi}(y)\right] \tag{202}$$

ki naj velja za $y_0^- < x_0 < y_0^+$. Izberimo dve možnosti za rešitev (201), takoimenovano retardirano in advansirano Greenovo funkcijo G kar

$$\Delta_{ret}(z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-e^{-ipz}}{(p_0 + i\epsilon)^2 - \overrightarrow{p}^2 - m^2} \tag{203}$$

$$\Delta_{adv}(z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{-e^{-ipz}}{(p_0 - i\epsilon)^2 - \overrightarrow{p}^2 - m^2} \tag{204}$$

Ni težko preveriti, da velja

$$\Delta_{ret}(z) = 0, \text{ ko } z_0 < 0 \tag{205}$$

$$\Delta_{adv}(z) = 0, \text{ ko } z_0 > 0 \tag{206}$$

odtod tudi njuni imeni.

Enačba (202) se v teh dveh primerih zapiše kot

$$\hat{\phi}^{ret}_{hom}(x) = \int_{y_0^-} d^3y \left[\Delta_{ret}(x-y)\partial_{y_0}\hat{\phi}(y) - \partial_{y_0}\Delta_{ret}(x-y)\hat{\phi}(y)\right] \tag{207}$$

$$\hat{\phi}^{adv}_{hom}(x) = -\int_{y_0^+} d^3y \left[\Delta_{adv}(x-y)\partial_{y_0}\hat{\phi}(y) - \partial_{y_0}\Delta_{adv}(x-y)\hat{\phi}(y)\right] \tag{208}$$

Sedaj potegnimo limiti $y_0^{\pm} \to \pm\infty$. Po definiciji je torej $\hat{\phi}(y)$ v (207) pisan v bazi *in*, $\hat{\phi}(y)$ v (208) pa v bazi *out*. Torej velja

$$\hat{\phi}^{ret}_{hom}(x) = \phi_{in}(x) \tag{209}$$

$$\hat{\phi}^{adv}_{hom}(x) = \phi_{out}(x) \tag{210}$$

Da ponovimo: sledeči identiteti sta veljavni za poljubne operatorje $\hat{\phi}(x)$, ki so asimptotsko enaki $\hat{\phi}_{in,out}(x)$:

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}_{in}(x) + \int dy\, \Delta_{ret}(x-y)\left(\partial_y^2 + m^2\right)\hat{\phi}(y) \tag{211}$$

$$\hat{\phi}(x) = \hat{\phi}_{out}(x) + \int dy\, \Delta_{adv}(x-y)\left(\partial_y^2 + m^2\right)\hat{\phi}(y) \tag{212}$$

Kot naslednji korak uvedemo operator

$$\hat{I}\,[J] = \hat{T}\exp\left(i\int dz J(z)\hat{\phi}(z)\right) \tag{213}$$

kjer je $\hat{T}$ časovno urejeni produkt operatorjev, definiran kot

$$\hat{T}\hat{A}(x)\hat{B}(y) \equiv \hat{A}(x)\hat{B}(y)\theta(x^0-y^0) + \hat{B}(y)\hat{A}(x)\theta(y^0-x^0) \tag{214}$$

Enačbi (211) in (212) pomnožimo z desne z $I[J]$ ter delujemo še naknadno z leve s $\hat{T}$. Upoštevamo še, da

$$\hat{T}\hat{\phi}_{in}(x)I[J] = I[J]\hat{\phi}_{in}(x) \tag{215}$$

$$\hat{T}\hat{\phi}_{out}(x)I[J] = \hat{\phi}_{out}(x)I[J] \tag{216}$$

saj sta $\hat{\phi}_{in}(x)$ in $\hat{\phi}_{out}(x)$ izračunana preko $\hat{\phi}(y)$ za $y_0 \to -\infty$ oz. $y_0 \to +\infty$ in torej morata v časovno urejenem produktu na desno oz. levo.

Zanju dobimo

$$
\begin{aligned}
\frac{\delta \hat{I}[J]}{\delta i J(x)} &= \hat{I}[J]\hat{\phi}_{in}(x) + \int dy\, \Delta_{ret}(x-y)\left(\partial_y^2 + m^2\right)\frac{\delta \hat{I}[J]}{\delta i J(y)} && (217)\\
\frac{\delta \hat{I}[J]}{\delta i J(x)} &= \hat{\phi}_{out}(x)\hat{I}[J] + \int dy\, \Delta_{adv}(x-y)\left(\partial_y^2 + m^2\right)\frac{\delta \hat{I}[J]}{\delta i J(y)} && (218)
\end{aligned}
$$

Enačbi zdaj odštejemo, pomnožimo z leve s sipalno matriko $\hat{S}$ ter upoštevamo (196):

$$
\left[\hat{\phi}_{in}(x), \hat{S}\hat{I}[J]\right] = \int dy\left(\Delta_{ret} - \Delta_{adv}\right)(x-y)\left(\partial_y^2 + m^2\right)\frac{\delta \hat{S}\hat{I}[J]}{\delta i J(y)} \tag{219}
$$

Rešitev te enačbe je oblike

$$
\hat{S}\hat{I}[J] = \hat{N}\left[\exp\left(i\int dz \hat{\phi}_{in}(z)\left(\partial_z^2 + m^2\right)\frac{\delta}{\delta i J(z)}\right)\right]F[J] \tag{220}
$$

kjer je $\hat{N}$ normalno urejeni produkt. Definiran je tako, da so vsi kreacijski operatorji na levi vseh anihilacijskih operatorjev. Zgornji izraz velja za poljuben $F[J]$. Preverimo ga tako, da vstavimo (220) v enačbo (219), upoštevamo, da veljata zveza

$$
\left[\hat{\phi}_{in}(x), \hat{\phi}_{in}(y)\right] = -i\left(\Delta_{ret} - \Delta_{adv}\right)(x-y) \tag{221}
$$

in lastnost

$$
\left[\hat{A}, \hat{N}\left(e^{\hat{B}}\right)\right] = \left[\hat{A}, \hat{B}\right]\hat{N}\left(e^{\hat{B}}\right) \tag{222}
$$

za poljubne linearne kombinacije kreacijskih in anihilacijskih operatorjev $\hat{A}$ in $\hat{B}$. To zadnje dokažemo z lahkoto:

$$
\begin{aligned}
&\left[\alpha_i \hat{a}_i + \bar{\alpha}_i \hat{a}_i^\dagger\,, \hat{N}\left(e^{\beta_j \hat{a}_j + \bar{\beta}_j \hat{a}_j^\dagger}\right)\right]\\
=\; &\left[\alpha_i \hat{a}_i + \bar{\alpha}_i \hat{a}_i^\dagger\,, e^{\bar{\beta}_j \hat{a}_j^\dagger} e^{\beta_k \hat{a}_k}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\alpha_i \hat{a}_i\,, e^{\bar{\beta}_j \hat{a}_j^\dagger} e^{\beta_k \hat{a}_k}\right] + \left[\bar{\alpha}_i \hat{a}_i^\dagger\,, e^{\bar{\beta}_j \hat{a}_j^\dagger} e^{\beta_k \hat{a}_k}\right] \\
&= \left[\alpha_i \hat{a}_i\,, e^{\bar{\beta}_j \hat{a}_j^\dagger}\right] e^{\beta_k \hat{a}_k} + e^{\bar{\beta}_j \hat{a}_j^\dagger} \left[\bar{\alpha}_i \hat{a}_i^\dagger\,, e^{\beta_k \hat{a}_k}\right] \\
&= \left[\alpha_i \hat{a}_i\,, \bar{\beta}_l \hat{a}_l^\dagger\right] e^{\bar{\beta}_j \hat{a}_j^\dagger} e^{\beta_k \hat{a}_k} + e^{\bar{\beta}_j \hat{a}_j^\dagger} \left[\bar{\alpha}_i \hat{a}_i^\dagger\,, \beta_l \hat{a}_l\right] e^{\beta_k \hat{a}_k} \\
&= \left[\alpha_i \hat{a}_i + \bar{\alpha}_i \hat{a}_i^\dagger\,, \beta_l \hat{a}_l + \bar{\beta}_l \hat{a}_l^\dagger\right] \hat{N}\left(e^{\beta_j \hat{a}_j + \bar{\beta}_j \hat{a}_j^\dagger}\right)
\end{aligned}
$$

Določiti moramo samo še $F[J]$. V ta namen izberemo polje $\hat{\phi}(x)$ (do sedaj je bilo namreč poljubno) kot funkcijo prostega polja $\hat{\phi}_{in}(x)$. Predpis

$$
\begin{aligned}
\hat{\phi}(x) &= [U(x_0, -\infty)]^\dagger\, \hat{\phi}_{in}(x) U(x_0, -\infty) && (223) \\
U(x_0, y_0) &= \hat{T} \exp\left(i \int_{y_0}^{x_0} dz \mathcal{L}_{int}(\hat{\phi}(z))\right) && (224)
\end{aligned}
$$

omogoča nazorno interpretacijo spremembe baze: polje $\hat{\phi}(x)$, ki ga ne znamo zapisati takoj v času x_0, zarotiramo v čas $-\infty$, ko ga znamo zapisati in je kar prosto polje $\hat{\phi}_{in}(x)$. Preko te definicije poljuben časovno urejen produkt polj zapišemo kot (privzamemo $x_n^0 > x_{n-1}^0 > \ldots > x_1^0$)

$$
\begin{aligned}
&\hat{T}\hat{\phi}(x_1) \ldots \hat{\phi}(x_n) = \\
&\Big[U(x_n^0, -\infty)\Big]^\dagger \hat{\phi}_{in}(x_n) U(x_n^0, x_{n-1}^0) \hat{\phi}_{in}(x_{n-1}) U(x_{n-1}^0, x_{n-2}^0) \\
&\ldots U(x_2^0, x_1^0) \hat{\phi}_{in}(x_1) U(x_1^0, -\infty) \qquad (225)
\end{aligned}
$$

kjer smo uporabili Hermitskost interakcijskega dela Lagrangiana $\mathcal{L}_{int}^\dagger = \mathcal{L}_{int}$.

Zgornjo interpretacijo uporabimo pri zapisu vakuumskega stanja. Podobno kot je $\hat{\phi}(x)$ v $x_0 \to -\infty$ asimptotsko enako $\hat{\phi}_{in}(x)$, je v isti limiti tudi vakuumsko stanje

$$
|0\rangle = |0\rangle_{in} \qquad (226)
$$

enako vakuumskemu stanju $|0\rangle_{in}$ v primeru prostega polja ($\hat{a}_{in}(k)|0\rangle_{in} = 0$).

Podobno dobimo vakuumsko stanje $\langle 0|$ v času $t \to +\infty$ iz začetnega vakuumskega stanja ${}_{in}\langle 0|$ (to je vakuumsko stanje v primeru prostega polja, ${}_{in}\langle 0|\hat{a}_{in}^\dagger(k) = 0$) preko operatorja $U(+\infty, -\infty)$:

$$
\langle 0| = \frac{{}_{in}\langle 0|U(+\infty, -\infty)}{{}_{in}\langle 0|U(+\infty, -\infty)|0\rangle_{in}} \qquad (227)
$$

Ne sme nas presenetiti, da $\langle 0| \neq (|0\rangle)^\dagger$, saj sta stanji računani v različnih časih, eno v $-\infty$, drugo pa v $+\infty$, potem ko delujemo z interakcijo.

Odtod tudi vidimo, da je

$$\langle 0| = {}_{out}\langle 0| \tag{228}$$

in dobimo torej zanimivo reprezentacijo za S-matriko

$$\hat{S} = \frac{U(+\infty,-\infty)}{{}_{in}\langle 0|U(+\infty,-\infty)|0\rangle_{in}} \tag{229}$$

kar popolnoma sovpada z intepretacijo spremembe baze preko časovnega prenosa z matriko U. Normalizacijski faktor v imenovalcu desne strani enačbe (227) sledi enostavno iz zahteve

$${}_{in}\langle 0|\hat{S}|0\rangle_{in} = \langle 0|0\rangle = 1 \tag{230}$$

Drugače povedano, S matrika ne spremeni vakuuma, če je ta Lorentz invarianten, po domače prazen prostor.

Sedaj vzemimo vakuumsko pričakovano vrednost izraza (220), to je, pomnožimo z leve z ${}_{in}\langle 0|$ in z desne z $|0\rangle_{in}$. Levo stran enačbe (220) razvijemo po potencah $J(z)$ upoštevajoč definiciji (229) in (213)

$${}_{in}\langle 0|\hat{S}\hat{I}[J]|0\rangle_{in} = \sum_{i=0}^{n} \frac{i^n}{n!} J(x_1)\ldots J(x_n) \frac{{}_{in}\langle 0|U(+\infty,-\infty)\hat{T}\hat{\phi}(x_1)\ldots\hat{\phi}(x_n)|0\rangle_{in}}{{}_{in}\langle 0|U(+\infty,-\infty)|0\rangle_{in}} \tag{231}$$

Operator med vakuumskima stanjema v števcu desne strani lahko prepišemo podobno kot (225) za enak primer urejenosti

$$+\infty > x_n^0 > x_{n-1}^0 > \ldots > x_1^0 > -\infty \tag{232}$$

kot

$$\begin{aligned}
& U(+\infty,-\infty)\hat{T}\hat{\phi}(x_1)\ldots\hat{\phi}(x_n) \\
= \; & U(+\infty,x_n^0)\hat{\phi}_{in}(x_n)U(x_n^0,x_{n-1}^0)\hat{\phi}_{in}(x_{n-1})U(x_{n-1}^0,x_{n-2}^0) \\
& \ldots U(x_2^0,x_1^0)\hat{\phi}_{in}(x_1)U(x_1^0,-\infty) \\
= \; & \hat{T}\hat{\phi}_{in}(x_1)\ldots\hat{\phi}_{in}(x_n)\exp\left(i\int dz \mathcal{L}_{int}(\hat{\phi}_{in}(z))\right)
\end{aligned} \tag{233}$$

Končno je torej

$$ {}_{in}\langle 0|\hat{S}\hat{I}[J]|0\rangle_{in} = Z[J] \tag{234}$$

saj je v splošnem

$$ \frac{{}_{in}\langle 0|\hat{T}F[\hat{\phi}_{in}]e^{i\int \mathcal{L}_{int}(\hat{\phi}_{in})}|0\rangle_{in}}{{}_{in}\langle 0|\hat{T}e^{i\int \mathcal{L}_{int}(\hat{\phi}_{in})}|0\rangle_{in}} = \frac{\int \mathcal{D}\phi(x)F[\phi]e^{i\int(\mathcal{L}_0(\phi)+\mathcal{L}_{int}(\phi))}}{\int \mathcal{D}\phi(x)e^{i\int(\mathcal{L}_0(\phi)+\mathcal{L}_{int}(\phi))}} \tag{235}$$

kjer so na levi $\hat{\phi}_{in}(x)$ operatorji prostih polj, ki jih razvijamo kot ponavadi preko kreacijskih in anihilacijskih operatorjev (kanonična kvantizacija), na desni pa $\phi(x)$ navadne funkcije.

Desna stran enačbe (220) je pa kar enaka $F[J]$, saj velja za poljubno linearno kombinacijo kreacijskih in anihilacijskih operatorjev $\hat{B}$

$$ {}_{in}\langle 0|\hat{N}\left(e^{\hat{B}}\right)|0\rangle_{in} = 1 \tag{236}$$

Torej je

$$ F[J] = Z[J] \tag{237}$$

in končno

$$ \hat{S} = \hat{N}\left[\exp\left(i\int dz\,\hat{\phi}_{in}(z)\left(\partial_z^2+m^2\right)\frac{\delta}{\delta iJ(z)}\right)\right]Z[J]\bigg|_{J=0} \tag{238}$$

Odtod pa res ni težko priti do (192).

9.2 Vaje

1. Opiši Wickov teorem ter ga dokaži v primeru štirih skalarnih polj.

2. V znanem modelu ϕ^4 pokaži enakost (235) do reda λ v primeru 4-točkovne Greenove funkcije. Primerjaj posamezne člene v obeh postopkih.

9.3 Sipalni presek

Kot vemo že iz kvantne mehanike, je glavni podatek pri sipanju sipalni presek. Ko imamo amplitudo, se sipalni presek dobi podobno kot v KM. To dajmo na kratko ponoviti. Za poenostavit problem, obravnavajmo primer sipanja dveh skalarnih delcev v dva skalarna delca (posplošitev na končno stanje z več delci je direktna, primer fermionov ali umeritvenih bozonov pa bomo komentirali pozneje).

Kot smo izpeljali v prejšnjem poglavju, je amplituda za tak prehod

$$\langle p_3 p_4 | \hat{S} - \hat{I} | k_1 k_2 \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_3 - p_4) A(k_1, k_2, p_3, p_4) \tag{239}$$

Zečetni delci so v resnici valovni paketi, to so porazdelitve za različne gibalne količine z dokaj ostrim vrhom okoli p_1 oz. p_2 (taka je ponavadi eksperimentalna situacija). Začetno stanje je bolj točno opisano z

$$\int d\tilde{k}_1 \int d\tilde{k}_2 \, f_1(k_1) f_2(k_2) | k_1 k_2 \rangle \tag{240}$$

kjer smo uporabili krajšo oznako za Lorentzovo invariantno integracijsko mero ($\omega^2 - \overrightarrow{k}^2 = m^2$)

$$d\tilde{k} \equiv \frac{d^3 k}{(2\pi)^3 2\omega} \tag{241}$$

Kvadrat amplitude je tedaj

$$\begin{aligned} & \int d\tilde{k}_1 \int d\tilde{k}_2 \int d\tilde{q}_1 \int d\tilde{q}_2 f_1(k_1) f_1^*(q_1) f_2(k_2) f_2^*(q_2) \\ \times \quad & (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - p_3 - p_4)(2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_3 - p_4) \\ \times \quad & A(k_1, k_2, p_3, p_4) A^*(q_1, q_2, p_3, p_4) \end{aligned}$$

Drugo δ-funkcijo v (242) prepišemo kot (upoštevajoč prvo δ-funkcijo)

$$\begin{aligned} (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - p_3 - p_4) &= (2\pi)^4 \delta^4(q_1 + q_2 - k_1 - k_2) \\ &= \int d^4 x e^{i(q_1 + q_2 - k_1 - k_2)x} \end{aligned} \tag{242}$$

upoštevamo, da imajo valovni paketi izrazit vrh pri p_1 oz. p_2, tako da lahko zapišemo

$$(2\pi)^4\delta^4(k_1+k_2-p_3-p_4)A(k_1,k_2,p_3,p_4)A^*(q_1,q_2,p_3,p_4)$$
$$\approx (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)\left|A(p_1,p_2,p_3,p_4)\right|^2 \tag{243}$$

ter definiramo Fourierovo transformacijo porazdelitev $f_i(k_i)$

$$\tilde{f}_i(x) = \int d\tilde{k}_i f_i(k_i) \tag{244}$$

tako da je kvadrat amplitude zdaj (v preostali δ-funkcij smo že prej k_i zamenjali s p_i)

$$\int d^4x \left|\tilde{f}_1(x)\right|^2 \left|\tilde{f}_2(x)\right|^2 (2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4)\left|A(p_1,p_2,p_3,p_4)\right|^2 \tag{245}$$

V končnem stanju ne iščemo stanj z neskončno točnimi gibalnimi količinami $\overrightarrow{p}_{3,4}$, pač pa vsa stanja z gibalnimi količinami v območju med $\overrightarrow{p}_{3,4}$ in $\overrightarrow{p}_{3,4}+d\overrightarrow{p}_{3,4}$, torej moramo zgornji izraz še pomnožiti z Lorentz invariantnim številom takih stanj

$$d\tilde{p}_3 d\tilde{p}_4 \tag{246}$$

Skupno je torej verjetnost prehoda na enoto volumna in časa

$$\frac{dW}{VT} = \left|\tilde{f}_1(x)\right|^2 \left|\tilde{f}_2(x)\right|^2 \left|A(p_1,p_2,p_3,p_4)\right|^2 d\,Lips_2(p_1+p_2;p_3,p_4) \tag{247}$$

kjer je Lorentz invarianten fazni prostor (phase space) za n delce s skupno gibalno količino P v splošnem definiran kot

$$d\,Lips_n(P;p_1,\ldots,p_n) = (2\pi)^4\delta^4(P-\sum_{i=1}^{n}p_i)\prod_{j=1}^{n}\frac{d^3p_j}{(2\pi)^3 2\omega_j} \tag{248}$$

Sipalni presek $d\sigma$ je definiran preko

$$\frac{dW}{VT} = d\sigma j\rho \tag{249}$$

kjer je gostota tarče (damo se v laboratorijski sistem, v katere mirujejo delci 1-tarča)

$$\rho = \left|\tilde{f}_1(x)\right|^2 2m \tag{250}$$

(upoštevali smo standardno normalizacijo stanj na $2p_0$), fluks pa

$$j = \left|\tilde{f}_1(x)\right|^2 2|\overrightarrow{p}_2| \tag{251}$$

V splošnem sistemu lahko navidezno neinvarianten produkt $m|\overrightarrow{p}_2|$ zapišemo na Lorentzov invarianten način kot

$$m|\overrightarrow{p}_2| = \left[(p_1p_2)^2 - p_1^2p_2^2\right]^{1/2} \tag{252}$$

Končno je diferencialni sipalni presek enak

$$d\sigma(p_1p_2 \to p_3p_4) = \frac{|A(p_1,p_2,p_3,p_4)|^2}{4\left[(p_1p_2)^2 - p_1^2p_2^2\right]^{1/2}} d\,Lips_2(p_1+p_2;p_3,p_4) \tag{253}$$

Ta količina je Lorentzov skalar, neodvisen od izbire sistema, v katerem merimo.

Posplošitev za sipanje dveh delcev v n delce je sedaj logična in neproblematična:

$$d\sigma(p_1p_2 \to p_3\dots p_n) = \frac{|A(p_1,p_2,p_3,\dots,p_n)|^2}{4\left[(p_1p_2)^2 - p_1^2p_2^2\right]^{1/2}} d\,Lips_n(p_1+p_2;p_3,\dots,p_n) \tag{254}$$

9.4 Razpadna širina

Ponavadi se ne zanimamo za možnost, da se tri ali več začetnih delcev siplje, saj je verjetnost, da bi se trije delci srečali zanemarljivo majhna. Imamo pa lahko drugačno možnost, to je da en sam začeten delec razpade v več končnih. V tem primeru ne govorimo o sipalnem preseku, pač pa o razpadni širini. Ta se, kot dobro vemo, spremeni v različnih sistemih (delci, ki letijo, živijo za mirujočega opazovalca dlje, kot enaki delci, ki mirujejo). Kar se ponavadi omenja je lastna razpadna širina, to je za mirujoči delec. Zgornjo enačbo za presek lahko za ta primer le rahlo spremenimo (izpustimo fluks) in dobimo

$$d\Gamma(P \to p_1 \dots p_n) = \frac{|A(P, p_1, \dots, p_n)|^2}{2m} d\, Lips_n(P; p_1, \dots, p_n) \tag{255}$$

kjer je v sistemu razpadajočega delca seveda $P = (m, \overrightarrow{0})$.

10 Lekcija 10 (45 min): Pričakovana vrednost polja

10.1 Negativen m^2

Do sedaj smo vedno privzeli, da je m^2 v (87) pozitivno število. To je bilo tudi smiselno, saj je enačba gibanja, ki odtod izvira KG, katere rešitve so periodične le v takem primeru. Če pa imamo še interakcijo, to ni več res. Negativen m^2 v tem primeru nakazuje na nestabilnost (eksponentno rastoče ali padajoče funkcije), ki je posledica dejstva, da smo rešitev iskali in razvijali okoli maksimuma potencijala namesto okoli minimuma. Če namreč pišemo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \tag{256}$$

potem je gostota Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2}\Pi^2 + \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 + V(\phi) \tag{257}$$

$$\Pi \equiv \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi\ )} = \partial_0\phi \tag{258}$$

Prva dva člena sta pozitivno definitna, torej ima sistem minimalno energijo za konstantne rešitve enačbe

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial\phi} = 0 \tag{259}$$

Kot primer vzamemo že znan primer ϕ^4

$$V(\phi) = \frac{m^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{260}$$

Enačba gibanja

$$m^2\phi + \frac{\lambda}{6}\phi^3 = 0 \tag{261}$$

ima eno samo rešitev za $m^2 > 0$

$$\phi_0 = 0 \tag{262}$$

ima pa tri rešitve v primeru $m^2 < 0$

$$\phi_0 = 0 \ , \ \ \phi_\pm = \pm\sqrt{\frac{-6m^2}{\lambda}} \tag{263}$$

Prva ustreza maksimumu, drugi dve pa minimuma, kar lahko preverimo z izračunom drugega odvoda potencijala

$$\frac{\partial^2 V(\phi)}{\partial \phi^2} = m^2 + \frac{\lambda}{2}\phi^2 \tag{264}$$

v točkah ekstremov (263):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}(\phi_0) = m^2 < 0 \ , \ \ \frac{\partial^2 V}{\partial \phi^2}(\phi_\pm) = -2m^2 > 0 \tag{265}$$

Pravi postopek je sedaj razviti okoli pravega minimuma (vakuuma), ki naj bo recimo ϕ_+:

$$\phi(x) = \phi_+ + \varphi(x) \tag{266}$$

To vstavimo v začeten Lagrangian in dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - V(\phi_+ + \varphi) \\ &= \frac{1}{2}(\partial\varphi)^2 - \frac{1}{2}m_\varphi^2\varphi^2 - \frac{\mu}{3!}\varphi^3 - \frac{\lambda}{4!}\varphi^4 \end{aligned} \tag{267}$$

kjer so

$$m_\varphi^2 = -2m^2 \ , \ \ \mu = \lambda\phi_+ \tag{268}$$

Očitno je nova masa m_φ^2 pozitivna. Šele sedaj lahko računamo Greenove funkcije, ali drugače povedano, računamo Feynmanove diagrame. ϕ je torej konstanta (rešitev klasičnih enačb gibanja) plus kvantni popravki (φ-kreacijski in anihilacijski operatorji, itd).

Dobro si je zapomniti tudi, da je imel začeten Lagrangian diskretno simetrijo

$$\phi \to -\phi \tag{269}$$

V primeru negativnega m^2, si moramo izbrati vakuum, ϕ_+ ali ϕ_-. Tedaj se ta simetrija poruši, pravimo, da smo spontano zlomili simetrijo (enačbe gibanja zlomijo simetrijo Lagrangiana). To označimo z neničelno vrednostjo pričakovane vrednosti polja (vakuumska pričakovana vrednost polja $\langle\phi\rangle$ je v tem primeru parameter reda)

$$\langle\phi\rangle = \phi_+ \neq 0 \tag{270}$$

Feynmanova pravila, računanje Greenovih funkcij itd. lahko uporabljamo le za polja z ničelno vakuumsko pričakovano vrednostjo (v našem prejšnjem primeru je $\langle\varphi\rangle = 0$). Recept je torej sledeči: rešiti je treba najprej enačbe gibanja, razviti okoli vakuuma, ter šele nato uporabiti celotno mašinerijo Feynmana itd.

10.2 Vaje

1. Vzemi takozvani σ model ($\mu^2 > 0$)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\overrightarrow{\phi})^2 + \frac{\mu^2}{2}\overrightarrow{\phi}^2 - \frac{\lambda}{4}\overrightarrow{\phi}^4 \tag{271}$$

   ki je invarianten na O(4) rotacije, $\overrightarrow{\phi} = (\phi_1, \phi_2, \phi_3, \phi_4)$. Dobi minimum potencijala (uporabi simetrijo O(4), da je samo $\langle\phi_4\rangle \neq 0$). Razvij Lagrangian po novih poljih ($\phi_{1,2,3}$ ostanejo enake, $\phi_4 \to \langle\phi_4\rangle + \sigma$). Kakšne so mase delcev? Kakšna je preostala simetrija sistema po zlomitvi simetrije O(4)?

2. Izpelji Feynmanova pravila.

3. V najnižjem redu λ izračunaj amplitude

$$\begin{aligned} \sigma\sigma &\to \phi_i\phi_j \\ \phi_i\phi_j &\to \phi_k\phi_l \end{aligned}$$

4. Nakaži, kako bi izračunal sipalni presek za enega izmed zgornjih procesov (ni treba integrirati po kotih).

10.3 Nambu-Goldstonov teorem

V zgornjem primeru smo spontano zlomili diskretno simetrijo Z_2 (269). To je grupa, ki ima samo dva elementa, $+1$ in -1. Zato smo tudi imeli dva možna vakuuma, ϕ_+ in ϕ_- v primeru negativnega m^2. Stvar lahko posplošimo na več diskretne grupe in celo na zvezne, to je Lie-jeve grupe. Prav te nas bodo zanimale zdaj. En tak primer smo videli v σ-modelu. Simetrijo Lagrangiana O(4) je neničelna vakuumska pričakovana vrednost vektorja spontano zlomila na O(3). To si ni težko predstavljati: neničelni vektor kaže v eno določeno (čeprav poljubno) smer v štiri-dimenzijonalnem prostoru O(4); prostor, ki je ortogonalen nanj je seveda tri-dimenzijonalen prostor O(3), ki je preostala simetrija Lagrangiana po zlomitvi originalne simetrije O(4). Število začetnih generatorjev 6 se je zreduciralo na končnih 3. Razlika $6 - 3 = 3$ nam pove število zlomljenih generatorjev.

Nambu-Goldstonov teorem pove, da je število brezmasnih delcev (takoimenovanih Nambu-Goldstonovih bozonv) enako število zlomljenih generatorjev.

To smo tudi preverili v primeru σ modela, velja pa čisto splošno (pod pogojem, da je vakuum Lorentz invarianten). Poglejmo še en primer, adjungirana upodobitev v SU(2). Vzemimo iz enostavnosti samo člene, ki so maksimalno četrte potence polja. Najbolj splošen potencijal je

$$V = -\mu^2 Tr\Sigma^2 + \lambda \left(Tr\Sigma^2\right)^2 \tag{272}$$

kjer je adjungirana upodobitev SU(2) (τ_i so Paulijeve matrike)

$$\Sigma = \phi_i \tau_i = \begin{pmatrix} \phi_3 & \phi_1 - i\phi_2 \\ \phi_i + i\phi_2 & -\phi_3 \end{pmatrix} \tag{273}$$

Seveda je sled kvadrata

$$Tr\Sigma^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^3 = \overrightarrow{\phi}^2 \tag{274}$$

Drugače povedano, fundamentalna upodobitev O(3) je isto kot adjungirana upodobitev SU(2). Edina invarianta v primeru SU(2) je seveda sled kvadrata, v primeru SO(3) pa velikost vektorja.

Minimizacija potencijala gre po znanem receptu. Zaradi simetrije si lahko mirne duše izberemo smer, v katero kaže vakuumska pričakovana vrednost $\langle \phi_3 \rangle \equiv v$

$$\langle \overrightarrow{\phi} \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix} \tag{275}$$

oz., kar je isto,

$$\langle \Sigma \rangle = \begin{pmatrix} v & 0 \\ 0 & -v \end{pmatrix} \tag{276}$$

Kakorkoli že, tole vstavimo v (272) in dobimo

$$V = -\mu^2 v^2 + \lambda v^4 \tag{277}$$

Enačba gibanja je zadoščena, če minimiziramo potencijal

$$\frac{dV}{dv} = 0 \tag{278}$$

Za pozitivne μ^2 je minimum v

$$v = \sqrt{\frac{\mu^2}{2\lambda}} \tag{279}$$

Sedaj pa razvijemo polje okoli pričakovane vrednosti

$$\overrightarrow{\phi} = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ v + \sigma \end{pmatrix} \tag{280}$$

Ob upoštevanju (279) dobimo

$$V = \text{ konst. } + \mu^2 \sigma^2 + \ \mathit{interakcija} \tag{281}$$

kjer predstavlja interakcija trilinearne in štirilinearne člene v poljih σ, $\phi_{1,2}$. Masa je za realen skalarni delec ϕ definiran kot koeficijent pred $\phi^2/2$ v potencijalu ($-\phi^2/2$ v Lagrangianu), oz. kot drugi odvod potencijala v minimumu. Torej imamo en sam masiven delec, σ, z maso $2\mu^2$, ter dva brezmasna delca

$\phi_{1,2}$. To sovpada z Nambu-Goldstonovim teoremom. Fundamentalna upodobitev (vektor) je zlomila simetrijo O(3) na simetrijo O(2). Število zlomljenih generatorjev je enako generatorjem na začetku (3) minus generatorjem na koncu (1), torej enako 2. To je pa tudi enako številu brezmasnih delcev.

11 Lekcija 11 (1h 30 min) Kvantna elektrodinamika (QED)

11.1 Lagrangian

To je teorija polja, ki opisuje elektron in foton, to je elektromagnetno interakcijo nabitega fermiona. Lagrangian, ki to opisuje, smo že zapisali,

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}\, i\gamma^{\mu}\left(\partial_{\mu} - ieA_{\mu}\right)\psi - m\bar{\psi}\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \tag{282}$$

kjer je

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu}A_{\nu} - \partial_{\nu}A_{\mu} \tag{283}$$

in ga dobimo preko zahteve o invarianci na lokalne (krajevne in časovno odvisne) transformacije faze U(1):

$$\psi \to e^{i\alpha(x)}\psi \ , \ \ A_{\mu} \to A_{\mu} + \frac{1}{e}\partial_{\mu}\alpha(x) \tag{284}$$

11.2 Feynmanova pravila

Feynmanova pravila lahko izpeljemo podobno kot za primere s skalarnimi polji.

11.2.1 Propagatorji

Najprej se omejimo na propagatorje. Te dobimo v p prostoru nekako kot inverz kvadratnega dela Lagrangiana. V primeru realnega skalarja je i krat akcija v eksponentu popotnega integrala bila

$$iS[\phi] \ = \ i\int d^4z\mathcal{L}(\phi(z), \partial\phi(z)) = i\int d^4z\frac{1}{2}\left[(\partial\phi)^2 - m^2\phi^2\right] + \dots$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}\int d^4z\,\phi(z)\,i(\partial^2+m^2)\phi(z) \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\,\tilde{\phi}(-p)\,\Big[(-i)(p^2-m^2)\Big]\,\tilde{\phi}(p) \qquad (285)
\end{aligned}
$$

kjer smo v drugo vrstico prišli z integracijo per partes, v tretjo pa preko Fourierove transformacije

$$
\phi(z) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{\phi}(p)e^{-ipz} \qquad (286)
$$

Propagator realnega skalarnega polja v p prostoru je definiran kot inverz oglatega oklepaja v (285), torej

$$
\tilde{G}_S(p) = \frac{i}{p^2-m^2} \qquad (287)
$$

Če bi imeli opravka s kompleksnim skalarnim poljem, bi ne bilo polovičke že na začetku, in tudi ne na koncu, rezultat bi bil pa enak kot (287).

Čisto podobno sklepamo pri fermionih ter dobimo

$$
\tilde{G}_F(p) = \frac{i}{\not{p}-m} \qquad (288)
$$

kjer smo označili

$$
\not{p} \equiv \gamma^\mu p_\mu \qquad (289)
$$

Do težave pride pa pri istem postopku za vektorske delce. V tem primeru dobimo po integracijah per partes ter prehodu v p prostor

$$
i\int dz\left(-\frac{1}{4}\right)F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{A}^\mu(-p)\left[i\left(p^2g_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu\right)\right]\tilde{A}^\nu(p) \qquad (290)
$$

Inverz oglatega oklepaja pa ne obstaja, saj ima matrika $p^2g_{\mu\nu}-p_\mu p_\nu$ lastni vektor p^ν z lastno vrednostjo nič!

Čeprav nas to preseneča, kakšno težavo bi si pa le morali pričakovati, saj nismo še izbrali umeritve. Zato takoj popravimo napako in ne da bi zlomili Lorentzove simetrije dodajmo člen (92):

$$
\mathcal{L}_{gf} = -\frac{1}{2\xi}(\partial A)^2 \qquad (291)
$$

To lahko še boljše razumemo s popotnim integralom. Če ne dodamo člena, ki zlomi umeritveno invarianco, imamo namreč integral

$$\int \mathcal{D}A_\mu e^{iS_{inv}[A]} \tag{292}$$

kjer je S_{inv} invarianten del akcije. To bi bilo nekako tako, kot da bi integrirali periodično funkcijo kota α, npr. $f(\cos(\alpha))$, od $-\infty$ do $+\infty$ namesto od 0 do 2π. Drugače povedano, integrand v (292) ima preveč simetrije. Integrirati moramo samo po "eni periodi", zato izberemo umeritev, to je zgornji integral zamenjamo z npr.

$$\int \mathcal{D}A_\mu \delta(\partial A) e^{iS_{inv}[A]} \tag{293}$$

Ponovimo zgornji račun

$$\begin{aligned} & i\int dz \left[\left(-\frac{1}{4}\right) F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi}(\partial A)^2\right] \\ = & -\frac{1}{2}\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4}\tilde{A}^\mu(-p)\left[i\left(p^2 g_{\mu\nu} - (1-1/\xi)p_\mu p_\nu\right)\right]\tilde{A}^\nu(p) \end{aligned} \tag{294}$$

Inverz nastavimo na obliko

$$\tilde{G}_V^{\nu\sigma}(p) = A(p^2)g^{\nu\sigma} + B(p^2)p^\nu p^\sigma \tag{295}$$

ter seveda zahtevamo, da

$$\left[i\left(p^2 g_{\mu\nu} - (1-1/\xi)\, p_\mu p_\nu\right)\right]\tilde{G}_V^{\nu\sigma}(p) = g_\mu{}^\sigma \tag{296}$$

Končna rešitev nam da

$$G_V^{\nu\sigma}(p) = \frac{i}{p^2}\left(-g^{\nu\sigma} + (1-\xi)\frac{p^\nu p^\sigma}{p^2}\right) \tag{297}$$

Posebno uporabna in enostavna izbira umeritve je 't Hooft-Feynmanova umeritev $\xi = 1$, ki nam da zelo poenostavljen propagator za foton

$$G_V^{\nu\sigma}(p) = \frac{-ig^{\nu\sigma}}{p^2} \tag{298}$$

Ta se zelo dosti uporablja, čeprav je splošnejša izbira (297) včasih koristna, saj se mora parameter ξ na koncu računa krajšati (fizikalna količina ne more biti odvisna od izbire umeritve), in torej predstavlja splošen račun netrivialen test.

11.2.2 Vozlišča

Naslednja stvar, ki jo moramo sedaj določiti so Feynmanova pravila za vozlišče. Opravka imamo samo z enim takim verteksom, saj imamo en sam interakcijski člen v Lagrangianu

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\not{A}\psi \tag{299}$$

Feynmanovo pravilo za ta verteks znamo, kako izračunati. Zanima nas diagram, v katerem komponenta ξ Diracovega fermiona z gibalno količino p_1 izseva komponento η Diracovega fermiona z gibalno količino p_2 ter komponento μ fotona z gibalno količino q. Izračunamo torej Greenovo funkcijo v p prostoru

$$\int dxdydz\, G\left[\psi_\xi(x)\bar{\psi}_\eta(y)A_\mu(z)\right] e^{-ip_1x+ip_2y+iqz} \tag{300}$$

nato pa izpustimo vse tri zunanje propagatorje ter delta funkcijo. Rezultat:

$$ie(\gamma_\mu)_{\xi\eta} \tag{301}$$

11.2.3 Fermionske zanke

Pri upoštevanju Wickovega teorema naletimo večkrat na preskakovanje fermionskih polj. Ker le-ta antikomutirajo (z razliko od bozonskih polj, ki komutirajo), dobimo lahko pri taki operacij ekstra faktor (-1). Poglejmo bolj natančno, kdaj pride do tega. Dovolj je pogledati le dva možna primera v katera se zreducirajo vsi diagrami. V prvem sta fermionski polji zunanji, v drugem notranji. Zaradi ohranitve fermionske linije (te so vedno nepretrgane, kar lahko vidimo po tem, da nastopa fermionsko polje v Lagrangianu zaradi Lorentzove simetrije vedno v kvadratu) nimamo tretjega primera.

V prvem primeru zgleda del Greenove funkcije ki nas zanima torej

$$\langle 0|\hat{T}\psi_\xi(x)\bar{\psi}_\eta(y)\prod_{i=1}^{N} i\int dz_i e\bar{\psi}\not{A}\psi(z_i)|0\rangle \tag{302}$$

kjer so vsi vmesni verteksi le taki, ki so povezani preko fermionske linije. Ni težko si predstavljati, da tukaj ne dobimo nobenega minusa.

Drugi primer pa je tak, ko sta dve vozlišči notranji. Gledamo torej zaprto zanko

$$\langle 0|\hat{T}\prod_{i=1}^{N} i\int dz_i e\bar{\psi}\not{A}\psi(z_i)|0\rangle \tag{303}$$

Jasno je tukaj, da dobimo ravno ekstra faktor (-1).

Da ponovimo: za vsako zaključeno fermionsko zanko dobimo ekstra faktor (-1). Seveda mora biti zanka v celoti fermionska, od začetka do konca.

11.2.4 Zunanje noge

Kot zadnje moramo še povedati, kaj pripišemo zunanjim delcem. To je nekaj novega, kar še nismo srečali v primeru realnega skalarnega polja. Pa poskusimo uganiti. Seveda tega nimamo na nivoju Greenove funkcije, pač pa v primeru S-matrike, ki smo jo zapisali v (238) in moramo sedaj posplošiti za primer vektorskega delca spina 1 A_μ (fotona) in fermionskega delca spina 1/2 (elektrona).

V primeru realnega skalarnega delca smo razvili zunanje prosto asimptotsko polje (ki zadošča KG enačbi) s kreacijskimi in anihilacijskimi operatorji kot ($p_0 = \sqrt{m^2 + \overrightarrow{p}^2}$ in m masa skalarnega polja)

$$\phi_{in}(x) = \int \frac{d^3\overrightarrow{p}}{(2\pi)^3 2p_0}\left(a(p)e^{-ipx} + a^\dagger(p)e^{ipx}\right) \tag{304}$$

Podobno naredimo z vektorskim poljem, ki zadošča Maxwellovim enačbam v praznem prostoru ($p_0 = |\overrightarrow{p}|$, saj je foton brezmasen)

$$A^\mu_{in}(x) = \sum_{\lambda=1}^{2}\int \frac{d^3\overrightarrow{p}}{(2\pi)^3 2p_0}\left(a_\lambda(p)\epsilon^\mu_\lambda(p)e^{-ipx} + a^\dagger_\lambda(p)\epsilon^{*\mu}_\lambda e^{ipx}\right) \tag{305}$$

kjer λ označuje eno izmed dveh možnih transverzalnih polarizacij fotona, $\epsilon_\lambda(p)$ pa je polarizacijski vektor, ki zadošča

$$p_\mu \epsilon^\mu_\lambda(p) = 0 \tag{306}$$

Za prosto fermionsko polje, ki zadošča Diracovi enačbi, pa dobimo (zopet velja ista zveza med energijo p_0 in gibalno količino $\overrightarrow{p}$ kot v primeru skalarnega polja, m je pa zdaj seveda masa fermiona)

$$\psi_{in}(x) = \sum_{s=1}^{2}\int \frac{d^3\overrightarrow{p}}{(2\pi)^3 2p_0}\left(b_s(p)u_s(p)e^{-ipx} + d^\dagger_s(p)v_s(p)e^{ipx}\right) \tag{307}$$

kjer s označuje eno izmed dveh možnih spinov fermiona, $b_s(p)$ in $d_s^\dagger(p)$ pa sta anihilacijski operator za fermion (elektron) oz. kreacijski operator za antifermion (pozitron). Podobno je

$$\bar{\psi}_{in}(x) = \sum_{s=1}^{2} \int \frac{d^3\overrightarrow{p}}{(2\pi)^3 2p_0} \left(d_s(p)\bar{v}_s(p)e^{-ipx} + b_s^\dagger(p)\bar{u}_s(p)e^{ipx} \right) \tag{308}$$

Da odkrijemo, kakšne faktorje dobimo v primeru zunanjih fermionov ali vektorskih bozonov, se moramo moramo spomniti, kako pridemo v primeru skalarnih polj iz definicije S-matrike (238) do amplitude (192).

Vzemimo primer dveh delcev v dva delca, z gib. kol. p_1 in p_2 na začetku, ter q_1 in q_2 na koncu. Amplituda je po definiciji

$$\begin{aligned} A(p_1, p_2 \to q_1, q_2) &\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - q_1 - q_2) = \langle q_1, q_2 | \hat{S} - \hat{I} | p_1, p_2 \rangle \\ &= \langle 0 | \frac{1}{2!} a(q_1) a(q_2) \left(\hat{S} - \hat{I} \right) \frac{1}{2!} a^\dagger(p_1) a^\dagger(p_2) | 0 \rangle \end{aligned} \tag{309}$$

del sipalne matrike, ki nas zanima je pa seveda tisti s ta pravim številom kreacijskih in anihilacijskih operatorjev:

$$\hat{S} - \hat{I} \to \hat{N} \left[\prod_{i=1}^{4} \int dz_i \hat{\phi}_{in}(z_i) i \left(\partial_{z_i}^2 + m^2 \right) \frac{\delta}{\delta i J(z_i)} \right] Z[J] \Bigg|_{J=0} \tag{310}$$

$$\begin{aligned} &= \int dz_1 \ldots \int dz_4 \\ &\times \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2k_{01}} a^\dagger(k_1) e^{-ik_1z_1} \int \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2k_{02}} a^\dagger(k_2) e^{-ik_2z_2} \\ &\times \int \frac{d^3k_3}{(2\pi)^3 2k_{03}} a(k_3) e^{+ik_3z_3} \int \frac{d^3k_4}{(2\pi)^3 2k_{04}} a^\dagger(k_4) e^{+ik_4z_4} \\ &\times i \left(\partial_{z_1}^2 + m^2 \right) \ldots i \left(\partial_{z_4}^2 + m^2 \right) G(z_1, z_2, z_3, z_4) \end{aligned} \tag{311}$$

$$\begin{aligned} &= \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2k_{01}} \ldots \int \frac{d^3k_1}{(2\pi)^3 2k_{04}} a^\dagger(k_1) a^\dagger(k_2) a(k_3) a(k_4) \\ &\times (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + k_2 - k_3 - k_4) \tilde{G}_{amp}(k_1, k_2, k_3, k_4) \end{aligned} \tag{312}$$

kjer *amp* pomeni amputirana (to je Greenova funkcija brez zunanjih nog). Odtod jasno sledi, da

$$A(p_1p_2 \to p_3p_4) = \frac{1}{i}\tilde{G}_{amp}(p_1,p_2,p_3,p_4)(2\pi)^4\delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4) \tag{313}$$

kar smo že vedeli.

Zgornja izpeljava nam pomaga pri posplošitvi na zunanje delce s spinom 1/2 ali 1. Seveda se v takih primerih posploši tudi oblika S matrike (KG operator moramo npr. zamenjati z Diracovim, itd.), vendar je jasno, da dobimo naslednje ekstra faktorje, če le primerjamo (304) s (305), (307) in (308).

Najprej primer zunanjega fotona z gib.kol. q in polarizacijo λ. Če nastopa v začetnem stanju, pomnožimo amplitudo z

$$\epsilon^{\mu}_{\lambda}(q) \tag{314}$$

če pa ga najdemo v končnem stanju, pomnožimo s kompleksno konjugirano vrednostjo

$$\epsilon^{\mu *}_{\lambda}(q) \tag{315}$$

Za fermion z gibalno količino p in spinom s pa sledeča pravila:

prihajajoči delec:

$$u_s(p) \tag{316}$$

prihajajoči antidelec:

$$\bar{v}_s(p) \tag{317}$$

odhajajoči delec:

$$\bar{u}_s(p) \tag{318}$$

odhajajoči antidelec:

$$v_s(p) \tag{319}$$

Vsaka fermionska linija v Feynmanove grafu ima puščico, ki kaže v primeru delcev v isto smer kot gibalna količina (v smeri od začetnega stanja proti končnemu stanju), v primeru antidelcev pa v obratno smer. Držimo se pravila, da gremo pri Feynmanovih grafih vedno v nasprotno smer puščice (ki označuje tok fermionskega števila): začnemo najprej z odhajajočim delcem ($\bar{u}_s(p)$) ali prihajajočim antidelcem ($\bar{v}_s(p)$), končamo pa s prihajajočim delcem ($u_s(p)$) ali odhajajočim antidelcem ($v_s(p)$). Tako kot zahteva Lorentzova invarianca, imamo torej vedno na levi spinorje s prečno, na desni pa brez.

11.2.5 Obnova Feynmanovih pravil za QED

Na kratko ponovimo pravila:

- fermionski propagator

$$\left(\frac{i}{\not{p} - m}\right)_{\xi\eta}$$

- fotonski propagator (kovarijantna umeritev)

$$\frac{i}{p^2}\left(-g^{\mu\nu} + (1-\xi)\frac{p^\mu p^\nu}{p^2}\right)$$

- vozlišče

$$ie(\gamma_\mu)_{\xi\eta}$$

- faktor (-1) za vsako zaključeno fermionsko zanko
- prihajajoči (odhajajoči) foton:

$$\epsilon^\mu_\lambda(q) \quad (\epsilon^{\mu *}_\lambda(q))$$

- prihajajoči (odhajajoči) elektron:

$$u_s(p) \quad (\bar{u}_s(p))$$

- prihajajoči (odhajajoči) pozitron:

$$\bar{v}_s(p) \quad (v_s(p))$$

11.3 Vaje

1. Izračunaj amplitudo pri Comptonskem sipanju $e\gamma \to e\gamma$.

2. Preveri, da je amplituda enaka nič, če zamenjamo $\epsilon_\mu(k) \to k_\mu$.

3. Izračunaj sipalni presek, zopet izpovpreči začeten spin in polarizacijo, ter seštej končne. Zgornjo lastnost amplitude ob $\epsilon_\mu(k) \to k_\mu$ uporabi za dokaz, da zamenjava

$$\sum_\lambda \epsilon_\lambda^\mu \epsilon_\lambda^{\nu *} \to -g^{\mu\nu}$$

   da pravi rezultat.

4. Preveri, da v limiti $\omega \to 0$ (vhodna energija fotona) dobiš Thompsonov presek ($\alpha \equiv e^2/(4\pi)$)

$$\sigma = \frac{8\pi\alpha^2}{3m^2}$$

11.4 Ward-Takahashijeve enačbe

Originalen Lagrangian je invarianten na umeritveno transformacijo, nuja po izbiri umeritve pa to pokvari. Seveda pa fizikalni rezultati ne smejo biti odvisne od izbire umeritve (α), ker je to nekaj takega kot izbira baze oz. koordinat. Zaradi te netrivialne zahteve Greenove funkcije zadoščajo posebnim enačbam, ki jih imenujemo identitete Ward-Takahashija. Čeprav so te identitete avtomatične, dovolj je namreč pravilno uporabljati Feynmanova pravila pri izračunu Greenovih funkcij, so kljub vsemu koristne, saj predstavljajo možen test računa.

Pa poglejmo, kako te enačbe zgledajo. Izpeljemo jih lahko kar iz definicije generatorskega funkcionala. V primeru QED tega sploh nismo zapisali, saj smo Feynmanova pravila izpeljali kar brez tega. Pa dajmo ga zdaj.

$$Z\left[J_\mu, \eta, \bar{\eta}\right] = \frac{1}{N}\int \mathcal{D}A_\mu \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \exp\left[i\int dz \left(\mathcal{L}(A, \psi, \bar{\psi}) + J^\mu A_\mu + \bar{\psi}\eta + \bar{\eta}\psi\right)\right] \tag{320}$$

kjer se Lagrangian deli na umeritveno invarianten del ter del, ki eksplicitno lomi invarianco

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{inv} - \frac{1}{2\xi}\left(\partial A\right)^2 \tag{321}$$

N pa poskrbi, da je funkcional pravilno normiran, $Z[0,0,0] = 1$.

Izvori J_μ so navadna posplošitev izvora v prejšnjih primerih skalarnega realnega polja, le da jih je sedaj 4 namesto en sam. Besedico več zaslužijo fermionski izvori η in $\bar{\eta}$. Vsak izmed njiju ima tudi po 4 (Diracove) komponente, posebej pa je potrebno biti pozorni na njihove antikomutacijske lastnosti. Količine η, $\bar{\eta}$, ψ, $\bar{\psi}$ niso sicer operatorji, saj uporabljamo popotni integral, pač pa Grassmanova števila, ki med seboj antikomutirajo. Tako je npr.

$$\frac{\delta}{\delta\bar{\eta}(x)}\int dz\bar{\eta}(z)\psi(z) = \psi(x) \tag{322}$$

kot bi pričakovali tudi v bozonskem primeru, medtem ko dobimo dodaten minus za

$$\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\int dz\bar{\psi}(z)\eta(z) = -\bar{\psi}(x) \tag{323}$$

ker je operator odvoda (Grassman) moral mimo Grassmana $\bar{\psi}$.

V generatorskemu funkcionalu (320) transformiramo vsa polja

$$A_\mu \;\rightarrow\; A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha \tag{324}$$

$$\psi \;\rightarrow\; \psi' = e^{i\alpha}\psi \tag{325}$$

$$\bar{\psi} \;\rightarrow\; \bar{\psi}' = \bar{\psi}e^{-i\alpha} \tag{326}$$

ter vse razvijemo do reda α. Najprej se integrand v eksponentu spremeni za

$$-\frac{1}{e\xi}(\partial A)\partial^2\alpha + J^\mu\frac{1}{e}\partial_\mu\alpha - i\alpha\bar{\psi}\eta + i\alpha\bar{\eta}\psi \tag{327}$$

nato pa po večkratnem integriranju per partes in po razvoju eksponenta dobimo

$$\int\mathcal{D}A\mathcal{D}\psi\mathcal{D}\bar{\psi}\left(-\frac{1}{\xi}\partial^2\partial A - \partial J - ie\bar{\psi}\eta + ie\bar{\eta}\psi\right)e^{i\int dz\left(\mathcal{L}(A,\psi,\bar{\psi})+JA+\bar{\psi}\eta+\bar{\eta}\psi\right)} = 0 \tag{328}$$

Z znanim trikom zamenjamo polja v integrandu s funkcionalnimi odvodi po izvorih ter upoštevajoč Grassmanove posebnosti (322)- (323) sledi

$$-\frac{1}{\xi}\partial_x^2\partial_x^\mu \frac{\delta Z}{\delta i J^\mu(x)} - \partial^\mu J_\mu(x) Z - ie\eta_\vartheta(x)\frac{\delta Z}{\delta i\eta_\vartheta(x)} + ie\bar{\eta}_\vartheta(x)\frac{\delta Z}{\delta i\bar{\eta}_\vartheta(x)} = 0 \quad (329)$$

Z indeksom ϑ spominjamo bralca, da moramo po tem Diracovem indeksu seštevati.

Sedaj odvajajmo celoten izraz z

$$\frac{\delta^2}{\delta i\bar{\eta}_\zeta(x_1)\delta i\eta_\rho(x_2)} \quad (330)$$

ter postavimo vse izvore na nič: $J_\mu = \eta = \bar{\eta} = 0$. Drugi člen v (329) odpade, ostane pa

$$\begin{aligned} &- \frac{1}{\xi}\partial_x^2\partial_x^\mu \left.\frac{\delta^3 Z}{\delta i J^\mu(x)\delta i\bar{\eta}_\zeta(x_1)\delta i\eta_\rho(x_2)}\right|_0 && (331)\\ &- e\delta(x-x_2)\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta i\bar{\eta}_\zeta(x_1)\delta i\eta_\rho(x)}\right|_0 - e\delta(x-x_1)\left.\frac{\delta^2 Z}{\delta i\eta_\rho(x_2)\delta i\bar{\eta}_\zeta(x)}\right|_0 = 0 \end{aligned}$$

kar ni nič drugega kot

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\xi}\partial_x^2\partial_x^\mu\langle 0|\hat{T}A_\mu(x)\psi_\zeta(x_1)\bar{\psi}_\rho(x_2)|0\rangle && (332)\\ &+ e\delta(x-x_2)\langle 0|\hat{T}\psi_\zeta(x_1)\bar{\psi}_\rho(x_2)|0\rangle - e\delta(x-x_1)\langle 0|\hat{T}\psi_\zeta(x_1)\bar{\psi}_\rho(x_2)|0\rangle = 0 \end{aligned}$$

Pri tem zgornje pričakovane vrednosti časovno urejenega produkta interpretiramo tako kot na levi strani enačbe (235) ter upoštevamo posplošeno definicijo časovno urejenega produkta (158) za fermione (z minusom)

$$\begin{aligned} \langle 0\left|\hat{T}\psi(x)\bar{\psi}(y)\right|0\rangle &\equiv \langle 0\left|\psi(x)\bar{\psi}(y)\right|0\rangle\Theta(x^0-y^0)\\ &- \langle 0\left|\bar{\psi}(y)\psi(x)\right|0\rangle\Theta(y^0-x^0) \qquad (333) \end{aligned}$$

kot bi pričakovali za (antikomutirajoče) Grassmanove spremenljivke. Tritočkovno G.f. kot ponavadi Fourier transformiramo

$$
\begin{aligned}
&\langle 0|\hat{T} A_\mu(x)\psi_\zeta(x_1)\bar{\psi}_\rho(x_2)|0\rangle \qquad (334)\\
= \ & \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iqx} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1x_1} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2x_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - q)\\
\times \ & \tilde{G}^{(2)}_{\mu\mu'}(q) \tilde{S}_{\zeta\zeta'}(p_1) \tilde{G}^{(3)}_{amp} \left[A^{\mu'}(q)\psi_{\zeta'}(p_1)\bar{\psi}_{\rho'}(p_2) \right] \tilde{S}_{\rho'\rho}(p_2)
\end{aligned}
$$

kjer je $\tilde{G}^{(3)}_{amp}$ tritočkovna amputirana G.f., to je brez propagatorjev zunanjih nog, $\tilde{G}^{(2)}$ in $\tilde{S}$ pa sta propagatorja fotona in elektrona, vse v p prostoru:

$$
\langle 0|\hat{T} A_\alpha(x) A_\beta(y)|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \tilde{G}^{(2)}_{\alpha\beta}(p) \qquad (335)
$$

$$
\langle 0|\hat{T} \psi_\zeta(x)\bar{\psi}_\rho(y)|0\rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x-y)} \tilde{S}_{\zeta\rho}(p) \qquad (336)
$$

Uporabimo (297) in dobimo

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{\xi}\partial_x^2 \partial_x^\mu \langle 0|\hat{T} A_\mu(x)\psi_\zeta(x_1)\bar{\psi}_\rho(x_2)|0\rangle \qquad (337)\\
= \ & \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iqx} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1x_1} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2x_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - q)\\
\times \ & (-1) q_\mu \tilde{S}_{\zeta\zeta'}(p_1) \tilde{G}^{(3)}_{amp} \left[A^{\mu}(q)\psi_{\zeta'}(p_1)\bar{\psi}_{\rho'}(p_2) \right] \tilde{S}_{\rho'\rho}(p_2)
\end{aligned}
$$

Drugi člen v (332) je najprej

$$
e \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq(x-x_2)} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1x_1} \int \frac{d^4p'_2}{(2\pi)^4} e^{ip'_2x_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p'_2) \tilde{S}_{\zeta\rho}(p_1) \qquad (338)
$$

po redefiniciji $p'_2 = p_2 + q$ pa dobimo

$$
e \int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iqx} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1x_1} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2x_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1 - p_2 - q) \tilde{S}_{\zeta\rho}(p_1) \qquad (339)
$$

Podobno je tretji člen najprej

$$-e\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iq(x-x_1)} \int \frac{d^4p_1'}{(2\pi)^4} e^{-ip_1'x_1} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2x_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1'-p_2) \tilde{S}_{\zeta\rho}(p_2) \tag{340}$$

po redefiniciji $p_1' = p_1 - q$ pa

$$-e\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4} e^{iqx} \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1x_1} \int \frac{d^4p_2}{(2\pi)^4} e^{ip_2x_2} (2\pi)^4 \delta^4(p_1-p_2-q) \tilde{S}_{\zeta\rho}(p_2) \tag{341}$$

Ko seštejemo (337), (339) in (341) ter izpustimo vse skupne faktorje sledi

$$-q_\mu \tilde{S}_{\zeta\zeta'}(p_1) \tilde{G}^{(3)}_{amp} \left[A^\mu(q)\psi_{\zeta'}(p_1)\bar{\psi}_{\rho'}(p_2)\right] \tilde{S}_{\rho'\rho}(p_2) + e\tilde{S}_{\zeta\rho}(p_1) - e\tilde{S}_{\zeta\rho}(p_2) = 0 \tag{342}$$

Pomnožimo še z

$$\left(\tilde{S}^{-1}(p_1)\right)_{\alpha\zeta} \left(\tilde{S}^{-1}(p_2)\right)_{\rho\beta} \tag{343}$$

(implicitno seštevamo po dvakrat nastopajočih Diracovih indeksih) ter končno dobimo

$$-q_\mu \tilde{G}^{(3)}_{amp} \left[A^\mu(q)\psi_\alpha(p_1)\bar{\psi}_\beta(p_2)\right] + e\left(\tilde{S}^{-1}(p_2)\right)_{\alpha\beta} - e\left(\tilde{S}^{-1}(p_1)\right)_{\alpha\beta} = 0 \tag{344}$$

To je Wardova identiteta, ki velja v vseh redih perturbacijske teorije. Preverimo jo v najnižem redu. Upoštevamo (301) in (288):

$$-q_\mu ie\left(\gamma^\mu\right)_{\alpha\beta} + e\frac{\not{p}_2 - m}{i} - e\frac{\not{p}_1 - m}{i} = 0 \tag{345}$$

kar je čisto res zaradi ohranitve gibalne količine $q = p_1 - p_2$.

Pri izpeljavi smo privzeli, da velja (337), kar pa vemo zagotovo res le v najnižjem redu. Izkaže se, da je to res vedno, kar pa ne bomo dokazali.

12 Lekcija 12 (45 min) Nekaj novih količin

Do sedaj smo spoznali generatorski funkcional, Greenove funkcije, amputirane G.f., oboje tako v x kot v p prostoru, amplitude, S-matriko. Praktično gledano, je bila amputirana G.f. v p prostoru, ki postane kar amplituda, ko postavimo njene zunanje gibalne količine na masno lupino, najbolj uporabna.

Obstajajo pa še osnovnejši gradniki, iz katerih lahko enostavno izračunamo amputirane G.f.

12.1 Generatorski funkcional za povezane grafe

Generatorski funkcional, s katerim smo operirali, $Z[J]$, je generiral tako povezane, kot nepovezane Feynmanove grafe. Nepovezanih smo se znebili enostavno tako, da smo jih ignorirali, saj ne prispevajo k interakciji, ki nas edinole zanima. To bi lahko napravili bolj formalno, če bi definirali generatorski funkcional za povezane grafe $W[J]$ preko

$$Z[J] = \exp\left(iW[J]\right) \tag{346}$$

Povezane Greenove funkcije (indeks c pomeni *connected*) dobimo kot

$$G_c^{(n)}(x_1, \ldots, x_n) = \left.\frac{\delta^n iW[J]}{\delta iJ(x_1)\ldots\delta iJ(x_n)}\right|_{J=0} \tag{347}$$

Tukaj nimamo več kaj dodat, saj smo tako in tako do sedaj uporabljali pravzaprav že itak $W[J]$ (ne da bi vedeli, s tem, da smo računali samo povezane F. grafe).

12.2 1-delčno nerazcepna (1-PI) vozlišča

Do sedaj smo grafe delili na povezane in nepovezane. Povezani so bili vsi tisti, ki smo jih lahko razdelili na dva dela le, če smo prerezali vsaj eno linijo grafa (pri nepovezanih lahko najdemo vsaj eno delitev, ki ne seče nobene linije grafa).

Definirajmo še bolj specialne grafe: to so tisti, ki jih lahko razdelimo na dva dela le, če presekamo vsaj dve liniji. Take F. grafe opisujejo 1-delčno nerazcepna (one particle irreducible, 1-PI) vozlišča ali G.f.

n-točkovna 1-PI vozlišča v p prostoru bodo tisti osnovni gradniki, ki smo jih omenili prej. Dobimo jih preko Legendrove transformacije

$$W[J] = \Gamma[\phi] + \int dx J(x)\phi(x) \tag{348}$$

Tako kot je $W[J]$ generator G.f. vseh povezanih grafov, je $\Gamma[\phi]$ generator 1-delčno nerazcepnih vozlišč. To bomo sedaj preverili na nekaj primerih.

Količini J in ϕ sta neodvisni, zato pa velja (po definiciji)

$$\begin{aligned} \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} &= \phi(x) & (349) \\ \frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x)} &= -J(x) & (350) \end{aligned}$$

Če vzamemo limito $J(x) \to 0$, dobimo vakuumsko pričakovano vrednost 1-točkovne Greenove funkcije

$$\phi_{cl}(x) = \left.\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)}\right|_{J=0} = \langle 0|\hat{T}\phi(x)|0\rangle \tag{351}$$

to je rešitev enačbe gibanja

$$\frac{\delta \Gamma[\phi]}{\delta \phi_{cl}(x)} = 0 \tag{352}$$

V limiti konstantnih polj je to vakuumska pričakovana vrednost $\langle \phi \rangle$ iz (270).

Nasplošno se bomo držali zapisa, da sta

$$\begin{aligned} G(x_1, \dots, x_n) &\equiv \frac{\delta^n iW[J]}{\delta iJ(x_1) \dots \delta iJ(x_n)} & (353) \\ \Gamma(x_1, \dots, x_n) &\equiv \frac{\delta^n \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x_1) \dots \delta \phi(x_n)} & (354) \end{aligned}$$

Druga odvoda sta torej

$$\begin{aligned} G(x,y) &\equiv \frac{\delta^2 iW[J]}{\delta iJ(x) \delta iJ(y)} = -i\frac{\delta \phi(x)}{\delta J(y)} = -i\frac{\delta \phi(y)}{\delta J(x)} & (355) \\ \Gamma(x,y) &\equiv \frac{\delta^2 \Gamma[\phi]}{\delta \phi(x) \delta \phi(y)} = -\frac{\delta J(x)}{\delta \phi(y)} = -\frac{\delta J(y)}{\delta \phi(x)} & (356) \end{aligned}$$

in sta si inverz eden drugemu:

$$\int dy G(x,y)\Gamma(y,z) = \int dz(-i)\frac{\delta \phi(x)}{\delta J(y)}(-1)\frac{\delta J(y)}{\delta \phi(z)} = i\delta(x-z) \tag{357}$$

To enačbo zdaj funkcionalno odvajajmo po

$$\frac{\delta}{\delta i J(v)} = -i\int du\,\frac{\delta\phi(u)}{\delta J(v)}\frac{\delta}{\delta\phi(u)} = \int du\, G(v,u)\frac{\delta}{\delta\phi(u)} \tag{358}$$

Dobimo

$$\int dy G(x,y,v)\Gamma(y,z) + \int dy\int du\, G(x,y)G(v,u)\Gamma(u,y,z) = 0 \tag{359}$$

Pomnožimo z $G(z,w)$ ter integriramo po $\int dz$:

$$iG(x,w,v) + \int dy\int dz\int du\, G(x,y)G(w,z)G(v,u)\Gamma(y,z,u) = 0 \tag{360}$$

V limiti $J \to 0$ je $\Gamma(y,z,u)$ jasno nič drugega kot (do nepomembne faze natančno) amputirana 3-točkovna G.f. v x prostoru.

Dobimo lahko tudi (v določenem smislu) inverz zgornje enačbe:

$$\Gamma(y,z,u) = \int dx\int dw\int dv\,\Gamma(y,x)\Gamma(z,w)\Gamma(u,v)G(x,w,v) \tag{361}$$

Pa dajmo še enkrat odvajat po $iJ(t)$. Z enakostjo (358) in večkratnem upoštevanju (360) dobimo po spremembi označitve točk

$$\begin{aligned} G(x_1,x_2,x_3,x_4) &= \int dy_1\int dy_2\int dy_3\int dy_4 \\ &\times\ G(x_1,y_1)G(x_2,y_2)G(x_3,y_3)G(x_4,y_4) \\ &\times\ G_{amp}(y_1,y_2,y_3,y_4) \end{aligned} \tag{362}$$

kjer je 4-točkovna amputirana G.f. povezana z 1-PI preko

$$\begin{aligned} -iG_{amp}(y_1,y_2,y_3,y_4) &= \Gamma(y_1,y_2,y_3,y_4) \qquad (363) \\ &+\ i\int dz\int dz'\,\Gamma(y_1,y_2,z)G(z,z')\Gamma(z',y_3,y_4) \\ &+\ i\int dz\int dz'\,\Gamma(y_1,y_3,z)G(z,z')\Gamma(z',y_2,y_4) \\ &+\ i\int dz\int dz'\,\Gamma(y_1,y_4,z)G(z,z')\Gamma(z',y_2,y_3) \end{aligned}$$

Jasno je, da lahko 4-točkovno G.f. (362) razdelimo na dva dela s prerezom ene same linije: lahko prerežemo enega izmed zunanjih propagatorjev $G(x_i, y_i)$, ali pa, v grafih iz zadnjih treh členov v (363), notranji propagator $G(z, z')$.

Podobno lahko nadaljujemo za poljubno G.f. $G^{(n)}$, ki jo lahko vedno sestavimo z osnovnimi gradniki, 1-delčnimi nerazcepnimi vozlišči $\Gamma^{(i)}$, $i = 3, \ldots, n$ in propagatorji $G^{(2)}$.

Vse to lahko tudi enostavno prevedemo v p-prostor. Kot ponavadi definiramo te količine kot

$$
\begin{aligned}
G(x_1, \ldots, x_n) &= \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1x_1} \ldots \int \frac{d^4p_n}{(2\pi)^4} e^{-ip_nx_n} \\
&\times \tilde{G}^{(2)}(p_1) \ldots \tilde{G}^{(2)}(p_n) \\
&\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \ldots + p_n)\, \tilde{G}_{amp}(p_1, \ldots, p_n) \qquad (364) \\
\Gamma(x_1, \ldots, x_n) &= \int \frac{d^4p_1}{(2\pi)^4} e^{-ip_1x_1} \ldots \int \frac{d^4p_n}{(2\pi)^4} e^{-ip_nx_n} \\
&\times (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \ldots + p_n)\, \tilde{\Gamma}(p_1, \ldots, p_n) \qquad (365)
\end{aligned}
$$

kar nam da za zgornje 3- in 4-točkovne amputirane G.f.

$$
\begin{aligned}
\tilde{G}_{amp}(p_1, p_2, p_3) &= i\tilde{\Gamma}(p_1, p_2, p_3) \qquad (366) \\
\tilde{G}_{amp}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= i\tilde{\Gamma}(p_1, p_2, p_3, p_4) \qquad (367) \\
&+ i\tilde{\Gamma}(p_1, p_2, -p_1 - p_2)\, \tilde{G}(p_1 + p_2)\, i\Gamma(-p_3 - p_4, p_3, p_4) \\
&+ i\Gamma(p_1, p_3, -p_1 - p_3)\, \tilde{G}(p_1 + p_3)\, i\tilde{\Gamma}(-p_2 - p_4, p_2, p_4) \\
&+ i\tilde{\Gamma}(p_1, p_4, -p_1 - p_4)\, \tilde{G}(p_1 + p_4)\, i\tilde{\Gamma}(-p_2 - p_4, p_2, p_3)
\end{aligned}
$$

kjer se avtomatično upošteva, da je vsota vseh četvercev ohranjena.

13 Lekcija 13 (6 h)

∞

Že večkrat smo se srečali z neskončnimi integrali. Ti niso nastopali v prvih približkih (drevesni redi Feynmanovih grafov), ampak šele pri popravkih (zanke).

13.1 Regularizacija

Prvi korak k ukrotitvi neskončnosti je njihova regularizacija, to je redefinicija teorije tako, da so izrazi končni, originalno teorijo in njene divergence pa dobimo nazaj šele po neki limiti. Najbolj uporabljena regularizacija je dimenzijska, saj ne pokvari umeritvene invariance. V bistvu gre za to, da neskončen integral v 4 dimenzijah posplošimo v integral v d dimenzijah, kjer pa d ni nujno celo število. Integrali se dajo izračunati za splošen d, rezultati pa imaje ponavadi pole za cele dimenzije. Odtod problemi, ko limitiramo z $d \to 4$ oz. $\epsilon \equiv 4 - d \to 0$.

Pa poglejmo to bolj podrobno v primeru ϕ^4. Dvo-točkovna 1-PI G.f. je do reda 1 zanke (iz enostavnosti ne bomo več pisali vijug, saj bodo vse G.f. itak samo v p prostoru)

$$\Gamma^{(2)}(p^2, m^2, \lambda, \epsilon) = p^2 - m^2 + \frac{1}{i}\frac{1}{2}(-i\lambda) \int \frac{d^{4-\epsilon}k}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{i}{k^2 - m^2} \tag{368}$$

Za $\epsilon = 0$ je integral seveda neskončen, saj ostane za velike k v bistvu $\int_{-\infty}^{+\infty} kdk$. To pa ni več res za splošen necel ϵ. Pogledamo recimo v Peskina:

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{1}{(k^2 - \Delta)^n} = \frac{(-1)^n i}{(4\pi)^{d/2}} \frac{\Gamma(n - d/2)}{\Gamma(n)} \Delta^{-n+d/2} \tag{369}$$

To izkoristimo za naš primer, uporabimo relacije

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{370}$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \Gamma(\epsilon/2) = 2/\epsilon - \gamma + \mathcal{O}(\epsilon) \tag{371}$$

kjer je $\gamma \approx 0.577$ Euler-Mascheroni-jeva konstanta, ter dobimo končno

$$\Gamma^{(2)}(p^2, m^2, \lambda, \epsilon) = p^2 - m^2 + \frac{\lambda m^2}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi + 1 - \ln m^2 \right) \tag{372}$$

Izraz postane jasno divergenten v smiselni fizikalni limiti štirih dimenzij. Podobno dobimo za štiritočkovno 1-PI G.f. do reda ene zanke

$$\Gamma^{(4)}(p_i, m^2, \lambda, \epsilon) = -\lambda + I(s, m^2, \lambda, \epsilon) + I(t, m^2, \lambda, \epsilon) + I(u, m^2, \lambda, \epsilon) \tag{373}$$

kjer je

$$I(p^2, m^2, \lambda, \epsilon) = \frac{1}{i}\frac{1}{2}(-i\lambda)^2 \int \frac{d^{4-\epsilon}k}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \frac{i}{k^2 - m^2} \frac{i}{(k+p)^2 - m^2} \tag{374}$$

in smo uvedli Mandelstamove spremenljivke (upoštevamo $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0$)

$$s \equiv (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \tag{375}$$

$$t \equiv (p_1 + p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2 \tag{376}$$

$$u \equiv (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2 \tag{377}$$

za katere velja

$$s + t + u = 4m^2 \tag{378}$$

(v splošnem je desna stran enaka $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2$).

Zopet nam priskoči na pomoč Peskin. Najprej uporabimo

$$\frac{1}{A_1 \dots A_n} = \int_0^1 dx_1 \dots \int_0^1 dx_n \, \delta\left(\sum_{i=1}^n x_i - 1\right) \frac{(n-1)!}{(x_1 A_1 + \dots + x_n A_n)^n} \tag{379}$$

da dobimo

$$I(p^2, m^2, \lambda, \epsilon) = \frac{\lambda^2}{2i} \int \frac{d^{4-\epsilon}k}{(2\pi)^{4-\epsilon}} \int_0^1 dx \frac{1}{[k^2 - m^2 + (p^2 + 2pk)x]^2} \tag{380}$$

S spremembo spremenljivke

$$k' = k + xp \tag{381}$$

se znebimo člena linearnega v k-ju, tako da lahko zopet uporabimo enačbo (369). Rezultat je

$$I(p^2, m^2, \lambda, \epsilon) = \frac{\lambda^2}{2(4\pi)^2} \left[\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \int_0^1 dx \ln\Big(m^2 - p^2 x(1-x)\Big)\right] \tag{382}$$

13.2 Renormalizacija

Dvo- in štiri-točkovni 1-PI G.f. smo regularizirali, vendar ostajata neskončni v limiti $\epsilon \to 0$. Še preden to limito opravimo, redefiniramo parametre našega modela: m^2 in λ. To lahko naredimo, saj so konec koncev fizikalno merljive količine amplitude oz. 1-PI G.f., ne pa nujno tudi direktno parametri Lagrangiana. Torej zapišimo

$$
\begin{aligned}
m^2 &= m_R^2 - \delta m^2 && (383) \\
\lambda &= \lambda_R \mu^\epsilon Z_\lambda && (384)
\end{aligned}
$$

Z indeksom R označimo renormalizirane, to je končne, količine. Seveda stlačimo vse nevarne člene $1/\epsilon$ v δm^2 oz. $\delta Z_\lambda = Z_\lambda - 1$, lahko pa tudi nekaj končnega. Možnih izbir je seveda neskončno, fizikalne količine pa od te izbire seveda ne smejo biti odvisne.

Kot smo rekli, je v definicijah (383) in (384) še veliko možnosti izbire. m_R in λ_R naj bosta končna. Neskončnosti se znebimimo, če izberemo npr. sledeče renormalizacijske pogoje:

$$
\begin{aligned}
\Gamma^{(2)}(m_R^2, m^2, \lambda, \epsilon) &= 0 && (385) \\
\Gamma^{(4)}(0, m^2, \lambda, \epsilon) &= -\lambda_R \mu^\epsilon && (386)
\end{aligned}
$$

Formalno sta δm^2 in δZ_λ višjega reda v sklopitveni konstanti λ_R kot m_R^2 oz. 1. To pomeni, da sta

$$
\begin{aligned}
\delta m^2 &= -\frac{\lambda_R m_R^2}{2(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi + 1 - \ln\frac{m_R^2}{\mu^2}\right) && (387) \\
\delta Z_\lambda &= \frac{3\lambda_R}{2(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi - \ln\frac{m_R^2}{\mu^2}\right) && (388)
\end{aligned}
$$

Definirajmo renormalizirane funkcije $\Gamma_R^{(n)}$, ki so funkcije renormaliziranih parametrov, kot (kot bomo videli pozneje, se ta definicija rahlo spremeni v bolj splošnih primerih, v našem primeru ϕ^4 na eni zanki, pa je v redu)

$$
\Gamma_R^{(n)}(p_i, m_R^2, \lambda_R) = \Gamma^{(n)}(p_i, m^2, \lambda, \epsilon) \qquad (389)
$$

Torej so sedaj renormalizirane 1-PI G.f. (medtem smo se končno vrnili v štiridimenzijonalni prostor, to je, pognali smo limito $\epsilon \to 0$)

$$\Gamma_R^{(2)}(p^2, m_R^2, \lambda_R) = p^2 - m_R^2 \tag{390}$$

oz.

$$\begin{aligned}\Gamma_R^{(4)}(p_i, m_R^2, \lambda_R) = -\lambda_R &+ I_R(s, m_R^2, \lambda_R, m_R^2) \\ &+ I_R(t, m_R^2, \lambda_R, m_R^2) + I_R(u, m_R^2, \lambda_R, m_R^2)\end{aligned} \tag{391}$$

kjer smo označili

$$I_R(p^2, m_1^2, \lambda, m_2^2) = -\frac{\lambda^2}{2(4\pi)^2} \int_0^1 dx \ln \frac{m_1^2 - p^2 x(1-x)}{m_2^2} \tag{392}$$

13.3 Nadaljna komplikacija: renormalizacija polja

Videli smo, da so popravki k dvo- in štiri-točkovni 1-PI Greenovi fukciji oblike

$$\Gamma^{(2)}(p^2, m^2, \lambda, \epsilon) = p^2 - m^2 + I^{(2)}(p^2, m^2, \lambda, \epsilon) \tag{393}$$

$$\Gamma^{(4)}(p_i, m^2, \lambda, \epsilon) = -\lambda + I^{(4)}(p_i, m^2, \lambda, \epsilon) \tag{394}$$

V primeru ϕ^4 do ene zanke je bilo dovolj renormalizirati maso in sklopitveno konstanto. Pri dveh zankah ali pa pri malo bolj kompliciranih teorijah se pa izkaže, da je tudi $I^{(2)}$ funkcija p^2 in sicer sorazmerna $1/\epsilon$. V tem primeru moramo renormalizirati še polje

$$\phi = Z_\phi^{1/2} \phi_R \tag{395}$$

To moramo narediti tudi v primeru, da je $I^{(2)}(p^2)$ končna, a neničelna v limiti $\epsilon \to 0$. To vidimo na sledeči način. Definiramo m_{POL}^2 kot

$$\Gamma^{(2)}(m_{POL}^2, m^2, \lambda, \epsilon) = 0 \tag{396}$$

V naših zgornjih primerih, je bil $m_R^2 = m_{POL}^2$, vendar to ni nujno res v splošnem. Residuum pola propagatorja v splošnem ni 1, pač pa lahko

$$\frac{d\Gamma^{(2)}}{dp^2}(m_{POL}^2, m^2, \lambda, \epsilon) = Z_\phi^{-1} \neq 1 \tag{397}$$

Za take primere pa enačba za amplitudo ne velja. Izpeljali smo jo namreč za pravilno normirana ($Z_\phi = 1$) polja, za katere KG operator spravi propagator zunanje noge na δ funkcijo. Imenujemo tako polje ϕ_R, njegov izvor ali ponor pa J_R. Izvor ali ponor J nekanonično normiranega polja ϕ pa definiramo preko

$$J_R \phi_R = J\phi \tag{398}$$

odkoder

$$J = Z_\phi^{-1/2} J_R \tag{399}$$

Shematsko je amplituda tedaj

$$A^{(n)} \sim Z_\phi^{-n/2} \left[-i(\partial^2 + m^2)\right]^n G^{(n)} \sim Z_\phi^{n/2} G^{(n)}_{amp} \tag{400}$$

kjer smo upoštevali, da je (zopet shematsko)

$$G^{(n)} = \left[G^{(2)}\right]^n G^{(n)}_{amp} \tag{401}$$

in

$$-i(\partial^2 + m^2) G^{(2)} = Z_\phi \tag{402}$$

Po drugi strani pa je

$$G^{(n)} \sim \langle \phi^n \rangle = Z_\phi^{n/2} G^{(n)}_R \tag{403}$$

odkoder sledi, da je (kot smo pričakovali)

$$A^{(n)} \sim G^{(n)}_{amp,R} \tag{404}$$

Odtod jasno sledi, da moramo renormalizirane 1-PI G.f. definirati kot

$$\Gamma^{(n)}_R(p_i, m_R^2, \lambda_R) = Z_\phi^{n/2}(m^2, \lambda, \epsilon)\Gamma^{(n)}(p_i, m^2, \lambda, \epsilon) \tag{405}$$

Renormalizacijski pogoji so

$$\Gamma^{(2)}_R(m_R^2, m_R^2, \lambda_R) = 0 \tag{406}$$

$$\frac{d\Gamma^{(2)}_R}{dp^2}(m_R^2, m_R^2, \lambda_R) = 1 \tag{407}$$

$$\Gamma^{(4)}_R(0, m_R^2, \lambda_R) = = -\lambda_R \tag{408}$$

s katerimi izračunamo δm^2, δZ_λ in $\delta Z_\phi = Z_\phi - 1$.

13.4 Protičleni

Zamenjavo golih količin m^2, λ, ϕ z renormaliziranimi m_R^2, λ_R, ϕ_R lahko naredimo že od vsega začetka. Goli Lagrangian

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{2}m^2\phi^2 - \frac{\lambda}{4!}\phi^4 \tag{409}$$

zamenjamo z vsoto renormaliziranega Lagrangiana

$$\mathcal{L}_R = \frac{1}{2}(\partial\phi_R)^2 - \frac{1}{2}m_R^2\phi_R^2 - \frac{\lambda_R\mu^\epsilon}{4!}\phi_R^4 \tag{410}$$

in protičlenov (CT=counter-terms)

$$\mathcal{L}_{CT} = \frac{1}{2}\delta Z_\phi(\partial\phi_R)^2 - \frac{1}{2}\left(\delta Z_\phi m_R^2 - Z_\phi\delta m^2\right)\phi_R^2 - \frac{\lambda_R\mu^\epsilon}{4!}\left(Z_\lambda Z_\phi^2 - 1\right)\phi_R^4 \tag{411}$$

Te nove člene obravnavamo kot prave člene Lagrangiana, izpeljemo zanje Feynmanova pravila ter jih upoštevamo pri Feynmanovih diagramih. Seveda so formalno višje potence v sklopitveni konstanti λ_R. Lahko jih razvijemo po potencah sklopitvene konstante (koeficijenti so seveda lahko singularni v $1/\epsilon$)

$$\begin{aligned}
\delta m^2 &= \delta m_1^2\lambda_R + \delta m_2^2\lambda_R^2 + \ldots && (412)\\
\delta Z_\lambda &= \delta Z_{\lambda 1}\lambda_R + \delta Z_{\lambda 2}\lambda_R^2 + \ldots && (413)\\
\delta Z_\phi &= \delta Z_{\phi 1}\lambda_R + \delta Z_{\phi 2}\lambda_R^2 + \ldots && (414)
\end{aligned}$$

in torej jih moramo formalno upoštevati v pravem redu v potencah po λ_R.

13.5 Različni renormalizacijski pogoji (sheme)

Zgornji renorm. pogoji niso sveti. Lahko jih izberemo drugačne, in večkrat to tudi res naredimo. Na kratko opišimo sedaj takoimenovano $\overline{MS}$, ki se dosti rabi predvsem v kromodinamiki.

Tukaj nimamo nobenih pogojev v kinematičnih točkah kot prej, pač pa določimo protičlene enostavno z zahtevo, da se znebimo vseh delov $2/\epsilon - \gamma +$

$\ln 4\pi$. Ime $\overline{MS}$ pomeni minimal subtraction, prečna pa je zato, ker poleg divergentnega dela, pospravimo v protičlen še zgornja končna.

V prejšnjem primeru ϕ^4 bi to pomenilo

$$\delta m^2 = -\frac{\lambda_R m_R^2}{2(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right) \tag{415}$$

$$\delta Z_\lambda = \frac{3\lambda_R}{2(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right) \tag{416}$$

$$\delta Z_\phi = 0 \tag{417}$$

Seveda zgledajo renormalizirane 1-PI G.f. različno kot prej

$$\Gamma_R^{(2)}(p^2, m_R^2, \lambda_R, \mu) = p^2 - m_R^2 + \frac{\lambda_R m_R^2}{2(4\pi)^2}\left(1 - \ln\frac{m_R^2}{\mu^2}\right) \tag{418}$$

$$\begin{aligned}\Gamma_R^{(4)}(p_i, m_R^2, \lambda_R, \mu) &= -\lambda_R + I_R(s, m_R^2, \lambda_R, \mu^2) \\ &+ I_R(t, m_R^2, \lambda_R, \mu^2) + I_R(u, m_R^2, \lambda_R, \mu^2)\end{aligned} \tag{419}$$

Spomniti se pa moramo, da sta m_R in λ_R zdaj nekaj čisto drugega kot sta bila prej (različni številki).

13.6 Vaje

1. K Lagrangianu za ϕ^4 dodaj fermion ter člene

$$\bar{\psi}\left(i\partial\!\!\!/ - m_f\right)\psi - y\phi\bar{\psi}\psi \tag{420}$$

2. Izračunaj popravek k verteksu $\bar{\psi}\psi\phi$ na eni zanki ter renormaliziraj y v $\overline{MS}$ shemi.

3. Izračunaj verteks ϕ^3 na eni zanki ter pokaži, da divergira.

4. Od tod sledi, da bi od vsega začetka morali dodati člen $M\phi^3$, renormalizacija parametra M pa bi krajšala divergenco pri verteksu ϕ^3, ki se pojavi na eni zanki, podobno kot je renormalizacija parametra y odpravila divergenco verteksa $\bar{\psi}\psi\phi$.

5. Kaj se zgodi v limiti $m_f \to 0$? Zakaj se tedaj (ob $M = 0$ seveda) verteks ϕ^3 ne generira na eni zanki? Kakšna simetrija to prepove?

13.7 Enačbe renormalizacijske grupe

Zgornji izrazi so navidez nekoliko presenetljivi, saj zgleda, da so fizikalno merljive količine odvisne od poljubnega parametra μ, ki se je prištulil v izraze preko dimenzijske regularizacije in zahteve po brezdimenzijski renormalizirani sklopitveni konstanti. To bi se zgodilo celo v teorijah brez masnega parametra: renormalizacija sama ustvari dimenzijski faktor, kar imenujemo dimenzijska transmutacija. Tako ali drugače, odvisnost od neznanega μ je le navidezna. Pokazali bomo, da so renormalizirani parametri (m_R^2, λ_R v $\overline{MS}$ shemi) tudi od μ odvisni, tako da se skupni efekt nevtralizira in so fizikalne količine neodvisne od izbire μ.

To preveriti je seveda važno, imeli bomo pa še nadaljno korist. Pokazali bomo namreč, da lahko preko tega trika seštejemo neskončno vrsto nevarnih velikih logaritmov, ki se pojavijo v nekaterih kinematskih limitah, ter tako rešimo sam perturbacijski razvoj.

Začnimo takoj s spoznanjem, da so vsi goli parametri neodvisni od μ.

$$0 = \mu \frac{d\lambda}{d\mu} = \mu \frac{d}{d\mu} \left(\lambda_R \mu^\epsilon Z_\lambda(\lambda_R, \epsilon) \right) \tag{421}$$

Odtod dobimo enačbo

$$\epsilon \lambda_R + \mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} \left(1 + \lambda_R \frac{\partial \ln Z_\lambda(\lambda_R, \epsilon)}{\partial \lambda_R} \right) = 0 \tag{422}$$

Rešitev za neznanko nastavimo kot razvoj po pozitivnih potencah renormalizirane sklopitvene konstante (višje potence pridejo v poštev šele na nivoju dveh zank)

$$\mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = A\lambda_R + B\lambda_R^2 + \ldots \tag{423}$$

Upoštevajoč (416) dobimo

$$\mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = -\epsilon \lambda_R + \frac{3\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \tag{424}$$

Zdaj lahko mirno potegnemo limito $\epsilon \to 0$ ter dobimo enačbo, ki opisuje spremembo renormalizirane sklopitvene konstante s skalo μ.

$$\mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} = \frac{3\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \quad (\equiv \beta(\lambda_R)) \tag{425}$$

Desno stran, razvoj po potencah λ_R, imenujemo β funkcijo. Enačbo lahko integriramo

$$\lambda_R(\mu) = \frac{\lambda_R(\mu_0)}{1 - \frac{3\lambda_R(\mu_0)}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0}} \tag{426}$$

Z večanjem skale pridemo do singularnosti, ker je beta funkcija pozitivna. To pomeni nekako, da se sklopitvena konstanta veča s skalo, pri kateri jo merimo. Seveda pa približek odpove preden dosežemo singularnost, ki jo imenujemo Landau pol, saj postane λ_R dovolj velika, da se ne moremo več zadovoljiti z nivojem ene zanke.

Podobno lahko naredimo za maso:

$$0 = \mu \frac{dm^2}{d\mu} = \mu \frac{d}{d\mu} \left(m_R^2 - \delta m^2 (m_R^2, \lambda_R, \epsilon) \right) \tag{427}$$

odkoder

$$\mu \frac{dm_R^2}{d\mu} + \left(m_R^2 \mu \frac{d\lambda_R}{d\mu} + \lambda_R \mu \frac{dm_R^2}{d\mu} \right) \frac{1}{2(4\pi)^2} \left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi \right) = 0 \tag{428}$$

Podobno kot prej razvijemo

$$\mu \frac{dm_R^2}{d\mu} = C\lambda_R + \dots \tag{429}$$

in ob uporabi (424) dobimo v prvem redu

$$\mu \frac{dm_R^2}{d\mu} = \frac{\lambda_R}{(4\pi)^2} m_R^2 \tag{430}$$

katere rešitev je

$$m_R^2(\mu) = \frac{m_R^2(\mu_0)}{\left(1 - \frac{3\lambda_R(\mu_0)}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu}{\mu_0}\right)^{1/3}} \tag{431}$$

13.8 Ekspliciten primer

Predstavljamo si, da imamo pospeševalnik delcev ϕ, ki jih opisujemo z nam že dobro znanim Lagrangianom ϕ^4. Zanimamo se za elastično sipanje dveh delcev (to pomeni, da je število in tip delcev na koncu enako kot na začetku).

Vhodna delca imata četverca gibalne količine v težiščnem sistemu (ki naj bo enak laboratorijskemu)

$$\begin{aligned} p_1^\mu &= (E, 0, 0, p) && (432) \\ p_2^\mu &= (E, 0, 0, -p) && (433) \end{aligned}$$

končna delca pa

$$\begin{aligned} p_3^\mu &= -(E, p\sin\theta, 0, p\cos\theta) && (434) \\ p_4^\mu &= -(E, -p\sin\theta, 0, -p\cos\theta) && (435) \end{aligned}$$

kjer je

$$E^2 - p^2 = m^2 \tag{436}$$

in je m^2 pol propagatorja. V drevesnem redu je kar masni parameter v Lagrangianu, v redu ene zanke pa m_R^2 definiran preko (390) v našem posebnem primeru, oz. preko (396) v splošnem. To je tudi masa, ki jo čuti gravitacija in nastopa v Newtonovem gravitacijskem zakonu.

Mislimo si, da nam nekako uspe izmeriti sipalni presek σ_{exp} v limiti, ko imata vhodna delca zelo majhno gibalno količino (to je ponavadi težko, saj pravzaprav pomeni, da se vhodna delca sploh ne gibljeta, torej ne pride do sipanja, vendar si lahko mislimo nekakšno limito). To izberemo samo zato, ker so vse enačbe v tej točki enostavnejše, v realnem primeru merimo v drugi točki. V tej ugodni limitni ($p \to 0$) kinematski točki faznega prostora so Mandelstamove spremenljivke

$$\begin{aligned} s &\to 4m_R^2 && (437) \\ t &\to 0 && (438) \\ u &\to 0 && (439) \end{aligned}$$

V drevesnem redu dobimo

$$\Gamma^{(4)}(p_i, m, \lambda) = -\lambda \tag{440}$$

amplituda je neodvisna od gibalnih količin. Ker merimo presek, moramo izračunati še fazni prostor itd. po formuli (253). Rezultat je

$$\sigma = \frac{\left|\Gamma^{(4)}\right|^2}{64\pi E^2} = \frac{\lambda^2}{64\pi E^2} \tag{441}$$

Sklopitveno konstanto λ določimo preko izmerjenega σ_{exp} v limiti (437)-(439):

$$\sigma_{exp} = \frac{\lambda^2}{64\pi m^2} \tag{442}$$

Torej je v splošnem

$$\sigma = \sigma_{exp} \left(\frac{m}{E}\right)^2 \tag{443}$$

Recimo pa, da s to natančnostjo nismo zadovoljni. V tem primeru poskusimo uporabiti rezultate v naslednjem popravku, to je približku ene zanke. Za renormalizacijske pogoje izberimo (406)-(408), tako da je izraz za 4-točkovno 1PI G.f. (391). Ta je v kinematski točki, kjer merimo (437)-(439) enak (izračunati moramo integrale tipa (392))

$$\Gamma^{(4)}_{exp} = -\lambda_R + \frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \tag{444}$$

Pri kvadriranju $\Gamma^{(4)}$ ne smemo upoštevati najvišje potence λ_R^4, saj je ta že naslednjega reda (če bi računali do dveh zank, bi imeli še red λ^3 v (444), kar bi, pomnoženo z drevesnim redom, dalo tudi isto potenco), tako da je

$$\sigma_{exp} = \frac{1}{64\pi m_R^2} \left(\lambda_R^2 - 2\frac{\lambda_R^3}{(4\pi)^2}\right) \tag{445}$$

Preko te enačbe izračunamo numerično vrednost λ_R. Če je ta dovolj majhna, to je da

$$\frac{\lambda_R}{(4\pi)^2} \ll 1 \tag{446}$$

perturbativni razvoj Greenovih funkcij konvergira in je račun konsistenten.

Sipalni presek v poljubni kinematski točki pa seveda izračunamo preko (253) in (391), kjer pa je zdaj λ_R numerično nafitana preko (445).

Kaj pa, če bi namesto (408) uporabili drugačen pogoj, npr. v limiti (437)-(439)

$$\Gamma_R^{(4)} \to -\lambda'_R \tag{447}$$

Tedaj je

$$\sigma_{exp} = \frac{\lambda_R'^2}{64\pi m_R^2} \tag{448}$$

Kot vidimo, je λ'_R numerično zdaj različen od λ_R, končni rezultat pa enak do popravkov formalno višjega reda v potencah sklopitvene konstante. Numerično je torej fizikalni rezultat (sipalni presek kot funkcija gibalnih količin) lahko rahlo odvisna od izbire renormalizacijske sheme, vendar je pri dobri konvergenci (446) razlika primerno majhna.

Kaj pa, če uporabimo $\overline{MS}$ shemo? Da se čimbolj izognemo komplikacijam, uporabimo to shemo le za sklopitveno konstanto, medtem ko naj bo masa še vedno pol propagatorja:

$$\begin{aligned}
\Gamma_R^{(2)} &= p^2 - m_R^2 && (449)\\
\Gamma_R^{(4)} &= -\lambda_R(\mu) + I_R(s, m_R^2, \lambda_R(\mu), \mu^2)\\
&+ I_R(t, m_R^2, \lambda_R(\mu), \mu^2) + I_R(u, m_R^2, \lambda_R(\mu), \mu^2) && (450)
\end{aligned}$$

Sklopitvena konstanta $\lambda_R(\mu)$ je sedaj, z razliko od prejšnjih, drseča, to je odvisna od parametra μ preko enačbe renormalizacijske grupe (425). To nas ne sme splašit. Po popolnoma enakem postopku kot prej dobimo najprej v limiti (437)-(439)

$$\Gamma_{exp}^{(4)} \to -\lambda_R(\mu) + \frac{\lambda_R^2(\mu)}{(4\pi)^2}\left(1 + 3\ln\frac{\mu}{m_R}\right) \tag{451}$$

Pri $\mu = m_R$ imamo isti izraz kot prej, glej (444)

$$\Gamma_{exp}^{(4)} = -\lambda_R(m_R) + \frac{\lambda_R^2(m_R)}{(4\pi)^2} \tag{452}$$

torej je $\lambda_R(m_R)$ numerično enak λ_R, ki ga dobimo preko enačbe (445). Ko integriramo (425), upoštevamo ta robni pogoj:

$$\lambda_R(\mu) = \frac{\lambda_R(m_R)}{1 - \frac{3\lambda_R(m_R)}{(4\pi)^2}\ln\frac{\mu}{m_R}} \tag{453}$$

Pozoren bralec se lahko zdaj upravičeno vpraša, ali lahko sploh ta zadnji izraz ohranimo v tej obliki, ali pa moramo razviti po potencah $\lambda_R(m_R)$, kot ponavadi. Vendar je tukaj razlika, saj nastopa še $\ln(\mu/m_R)$, ki bi v principu lahko bil velik. Če je dovolj majhen

$$\frac{\lambda_R(m_R)}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu}{m_R} \ll 1 \tag{454}$$

lahko mirne duše razvijemo do kvadratnega reda, vstavimo v (450), ter dobimo

$$\begin{aligned} \Gamma^{(4)}(p_i, m_R^2, \lambda_R) = -\lambda_R \quad &+ \quad I_R(s, m_R^2, \lambda_R, m_R^2) \\ &+ \quad I_R(t, m_R^2, \lambda_R, m_R^2) + I_R(u, m_R^2, \lambda_R, m_R^2) \end{aligned} \tag{455}$$

točno isto kot (391). V tem primeru ni popolnoma nobene razlike med originalno shemo in $\overline{MS}$ shemo.

Do razlike pa pride, ko (454) ni izpolnjena, čeprav (446) je. To je jasno možno le pri zelo (eksponentno) velikih razmerjih μ/m_R. V tem primeru nam je rešitev RG pomagala sešteti vse potence

$$\left(\frac{\lambda_R(m_R)}{(4\pi)^2} \ln \frac{\mu}{m_R}\right)^n \tag{456}$$

ki nastopajo v redu n-te zanke. Seveda nismo n-te zanke za $n > 1$ sploh računali, rešitev enačb RG pa nam omogoča, da vsaj te, v tej limiti dominantne člene resumiramo.

Pozoren bralec bo nedvomno spet zbegan. Zakaj bi pa sploh uporabljali tako velika (ali majhna) razmerja μ/m_R, saj jo lahko (vsaj v principu) izberemo poljubno? Razlog za to najdemo, če se sprašujemo za obnašanje preseka za zelo velike energije, to je ko npr. $s/m_R^2 \to \infty$. V primeru (391) bi popravek k drevesnemu redu $-\lambda_R$ bil oblike

$$\frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{s}{m_R^2} \tag{457}$$

in ta številka sploh ni nujno manjša od ena. Višji redi bi prispevali še višje potence

$$\left(\frac{\lambda_R^2}{(4\pi)^2} \ln \frac{s}{m_R^2}\right)^n \tag{458}$$

in razvoj ne bi konvergiral.

Ta problem rešimo z drsečo sklopitveno konstanto (453) in uporabo (451) pri $\mu \approx E$. Tedaj so namreč razmerja

$$\left(\frac{\lambda_R(m_R)}{(4\pi)^2}\ln\frac{s}{\mu^2}\right)^n \tag{459}$$

ki nastopajo v (451) in morebiti v višjih redih dovolj majhna, da se nam ni treba bati za konvergenco. Seveda pa smo vse tovrstne prispevke teh višjih redov spravili v drsečo sklopitveno konstanto

$$\lambda_R(E) = \frac{\lambda_R(m_R)}{1 - \frac{3\lambda_R(m_R)}{(4\pi)^2}\ln\frac{E}{m_R}} \tag{460}$$

Celoten postopek konvergira pod pogojem , da

$$\frac{\lambda_R(E)}{(4\pi)^2} \ll 1 \tag{461}$$

kar pa ni res, ko se približamo Landau-ovem polu (tega se bomo izogibali kot hudiča).

Vidimo, da smo z resumacijo rešili perturbacijski razvoj v primeru zelo velikih (ali majhnih) energij. In v tem je moč sheme z drsečimi sklopitvenimi konstantami.

14 Lekcija 14 (2 h 15 min) Kvantna elektrodinamika do ene zanke

V tem poglavju bom uporabljal metodo protičlenov, vse količine bodo renormalizirane, čeprav ne bom pisal eksplicitno oznake R.

Tedaj je drevesni red renormaliziranega Lagrangiana za QED (izberimo si Feynmanovo umeritev $\xi = 1$)

$$\mathcal{L} = \bar\psi i\partial\!\!\!/\psi - m\bar\psi\psi + e\mu^{\epsilon/2}\bar\psi A\!\!\!/\psi - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}(\partial A)^2 \tag{462}$$

medtem ko so protičleni enake oblike

$$\mathcal{L}_{CT} = \delta Z_2\bar\psi i\partial\!\!\!/\psi - \delta m\bar\psi\psi + \delta Z_1 e\mu^{\epsilon/2}\bar\psi A\!\!\!/\psi - \frac{\delta Z_3}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \tag{463}$$

Te nove člene obravnavamo kot majhno motnjo. So namreč višjega reda v potencah sklopitvene konstante (δZ_i in δm so reda e), zato jih obravnavamo kot interakcijo. Zanje zapišemo sledeča Feynmanova pravila

- protičlen za fermionski propagator

$$i\left(\delta Z_2 \not{p} - \delta m\right) \tag{464}$$

- protičlen za fotonski propagator

$$-i\delta Z_3\left(p^2 g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu\right) \tag{465}$$

- protičlen za verteks

$$i\delta Z_1 e\mu^{\epsilon/2}\gamma_\mu \tag{466}$$

Da je prvi pravilen, lahko preverimo, če upoštevamo celoten kvadratni del za fermion

$$(1+\delta Z_2)\bar{\psi} i\not{\partial}\psi - (m+\delta m)\bar{\psi}\psi$$

Jasno je propagator v tem primeru

$$\frac{i}{(1+\delta Z_2)\not{p} - (m+\delta m)}$$

Če zdaj razvijemo dobimo (upoštevamo da $(M_1 M_2)^{-1} = M_2^{-1} M_1^{-1}$)

$$\begin{aligned}
\frac{i}{(\not{p}-m)+(\delta Z_2\not{p}-\delta m)} &= \frac{i}{(\not{p}-m)[1+(\not{p}-m)^{-1}(\delta Z_2\not{p}-\delta m)]} \\
&= \frac{i}{\not{p}-m} + \frac{i}{\not{p}-m}\left[i\left(\delta Z_2\not{p}-\delta m\right)\right]\frac{i}{\not{p}-m} + \ldots
\end{aligned}$$

kar sovpada z zgornjim pravilom.

Podobno se ni težko prepričati, da da celoten kvadratni del fotona

$$-\frac{1+\delta Z_3}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - \frac{1}{2}(\partial A)^2$$

sledeči propagator

$$\frac{-i}{(1+\delta Z_3)p^2}\left(g_{\mu\nu} + \delta Z_3 \frac{p_\mu p_\nu}{p^2}\right)$$

ki lahko razvijemo v

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-ig_{\mu\alpha}}{p^2}\left[-i\delta Z_3\left(p^2 g^{\alpha\beta} - p^\alpha p^\beta\right)\right]\frac{-ig_{\beta\nu}}{p^2} + \dots$$

zopet kot pravi F. pravilo.

O korekciji verteksa pa seveda ne bi zgubljali besed.

14.1 Propagator elektrona

Prispevek ene zanke k temu se ponavadi označi

$$\frac{i}{\not{p}-m}\left(-i\Sigma(p)\right)\frac{i}{\not{p}-m} \tag{467}$$

kar da za 1-PI G.f. elektrona

$$\Gamma_\psi^{(2)}(p) = \not{p} - m + \delta Z_2 \not{p} - \delta m - \Sigma(p) \tag{468}$$

Sedaj pa k računu:

$$-i\Sigma(p) = \left(ie\mu^{\epsilon/2}\gamma^\alpha\right)\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{i}{\not{k}-m}\frac{-ig_{\alpha\beta}}{(k-p)^2}\left(ie\mu^{\epsilon/2}\gamma^\beta\right) \tag{469}$$

Kot ponavadi uporabimo identiteto

$$\frac{1}{\not{k}-m} = \frac{\not{k}+m}{k^2-m^2} \tag{470}$$

Definicija γ matrik

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \tag{471}$$

velja v poljubnih dimenzijah (tudi necelih), zato pa je ($g^{\alpha}{}_{\alpha} = d$)

$$\begin{aligned} \gamma^{\alpha}\gamma_{\alpha} &= d & (472)\\ \gamma^{\alpha}\gamma^{\mu}\gamma_{\alpha} &= -(d-2)\gamma^{\mu} & (473) \end{aligned}$$

Dobimo najprej

$$\Sigma(p) = -ie^2\mu^{\epsilon}\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{-(d-2)\not{k} + dm}{(k^2-m^2)(k-p)^2} \tag{474}$$

z znanim trikom pa še

$$\Sigma(p) = -ie^2\mu^{\epsilon}\int_0^1 dx \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{-(d-2)\not{k} + dm}{\left[k^2 - m^2(1-x) + (p^2-2kp)x\right]^2} \tag{475}$$

Uvedemo novo spremenljivko $k' = k - xp$ (in črtico izpustimo)

$$\begin{aligned} \Sigma(p) &= -ie^2\mu^{\epsilon}\int_0^1 dx \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{-(d-2)x\not{p} + dm}{\left[k^2 - m^2(1-x) + p^2x(1-x)\right]^2} \\ &= \frac{e^2\mu^{\epsilon}}{(4\pi)^d}\Gamma(2-d/2)\int_0^1 dx \frac{-(d-2)x\not{p} + dm}{\left[m^2(1-x) - p^2x(1-x)\right]^{2-d/2}} \\ &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2}(\not{p} - 4m)\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right) + \mathcal{O}(1) & (476) \end{aligned}$$

Primerjamo z (468) in dobimo v $\overline{MS}$ shemi

$$\begin{aligned} \delta Z_2 &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right) & (477)\\ \delta m &= -4m\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right) & (478) \end{aligned}$$

14.2 Propagator fotona

Vse prispevke na nivoju ene zanke (vključno s protičleni) zapišemo kot

$$\frac{-ig_{\mu\nu}}{p^2} + \frac{-ig_{\mu\alpha}}{p^2}\left[i\Pi^{\alpha\beta}(p) - i\delta Z_3\left(p^2g^{\alpha\beta} - p^{\alpha}p^{\beta}\right)\right]\frac{-ig_{\beta\nu}}{p^2} + \dots \tag{479}$$

kjer je (spomni se na faktor (-1) zaradi fermionske zanke!)

$$
\begin{aligned}
i\Pi^{\alpha\beta}(p) &= (-1)\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} Tr\left(\frac{i}{\not k + \not p - m} ie\mu^{\epsilon/2}\gamma^\alpha \frac{i}{\not k - m} ie\mu^{\epsilon/2}\gamma^\beta\right) \\
&= -e^2\mu^\epsilon \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{Tr\left[\left(\not k + \not p + m\right)\gamma^\alpha\left(\not k + m\right)\gamma^\beta\right]}{\left[(k+p)^2 - m^2\right]\left[k^2 - m^2\right]} \qquad (480)
\end{aligned}
$$

Posplošiti moramo velikost γ matrik v d dimenzijah. Povsem konsistentno lahko definiramo

$$
\begin{aligned}
Tr\,(1) &= f(d) &(481)\\
Tr\left(\gamma^\alpha\gamma^\beta\right) &= f(d) g^{\alpha\beta} &(482)\\
Tr\left(\gamma^\alpha\gamma^\beta\gamma^\mu\gamma^\nu\right) &= f(d)\left(g^{\alpha\beta}g^{\mu\nu} - g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu} + g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu}\right) &(483)
\end{aligned}
$$

pod edinim pogojem, da je $f(4) = 4$.

Dobimo

$$
\begin{aligned}
i\Pi^{\alpha\beta}(p) &= -e^2\mu^\epsilon f(d)\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{2k^\alpha k^\beta + k^\alpha p^\beta + p^\alpha k^\beta + \left(m^2 - k(k+p)\right) g^{\alpha\beta}}{\left[(k+p)^2 - m^2\right]\left[k^2 - m^2\right]} \\
&= -e^2\mu^\epsilon f(d)\int_0^1 dx \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{2k^\alpha k^\beta + k^\alpha p^\beta + p^\alpha k^\beta + \left(m^2 - k(k+p)\right) g^{\alpha\beta}}{\left[k^2 - m^2 + (p^2 + 2kp)x\right]^2}
\end{aligned}
$$

Zopet uvedemo novo spremenljivko $k' = k + xp$ (in črtico izpustimo)

$$
\begin{aligned}
i\Pi^{\alpha\beta}(p) &= -e^2\mu^\epsilon f(d)\int_0^1 dx \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d} \frac{1}{\left[k^2 - m^2 + p^2x(1-x)\right]^2} \qquad (484)\\
&\times \left[-2x(1-x)p^\alpha p^\beta + \left((2/d - 1)k^2 + m^2 - p^2x(1-x)\right) g^{\alpha\beta}\right]
\end{aligned}
$$

kjer sem upošteval relacijo

$$
k^\alpha k^\beta \to \frac{k^2}{d} g^{\alpha\beta} \qquad (485)
$$

ki velja seveda pod integralom.

Preveriti želimo sedaj, ali dobi foton maso zaradi popravkov ene zanke. To bi bila katastrofa, saj bi pomenilo, da smo zlomili umeritveno invarianco. Kot bomo videli, na srečo do tega ne pride, kar nam potrjuje prepričanje, da dimenzijska regularizacija eksplicitno ohranja umeritveno invarianco.

Morebitni masni člen dobimo, ko postavimo $p \to 0$ v zgornjem izrazu. Sledi

$$\begin{aligned}\Pi^{\alpha\beta}(0) = -e^2\mu^\epsilon f(d) g^{\alpha\beta} \quad & \int_0^1 dx \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{m^2+(2/d-1)k^2}{\left(k^2-m^2\right)^2} \\ = -e^2\mu^\epsilon f(d) g^{\alpha\beta} \quad & \left[m^2 \frac{i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{\Gamma(2-d/2)}{\Gamma(2)}\left(\frac{1}{m^2}\right)^{2-d/2} \right. \\ & \left. + (2/d-1)\frac{-i}{(4\pi)^{d/2}}\frac{d}{2}\frac{\Gamma(2-d/2-1)}{\Gamma(2)}\left(\frac{1}{m^2}\right)^{2-d/2-1}\right]\end{aligned} \tag{486}$$

Ob upoštevanju (370) je rezultat točno

$$i\Pi^{\alpha\beta}(0) = 0 \tag{487}$$

kot smo pričakovali (in upali).

Sedaj pa še divergentne dele. Pri dokazu o brezmasnosti fotona smo dokazali, da velja

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{m^2+(2/d-1)k^2}{(k^2-m^2)^2} = 0 \tag{488}$$

Odtod sledi

$$\int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{m^2+(2/d-1)k^2}{\left[k^2-m^2+p^2x(1-x)\right]^2} = \int \frac{d^dk}{(2\pi)^d}\frac{p^2x(1-x)}{\left[k^2-m^2+p^2x(1-x)\right]^2} \tag{489}$$

odkoder

$$i\Pi^{\alpha\beta}(p) = -\frac{2e^2\mu^\epsilon f(d) i}{(4\pi)^{2-\epsilon/2}}\left(p^2g^{\alpha\beta}-p^\alpha p^\beta\right)\Gamma\left(\frac{\epsilon}{2}\right)\int_0^1 dx \frac{x(1-x)}{\left[m^2-p^2x(1-x)\right]^{\epsilon/2}} \tag{490}$$

Limita $\epsilon \to 0$ nam da

$$i\Pi^{\alpha\beta}(p) = -i\frac{4}{3}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(p^2 g^{\alpha\beta} - p^\alpha p^\beta\right)\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right) + \mathcal{O}(1) \qquad (491)$$

Ob zahtevi, da δZ_3 v (479) ravno krajša divergentne dele, dobimo

$$\delta Z_3 = -\frac{4}{3}\frac{e^2}{(4\pi)^2}\left(\frac{2}{\epsilon} - \gamma + \ln 4\pi\right) \qquad (492)$$

14.3 Vaje

1. Izračunaj amplitudo za proces $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ za nepolarizirane fermione v QED na drevesnem redu. Izračunaj diferencialni sipalni presek $d\sigma/d\Omega$ ter totalni sipalni presek σ. (Peskin, str. 131-138)

2. Pri procesu $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ izračunaj vse možne diferencialne preseke za polarizirane fermione. Pri računu vzemi približek $m_e = m_\mu = 0$. (Peskin, str. 141-146)

3. Izračunaj diferencialni nepolarizirani sipalni presek za $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$. Pri tem uporabljaj rezultate za $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$. Podobno s pomočjo znanih rezultatov za Comptonsko sipanje $e\gamma \to e\gamma$ izračunaj presek za anihilacijo $e^+e^- \to \gamma\gamma$. Komentiraj "crossing" simetrijo. (Peskin, str. 153-155 in 168-169)

4. Obravnavaj sistem z interakcijo $\lambda\sigma\phi_1\phi_2$. Za primer, ko pripadajoče mase zadoščajo $m_\sigma > m_1 + m_2$ izračunaj razpadno širino Γ_σ v drevesnem redu. Pokaži, da v najnižjem neničelnem redu λ velja optični teorem

$$m_\sigma\Gamma_\sigma = Im\left(\Gamma^{(2)}_{\sigma\sigma}(m_\sigma^2)\right)$$

   kjer je $\Gamma^{(2)}_{\sigma\sigma}(p^2)$ 2-točkovna 1-PI G.f. za σ.

5. V $\overline{MS}$ shemi pokaži v QED na nivoju ene zanke, da velja $Z_1 = Z_2$, kar sledi iz potrebe po umeritveni invarianci

$$D_\alpha = \partial_\alpha - ieA_\alpha = \partial_\alpha - ie_R A_{R\alpha}$$

6. Izračunaj anomalni magnetni moment elektrona v QED do 1 zanke. Rezultat primerjaj z najnovejšimi meritvami in teoretskimi napovedmi v PDG (dobiš na [5]).

References

[1] M. E. Peskin and D. V. Schroeder, "An Introduction To Quantum Field Theory," *Reading, USA: Addison-Wesley (1995) 842 p*

[2] W. Siegel, "Fields," arXiv:hep-th/9912205.

[3] S. Weinberg, "The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations," *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1995) 609 p*

[4] S. Weinberg, "The quantum theory of fields. Vol. 2: Modern applications," *Cambridge, UK: Univ. Pr. (1996) 489 p*

[5] http://www.slac.stanford.edu/spires/

[6] http://arxiv.org/