

Rešene naloge iz fizike jedra in osnovnih delcev

Jernej Fesl Kamenik
Boštjan Golob

19. marec 2015

Zahvala

Zahvaljujeva se Primožu Koželju za pozorno branje teksta in vse konstruktivne pripombe.

Kazalo

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Fizika jedra | 5 |
| 1.1 | Kvantno mehanski problem dveh teles | 5 |
| 1.2 | Valovna funkcija devterona v približku potencialne jame | 6 |
| 1.3 | Simetrijske lastnosti valovne funkcije devterona | 8 |
| 1.4 | Merjenje atomskih mas | 9 |
| 1.5 | Kinematika razpada α | 9 |
| 1.6 | Stabilnost jeder na razpad α | 10 |
| 1.7 | Izračun verjetnosti za razpad α | 12 |
| 1.8 | Razpad β | 16 |
| 1.9 | Atomsko zajetje elektrona | 17 |
| 1.10 | Spontana jedrska fizija | 17 |
| 1.11 | Jedrski potencial v lupinskem modelu | 18 |
| 1.12 | Magnetni dipolni moment v kvantni mehaniki | 19 |
| 1.13 | Magnetni dipolni moment jedra | 20 |
| 1.14 | Magnetni dipolni moment jedra v lupinskem modelu | 21 |
| 1.15 | Električni kvadrupolni moment jeder | 23 |
| 1.16 | Razpadi γ | 25 |
| 1.17 | Nerelativistična kvantna perturbacijska teorija | 25 |
| 1.18 | Sipalni presek | 26 |
| 1.19 | Elektromagnetno sipanje na jedrih | 26 |
| 2 | Fizika osnovnih delcev | 31 |
| 2.1 | Odklonitev sipalnega preseka od energije vpadnega curka | 31 |
| 2.2 | Sipanje π^+p ter resonanca Δ^{++} | 34 |
| 2.3 | Sipanje preko močne interakcije ter izospin | 36 |
| 2.4 | Kotna porazdelitev pri resonančnem sipanju | 37 |
| 2.5 | Kvarki in leptoni ter njihova kvantna števila | 40 |
| 2.6 | Valovne funkcije hadronov | 43 |
| 2.7 | Relativistično sipanje | 46 |
| 2.8 | Sipalni presek in Lorentzove transformacije | 47 |
| 2.9 | Sipanje brezspinskih delcev preko EM interakcije | 48 |
| 2.10 | Antidelci in križanje | 48 |
| 2.11 | Elastično EM sipanje $\pi^-\pi^-$ ter $\pi^-\pi^+$ | 49 |
| 2.12 | Ohranitev vrtilne količine za Diracove delce | 50 |
| 2.13 | Diracovi spinorji in sučnost | 51 |
| 2.14 | Gordonova dekompozicija EM toka za Diracove delce | 52 |

| | | |
|------|--|----|
| 2.15 | Nerelativistična limita EM interakcij za Diracove delce | 52 |
| 2.16 | Ultrarelativistična limita EM interakcij za Diracove delce | 53 |
| 2.17 | Kotna porazdelitev v ultrarelativističnem EM sipanju Diracovih delcev | 55 |
| 2.18 | Sledi γ matrik | 56 |
| 2.19 | Elastično EM sipanje $e^-\mu^- \rightarrow e^-\mu^-$ ter anihilacija $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ | 57 |
| 2.20 | Møllerjevo sipanje e^-e^- ter Bhabha sipanje e^+e^- | 60 |
| 2.21 | Sipanje $e^-\nu_\mu \rightarrow \nu_e\mu^-$ preko šibke interakcije | 62 |
| 2.22 | Razpad miona | 63 |

Poglavje 1

Fizika jedra

1.1 Kvantno mehanski problem dveh teles

Obravnavamo problem dveh teles, med katerima predpostavimo potencial, odvisen le od njune medsebojne razdalje. Kvantnomehansko takšno situacijo v splošnem opišemo z naslednjim Hamiltonovim operatorjem

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_1^2}{2m_1} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_2^2}{2m_2} + V(\hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2), \quad (1.1)$$

kjer so m_i , $\hat{\mathbf{x}}_i$ in $\hat{\mathbf{p}}_i$ masa, operator koordinatnega vektorja ter operator vektorja gibalne količine i -tega delca. Če definiramo celotno (M) in reducirano (μ) maso sistema kot $M \equiv m_1 + m_2$ in $\mu \equiv m_1 m_2 / M$, lahko uvedemo naslednje nove spremenljivke

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_r &\equiv \hat{\mathbf{x}}_1 - \hat{\mathbf{x}}_2, & \hat{\mathbf{p}}_r &\equiv \mu(\hat{\mathbf{v}}_1 - \hat{\mathbf{v}}_2) = (m_2 \hat{\mathbf{p}}_1 - m_1 \hat{\mathbf{p}}_2) / M, \\ \hat{\mathbf{x}}_{\text{cm}} &\equiv (m_1 \hat{\mathbf{x}}_1 + m_2 \hat{\mathbf{x}}_2) / M, & \hat{\mathbf{p}}_{\text{cm}} &\equiv \hat{\mathbf{p}}_1 + \hat{\mathbf{p}}_2. \end{aligned}$$

Lahko je pokazati, da kanonična komutacijska pravila ($[\hat{x}_i^\nu, \hat{p}_j^\mu] = i\hbar \delta_{ij} \delta^{\mu\nu}$, kjer indeksa $\mu, \nu = 1, 2, 3$ označujeta kartezične komponente tri-dimenzionalnih vektorjev) veljajo tudi za nove spremenljivke $\hat{\mathbf{x}}_r, \hat{\mathbf{p}}_r, \hat{\mathbf{x}}_{\text{cm}}, \hat{\mathbf{p}}_{\text{cm}}$, in lahko Hamiltonov operator prepisemo v obliko

$$\hat{H} = \frac{\hat{\mathbf{p}}_r^2}{2\mu} + \frac{\hat{\mathbf{p}}_{\text{cm}}^2}{2M} + V(\hat{\mathbf{x}}_r), \quad (1.2)$$

ki ni več odvisna od koordinate $\hat{\mathbf{x}}_{\text{cm}}$. Zato za rešitev dvodelčne valovne funkcije uporabimo nastavek s separacijo spremenljivk v koordinatni reprezentaciji $\psi(\mathbf{x}_{\text{cm}}, \mathbf{x}_r) = e^{i\mathbf{k}_{\text{cm}} \cdot \mathbf{x}_{\text{cm}}} \psi(\mathbf{x}_r)$. Iskanje rešitev Hamiltonovega operatorja ($\hat{H}\psi = E\psi$) tako zreduciramo na

$$\left(\frac{\hat{\mathbf{p}}_r^2}{2\mu} + V(\mathbf{x}_r) \right) \psi(\mathbf{x}_r) = E_r \psi(\mathbf{x}_r), \quad (1.3)$$

kjer je celotna energija sistema $E = E_r + \hbar^2 |\mathbf{k}_{\text{cm}}|^2 / 2M$. V nadaljevanju se tako spopadamo le z mnogo lažjim enodelčnim problemom (povzeto po [1], poglavje 6.4).

1.2 Valovna funkcija devterona v približku potencialne jame

Med protonom (p) in nevtronom (n) v jedru devterona obstaja jedrski potencial, ki ju veže. V približku obravnavajmo tak potencial kot končno potencialno jamo globine V_0 in z radijem R_0 . Uporabimo pristop iz primera 1.1 in Schrödingerejevo enačbo za kvantno-mehanski problem dveh teles prepisemo v enodelčno obliko z reducirano maso $\mu = (m_p m_n)/(m_p + m_n) \simeq m_p/2$. Ker je naš potencial sferično simetričen, je primerna izbira koordinatne upodobitve s krogelnimi koordinatami, v kateri se operator kvadrata gibalne količine \hat{p}^2 zapiše kot

$$\hat{p}^2 = -\hbar^2 \nabla^2 = -\hbar^2 \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right] + \frac{\hbar^2 \hat{l}^2}{r^2}, \quad (1.4)$$

kjer smo člene z odvodi po kotnih koordinatah (θ in ϕ) stlačili v operator \hat{l}^2 , ki je ravno operator kvadrata vrtilne količine. Rešitev Schrödingerejeve enačbe nastavimo v obliki

$$\psi(r, \theta, \phi) = R(r) Y_{lm}(\theta, \phi), \quad (1.5)$$

kjer je Y_{lm} lastna funkcija operatorja \hat{l}^2 : $\hat{l}^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$. Tako dobimo

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial R}{\partial r} \right] + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2\mu r^2} R + (V - E)R = 0. \quad (1.6)$$

Enačba se še nekoliko poenostavi z nastavkom $R(r) = u(r)/r$:

$$u'' - \frac{l(l+1)}{r^2} u - \frac{2\mu}{\hbar^2} (V - E)u = 0. \quad (1.7)$$

Oglejmo si osnovno stanje z $l = 0$, pri katerem lahko drugi člen v gornji enačbi izpustimo. Znotraj radija R_0 ima potencial vrednost $-V_0$, energija vezanega stanja pa mora po definiciji prav tako biti negativna $E < 0$, tako da lahko zapišemo

$$u'' + k_d^2 u = 0, \quad \text{kjer je } k_d^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} (V_0 - |E|), \quad (r < R_0). \quad (1.8)$$

Rešitev te enačbe je oblike $u = A \sin k_d r$. V splošnem je mogoča tudi rešitev oblike $\cos k_d r$, vendar le-ta prispevek k valovni funkciji ($R = u/r$) v izhodišču (ko gre $r \rightarrow 0$) divergira, zato ne more opisovati fizikalne valovne funkcije. Analogno v območju $r \geq R_0$, kjer potencial pade na nič ($V = 0$) velja

$$u'' - \kappa^2 u = 0, \quad \text{kjer je } \kappa^2 = \frac{2\mu}{\hbar^2} |E|, \quad (r \geq R_0). \quad (1.9)$$

Rešitev v tem področju je oblike $u = B e^{-\kappa(r-R_0)}$. Tudi dokrat dodatno možno rešitev oblike $e^{\kappa r}$ zavržemo, saj divergira, ko gre $r \rightarrow \infty$. Valovna funkcija mora biti pri $r = R_0$ zvezna in zvezno odvedljiva (rešujemo namreč diferencialno enačbo drugega reda), od koder dobimo dva pogoja

$$A \sin k_d R_0 = B, \quad (1.10a)$$

$$A k_d \cos k_d R_0 = -\kappa B. \quad (1.10b)$$

Deljenje obeh enačb nam da $k_d \text{ctg} k_d R_0 = -\kappa$ oziroma

$$\text{ctg} k_d R_0 = -\frac{\kappa}{k_d} = -\sqrt{\frac{|E|}{V_0 - |E|}}. \quad (1.11)$$

Rešitev te implicitne enačbe nam da zvezo med vezavno energijo devterona ($|E|$), njegovim radijem (dosegom jedrskega potenciala R_0) ter efektivno globino jedrskega potenciala (V_0). Če predpostavimo, da je glede na globino efektivnega potenciala, devteron šibko vezano stanje ($|E| \ll V_0$), lahko desno stran enačbe postavimo na nič, pa dobimo enostavnejšo zvezo

$$k_d R_0 \simeq \frac{(2n+1)\pi}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (|E| \ll V_0). \quad (1.12)$$

Najbolj vezano stanje dobimo pri $n = 0$ (za pozitiven k_d), in če aproksimiramo še $k_d \approx \sqrt{2\mu V_0/\hbar^2}$, dobimo zvezo med globino potenciala in njegovim radijem

$$V_0 R_0^2 \simeq \frac{\pi^2 \hbar^2}{8\mu}. \quad (1.13)$$

Upoštevajoč maso nukleonov $m_p c^2 \simeq 940$ MeV, radij devterona $R_0 \simeq 2$ fm, ter zvezo $\hbar c \simeq 200$ MeV fm dobimo za globino potenciala približno $V_0 \approx 26$ MeV. Dejansko so tipične vrednosti efektivne globine potenciala ter vezavne energije $V_0 \simeq 36$ MeV ter $|E| \simeq 2,2$ MeV, kar nam potrjuje predpostavko, da je glede na globino efektivnega potenciala, devteron precej šibko vezano stanje.

Oglejmo si sedaj stanja z $l \neq 0$. Iz enačbe (1.7) razberemo, da člen z $l(l+1)$ deluje kot dodaten odbojni potencial. Pri $l = 1$ bi bil potencial višji za približno $\hbar^2/\mu R_0^2 \approx 20$ MeV. Na podlagi numeričnih ocen glede globine potenciala in vezavne energije osnovnega stanja devterona iz prejšnjega odstavka lahko sklepamo, da stanja z $l > 0$ niso več vezana.

Na koncu si v našem približku oglejmo še s kakšno verjetnostjo najdemo oba nukleona, ki sestavljata devteron v osnovnem stanju ($l = 0$) izven dosega jedrskega potenciala. Za ta namen potrebujemo zvezo med normalizacijskima konstantama valovne funkcije v območjih $r < R_0$ in $r \geq R_0$, ki jo dobimo iz pogoja zveznosti pri $r = R_0$

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{\sin k_d R_0}. \quad (1.14)$$

Njuni absolutni vrednosti sicer dobimo iz normalizacijskega pogoja za celotno valovno funkcijo $\int |\psi|^2 dV = 1$ oziroma (ob primerni normalizaciji Y_{lm})

$$|A|^2 \int_0^{R_0} (\sin k_d r)^2 dr + |B|^2 \int_{R_0}^{\infty} e^{-2\kappa(r-R_0)} dr = 1. \quad (1.15)$$

Od tod že lahko izrazimo razmerje verjetnosti da najdemo oba nukleona izven (P_{out}) ali znotraj (P_{in}) radija jedrskega potenciala

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = \frac{|B|^2 \int_{R_0}^{\infty} e^{-2\kappa(r-R_0)} dr}{|A|^2 \int_0^{R_0} (\sin k_d r)^2 dr} = \frac{(\sin k_d R_0)^2}{2\kappa \left(\frac{R_0}{2} - \frac{1}{4k_d} \sin 2k_d R_0 \right)}. \quad (1.16)$$

Ob numeričnih vrednostih iz začetka naloge ugotovimo da je to razmerje približno $P_{out}/P_{in} \simeq 1,8$, torej je bolj verjetno, da se oba nukleona nahajata izven radija efektivnega potenciala.

1.3 Simetrijske lastnosti valovne funkcije devterona

Proton (p) in nevtron (n) občutita enako močno silo, zato ju lahko obravnavamo v približku kot dve stanji nukleona z različnim kvantnim številom *izospina* I . Analogno opisu stanj s spinom $1/2$ lahko potem protonu in nevtronu pripišemo lastne vrednosti operatorja izospina (tabela 1.1). Valovna funkcija za stanje dveh nukleonov je torej sestavljena kot produkt prostorskega,

| nukleon | I | I_3 |
|---------|-------|--------|
| p | $1/2$ | $1/2$ |
| n | $1/2$ | $-1/2$ |

Tabela 1.1: Izospin protona in nevtrona.

spinskega in izospinskega dela

$$\psi = \psi_{space} \psi_{spin} \psi_{izospin}. \quad (1.17)$$

Ker sta proton in nevtron fermiona, mora biti celotna valovna funkcija v gornjem približku antisimetrična na zamenjavo dveh nukleonov. V prostorskem delu takšna zamenjava ustreza zrcaljenju prostora in je torej njena simetrija določena s kotno odvisnostjo valovne funkcije. V našem približku primera 1.2 je ta določena z Y_{lm} in je $(-1)^l$. Za spinski (S) in izospinski (I) del imamo enake možnosti in sicer (stanje $|1/2, 1/2\rangle$ označimo kot $|\uparrow\rangle$, stanje $|1/2, -1/2\rangle$ pa kot $|\downarrow\rangle$)

$$|1, 1\rangle = |\uparrow\rangle|\uparrow\rangle, \quad (1.18a)$$

$$|1, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle + |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle], \quad (1.18b)$$

$$|1, -1\rangle = |\downarrow\rangle|\downarrow\rangle, \quad (1.18c)$$

$$|0, 0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle], \quad (1.18d)$$

kjer so prve tri valovne funkcije simetrične, zadnja pa antisimetrična na zamenjavo nukleonov. Devteronu v izospinskem prostoru seveda ustrezata le stanji $|1, 0\rangle$ in $|0, 0\rangle$, ki vsebujeta po en nevtron in en proton. Če je edino vezano stanje devterona pri $l = 0$, je prostorska valovna funkcija simetrična. Torej mora biti kombinirana simetrija spinskega in izospinskega dela antisimetrična. Na voljo sta dve možnosti $S = 1, I = 0$ ali $S = 0, I = 1$. Pripadata jima spektroskopski oznaki $(^{2s+1}l_j)$ 3S_1 ter 1S_0 . Izkaže se, da devteron nima vezanega stanja s celotno vrtilno količino $j = 0$ in torej stanje 1S_0 ni vezano. To potrdi tudi meritev neničelnega magnetnega momenta devterona. Sklepamo torej, da ima jedrska sila tudi spinsko-odvisno komponento.

1.4 Merjenje atomskih mas

Za merjenje mas uporabljamo pripravo, ki je sestavljena iz dveh delov. V prvem nerelativistično pospešimo enkrat ionizirane atome (ione) z znano napetostjo U , tako da pridobijo kinetično energijo $mv^2/2 = eU$. V drugem delu ukrivimo tir ionov s prečnim magnetnim poljem \mathbf{B} . Radij tira r dobimo iz izraza za centripetalno silo $mv^2/r = ev|\mathbf{B}|$, oziroma

$$r = \frac{1}{|\mathbf{B}|} \sqrt{\frac{2mU}{e}}. \quad (1.19)$$

Za umeritev uporabimo ione izotopa $^{12}_6\text{C}$, s pomočjo katerega je definirana univerzalna atomska masna enota $u \equiv M_a(^{12}_6\text{C})/12 = 931,5 \text{ MeV}/c^2$, kjer smo z $M_a(X)$ označili maso atoma X . Masa jedra $^{12}_6\text{C}$ je potem $M_j(^{12}_6\text{C}) = 12u - 6m_e$, kjer je masa elektrona $m_e = 5.5 \times 10^{-4}u$, masa iona pa $M_i(^{12}_6\text{C}) = 12u - m_e$. Ker naravni ogljik v 1,1% nastopa kot izotop $^{13}_6\text{C}$, bomo poleg tira $^{12}_6\text{C}$ videli tudi tir teh ionov. Izmerjeno razmerje radijev je $q \equiv r(^{13}_6\text{C})/r(^{12}_6\text{C}) = 1,041$. Od tod lahko določimo vezavno energijo $^{13}_6\text{C}$. Velja namreč $M_i(^{13}_6\text{C}) = q^2 M_i(^{12}_6\text{C})$ ter $M_j(^{13}_6\text{C}) = M_i(^{13}_6\text{C}) - 5m_e$. Od tod sledi po definiciji vezavne energije $W_v/c^2 = 6m_p + 7m_n - M_j(^{13}_6\text{C}) = 0,1u$, kjer smo uporabili še masi protona in nevtrona $m_p = 1,0073u$ in $m_n = 1,0087u$.

1.5 Kinematika razpada α

Obravnavamo razpad jedra X v jedro Y ter delec α . Upoštevati moramo ohranitev gibalne količine

$$\mathbf{p}_X = \mathbf{p}_Y + \mathbf{p}_\alpha, \quad (1.20)$$

ki se v težiščnem sistemu poenostavi ($\mathbf{p}_Y = -\mathbf{p}_\alpha$) in da relacijo med kinetičnima energijama obeh razpadnih produktov

$$T_\alpha = \frac{|\mathbf{p}_\alpha|^2}{2M_\alpha} = \frac{|\mathbf{p}_Y|^2}{2M_\alpha} = T_Y \frac{M_Y}{M_\alpha}. \quad (1.21)$$

Sedaj upoševamo še ohranitev energije

$$M_X c^2 = M_Y c^2 + T_Y + M_\alpha c^2 + T_\alpha, \quad (1.22)$$

pa lahko izrazimo kinetično energijo delca α v težiščnem sistemu kot

$$T_\alpha = \frac{M_X c^2 - (M_Y + M_\alpha) c^2}{1 + \frac{M_\alpha}{M_Y}}. \quad (1.23)$$

Če sta jedri X in Y dosti težji od delca α ($M_{X,Y} \gg M_\alpha$) velja približno

$$T_\alpha \simeq (M_X - M_Y - M_\alpha) c^2, \quad (1.24)$$

torej večino sproščene energije v razpadu odnese delec α v obliki kinetične energije.

1.6 Stabilnost jeder na razpad α

Želimo oceniti od katerega masnega števila (A) naprej, lahko jedra α -razpadejo. Razpad je možen, če bo sproščena kinetična energija, ki jo odnese delec α pozitivna ($T_\alpha \geq 0$). Obravnavamo jedro X z masnim številom A in vrstnim številom Z (A_ZX), ki razpade v jedro ${}^{A-4}_{Z-2}Y$ ter delec α (4_2He). Maso posameznega jedra lahko v splošnem zapišemo kot razliko vsote mas nukleonov (m_n) v jedru¹ ter vezavne energije jedra (W_v)

$$M(A, Z)c^2 \simeq Am_n c^2 - W_v(A, Z). \quad (1.25)$$

Kinetično energijo delca α v razpadu lahko torej izrazimo kot

$$\begin{aligned} T_\alpha &\simeq Am_n c^2 - W_v(A, Z) - (A-4)m_n c^2 + W_v(A-4, Z-2) - 4m_n c^2 + W_v(4, 2) \\ &= W_v(4, 2) - [W_v(A, Z) - W_v(A-4, Z-2)]. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Za vezavno energijo jedra 4_2He bomo uporabili kar empirično vrednost $W_v(4, 2) = 28,3$ MeV. Za dovolj velika A in Z , lahko razliko vezavnih energij začetnega in končnega jedra aproksimiramo z diferenciali ter zapišemo

$$T_\alpha \simeq W_v(4, 2) - \frac{\partial W_v}{\partial A} \delta A - \frac{\partial W_v}{\partial Z} \delta Z, \quad (1.27)$$

kjer je $\delta A = 4$ in $\delta Z = 2$. Za oceno vezavne energije jeder bomo uporabili semi-empirično *Weizsäckerjevo formulo*

$$W_v(A, Z) = w_0 A - w_1 A^{2/3} - w_2 \frac{Z^2}{A^{1/3}} - w_3 \frac{(A-2Z)^2}{A} - w_4 A^{-3/4} \delta(A, Z), \quad (1.28)$$

kjer je

$$\delta(A, Z) = \begin{cases} -1 & \text{sodo - sodo jedra,} \\ 0 & \text{sodo - liha jedra,} \\ 1 & \text{liho - liha jedra.} \end{cases} \quad (1.29)$$

Prvi člen ($w_0 = 15,8$ MeV) predstavlja povprečno vezavno energijo jedra na nukleon, drugi ($w_1 = 17,8$ MeV) je prispevek površinskih nukleonov, tretji ($w_2 = 0,71$ MeV) je coulombski odbojni EM prispevek, četrti ($w_3 = 23,7$ MeV) pa je t.i. paritveni člen. Ker je jedro 4_2He sodo-sodo (ima sodo število protonov in sodo število nevtronov) se zadnji člen ($w_4 = 11,2$ MeV) v razpadu α ne spremeni. Pri zelo težkih jedrih zaradi negativne potenčne odvisnosti od masnega števila A ta člen ne bo dosti vplival na energijsko bilanco v razpadu α in ga bomo v nadaljevanju zanemarili. Z odvajanjem gornje formule po A in Z dobimo torej oceno za kinetično energijo delca α

$$T_\alpha \simeq 28,3 \text{ MeV} - 4w_0 + \frac{8}{3} \frac{w_1}{A^{1/3}} + 4w_2 \frac{Z}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{Z}{3A}\right) - 4w_3 \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2. \quad (1.30)$$

Ker nas zanima minimalno masno število A , pri katerem jedra razpadejo α , se lahko omejimo le na najbolj stabilna jedra z danim A . Ta pogoj uporabimo za izbiro primernega vrstnega števila Z , zahtevamo namreč

$$\left. \frac{\partial W_v}{\partial Z} \right|_{A=\text{konst.}} = 0, \quad (1.31)$$

¹Razpad α poteka preko močne interakcije, zato se v njem števili protonov in nevtronov ohranjata in lahko za izračun uporabimo kar 'povprečno' maso nuklenov.

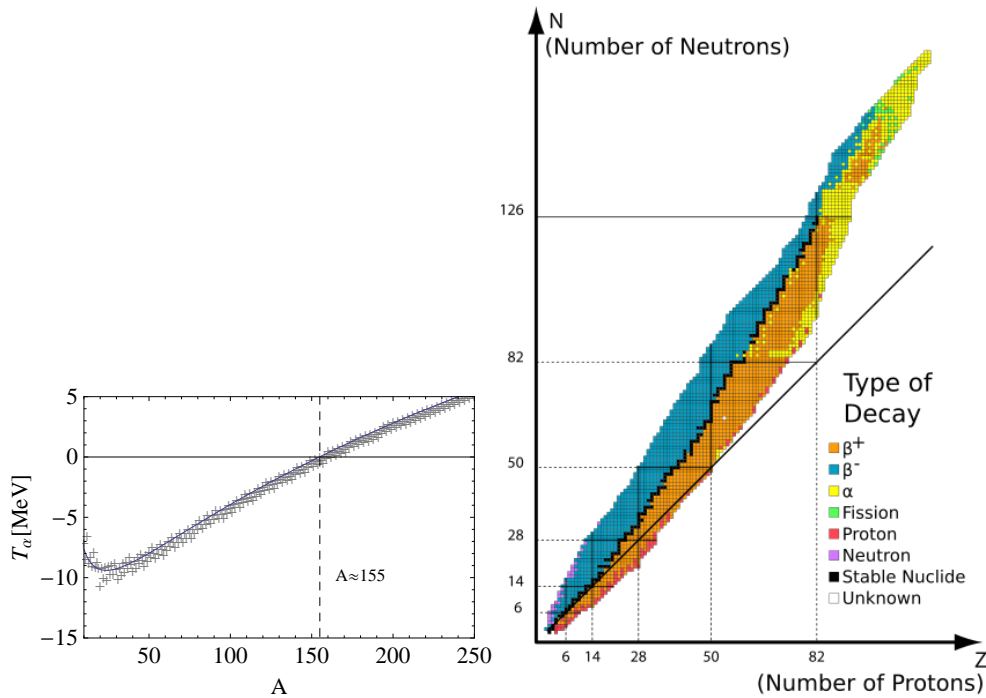
z rešitvijo

$$Z = \frac{A}{2 + \frac{w_2}{2w_3} A^{2/3}} \simeq \frac{A}{2 + 0,015A^{2/3}}. \quad (1.32)$$

Numerična rešitev za odvisnost T_α od A za nekaj mejnih jeder pa je podana v tabeli 1.2 ter na sliki 1.1 (levo). Primerjava dobljenega pogoja največje stabilnosti z empiričnimi podatki je predstavljena na sliki 1.1 (desno). V resnici pride do razpadov α pri jedrih težjih od ${}_{82}^{207}\text{Pb}$. Pri

| A | Z | T_α [MeV] |
|-----|-----|------------------|
| 140 | 58 | -0,9 |
| 150 | 62 | 0,08 |
| 160 | 66 | 1,12 |

Tabela 1.2: Sproščena energija v razpadu α za nekaj mejnih sodo-sodih jeder.

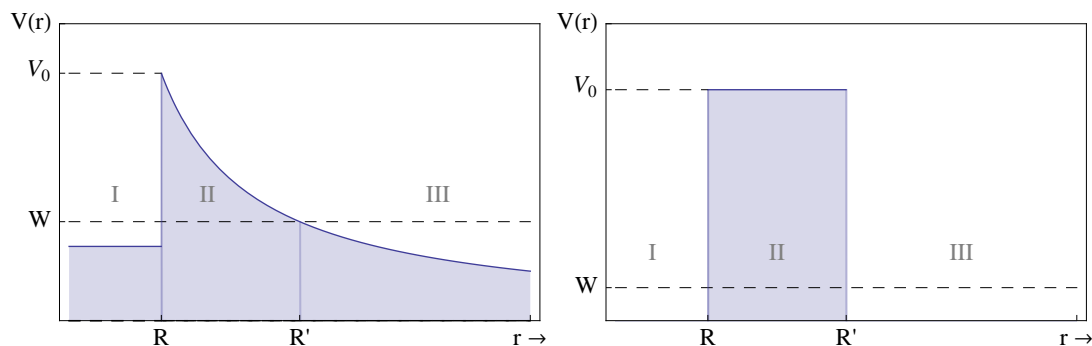


Slika 1.1: Numerična rešitev za kinetično energijo delca α (levo), ter najbolj stabilna jedra pri danem masnem številu A (desno).

lažjih jedrih je namreč verjetnost tuneliranja skozi potencialno bariero (glej primer 1.7) tako majhna, da so njihovi α razpadni časi nemerljivo dolgi.

1.7 Izračun verjetnosti za razpad α

Razpad α je posledica elektrostatskih odbojnih sil, ki so pri težkih jedrih dovolj močne, da jedro ni več stabilno. Razpad bomo obravnavali kot dvodelčni problem iz primera 1.1. Predpostavimo, da je potencial med delcema odvisen le od njune medsebojne razdalje ($\hat{r} \equiv |\hat{\mathbf{x}}_r|$), ne pa tudi absolutne smeri ($V(\hat{\mathbf{x}}_r) = V(\hat{r})$). Celotni potencial je sestavljen iz dveh komponent: (1) privlačen jedrski potencial popolnoma prevladuje pri majhnih medsebojnih razdaljah delcev vendar je kratkega dosega. Njegovih podrobnosti ne poznamo, zato ga opišemo v približku končno razsežne potencialne jame; (2) Odbojni elektrostatski potencial, ki ga poznamo in je oblike $V(\hat{r}) = e^2 2(Z-2)/4\pi\epsilon_0\hat{r}$, kjer je $2e$ naboj delca α in $(Z-2)e$ naboj preostanka razpadajočega jedra. Pri tem je Z vrstno število razpadajočega jedra. V koordinatni upodobitvi ($\hat{r} = r$) ima torej celotni potencial približno obliko, kot je skicirana na levi sliki 1.2. Za razpad α mora biti



Slika 1.2: Potencial težkega jedra in delca α v približku potencialne jame za nuklearni potencial (levo) ter v približku stopničaste potencialne bariere (desno).

globina te potencialne jame nad ničelnim nivojem, ki je določen s potencialom med delcem α in preostankom jedra v neskončni oddaljenosti ($V(r \rightarrow \infty)$). V nasprotnem primeru bi bilo za delec α ugodneje ostati znotraj potencialne jame in jedro ne bi razpadlo. Elektrostatski odbojni potencial posledično deluje kot potencialna bariera skozi katero mora delec α tunelirati, če naj jedro razpade.

Zanima nas verjetnost za razpad jedra na časovno enoto, ki jo parametriziramo z razpadno konstanto w . Za razpadajoče jedro namreč velja, da je verjetnost za njegov razpad v danem trenutku ($-dn/dt$) sorazmerna verjetnosti, da jedro še ni razpadlo (n) oziroma

$$\frac{dn}{dt} = -wn. \quad (1.33)$$

Po kontinuitetni enačbi in Gaussovemu zakonu je količina na levi strani enačbe enaka integralu izhodnega toka verjetnosti po površini zaključene ploskve, ki popolnoma zaobjema jedro $-dn/dt = \int (\nabla \cdot \mathbf{j}) dV = \int \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$. V veliki oddaljenosti od jedra ($r \gg R'$) in za sferično simetrično rešitev, je (radialna) hitrost delca α konstantna in jo označimo z v_α , površinski integral toka ($\mathbf{j} = \mathbf{v}_\alpha |\psi|^2$) pa se poenostavi

$$-\frac{dn}{dt} = v_\alpha \int_{r \gg R'} |\psi(\mathbf{r})|^2 r^2 d\Omega, \quad (1.34)$$

kjer je Ω prostorski kot. Po drugi strani pa lahko verjetnost n aproksimiramo kar z verjetnostjo,

da se delec α nahaja v področju (I) znotraj radija R

$$n = \int_{r < R} |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r}. \quad (1.35)$$

Na časovnih intervalih mnogo krajših kot $1/w$ lahko količini n in \mathbf{j} obravnavamo kot konstantni in problem poskušamo rešiti s pomočjo časovno neodvisne Schrödingerjeve enačbe.

Za lažji račun gornji potencial še dodatno aproksimiramo z oglatim stopničastim potencialom na desni sliki 1.2, kjer smo zanemarili tudi majhno potencialno razliko, ki jo potrebujemo med področjema I in III . Ker je potencial krogelno simetričen, podobno kot v nalogi 1.2 za rešitev uporabimo nastavek

$$\psi(r, \theta, \phi) = \frac{u(r)}{r} Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (1.36)$$

s katerim se Schrödingerjeva enačba zapiše kot

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} u'' + \frac{\hbar^2(l+1)l}{2\mu r^2} u + V(r)u = Wu. \quad (1.37)$$

Drugi člen z leve nastopa v enačbi kot dodaten pozitiven potencial. Če torej delec α odnese neničelno vrtilno količino bo težje tuneliral. Gornjo mejo za verjetnost tuneliranja tako dobimo pri $l = 0$, ko je rešitev tudi sferično simetrična.

V območju I, kjer potencial izgine, zapišemo

$$u'' + k^2 u = 0, \quad (1.38)$$

kjer je $k^2 = 2\mu W/\hbar^2$. Rešitev je potem oblike $u_I = Ae^{ikr} + Be^{-ikr}$. V drugem delu (območje II) je višina potenciala V_0 in zapišemo

$$u'' - \kappa^2 u = 0, \quad (1.39)$$

kjer je $\kappa^2 = 2\mu(V_0 - W)/\hbar^2$. Rešitev v tem območju je potem oblike $u_{II} = Ce^{\kappa r} + De^{-\kappa r}$. V področju III je situacija podobna kot v primeru I , le da sedaj nimamo odbitega, temveč le prepuščen val: $u_{III} = Ee^{ikr}$.

Sedaj že lahko zapišemo integrale verjetnostne gostote, ki nastopajo v izrazih za n in $\nabla \cdot \mathbf{j}$. V območju III je površinski integral $\int_r |\psi(\mathbf{r})|^2 d^2\mathbf{r} = 4\pi|E|^2$, v območju I pa je prostorski integral $\int_{r < R} |\psi(\mathbf{r})|^2 d^3\mathbf{r} = 4\pi \int_0^R (|A|^2 + |B|^2 + AB^*e^{2ikr} + A^*Be^{-2ikr}) dr$

Iz pogojev zveznosti in zvezne odvedljivosti rešitev na mejah med območji dobimo štiri enačbe iz katerih lahko izluščimo zvezo med normalizacijskima konstantama A in E ter tudi A in B

$$\frac{A}{E} = e^{ikL} \left[\frac{(\kappa^2 - k^2)}{2ik\kappa} \sinh \kappa L - \cosh \kappa L \right], \quad (1.40)$$

$$\frac{A}{B} = e^{-2ikR} \left[\frac{(\kappa^2 - k^2) \sinh \kappa L - 2ik\kappa \cosh \kappa L}{(\kappa^2 + k^2) \sinh \kappa L} \right]. \quad (1.41)$$

kjer smo označili širino potencialne bariere z $L = R' - R$. Če je razsežnost potencialne jame (jedra) velika v primerjavi z valovno dolžino delca α ($kR \gg 1$) in je površina pod potencialno bariero velika ($\kappa L \gg 1$) se gornja dva izraza poenostavita in lahko izrazimo razpadno konstanto w s pomočjo integralov naših rešitev v območjih I in III v zelo kompaktni obliki

$$w \simeq \frac{v_\alpha}{R} \frac{|E|^2}{|A|^2 + |B|^2} \simeq \frac{v_\alpha}{2R} \frac{|E|^2}{|A|^2} \simeq \frac{8v_\alpha}{R} \left(\frac{k\kappa}{\kappa^2 + k^2} \right)^2 e^{-2\kappa L}. \quad (1.42)$$

V prvem koraku smo v imenovalcu (upoštevajoč $kR \gg 1$) zanemarili integral interferenčnega člena oblike

$$\int_0^R \left(AB^* e^{2ikr} + A^* B e^{-2ikr} \right) dr = 2\Re \left(AB^* e^{ikR} \right) \frac{\sin kR}{kR} R. \quad (1.43)$$

V drugem koraku smo uporabili $\kappa L \gg 1$ in aproksimirali

$$|B|^2 \simeq |A|^2 \frac{(\kappa^2 + k^2)^2}{(\kappa^2 - k^2)^2 + 4k^2 \kappa^2} \simeq |A|^2. \quad (1.44)$$

V tretjem koraku pa smo v istem približku poenostavili še zvezo med $|E|$ in $|A|$.

Najizrazitejša v izrazu (1.42) je eksponentna odvisnost razpadne konstante w od produkta $g \equiv 2\kappa L$. Bolj realističnega opisa se tako lahko nadejamo če za elektrostatski potencial vzamemo pravilno radialno odvisnost, rešitev pa poiščemo v t.i. WKB aproksimaciji (potencial na sl. 1.1 (levo) predstavljamo kot sestavljenega iz velikega števila potencialnih skokov različnih višin)

$$g \simeq 2 \int_R^{R'} \kappa(r) dr = 2 \sqrt{\frac{2\mu}{\hbar^2}} \int_R^{R'} \sqrt{\frac{e^2 2(Z-2)}{4\pi\epsilon_0 r} - W} dr. \quad (1.45)$$

Upoštevamo še $V(R) \equiv V_0$ in $V_0 R = W R'$ pa lahko gornji integral izvednotimo

$$\begin{aligned} g &\simeq 2V_0 R \sqrt{\frac{2\mu}{W\hbar^2}} \int_{R/R'}^1 \sqrt{\frac{1}{u} - 1} du \simeq 2V_0 R \sqrt{\frac{2\mu}{W\hbar^2}} \left[\frac{\pi}{2} - 2\sqrt{R/R'} + \dots \right] \\ &\simeq \pi \alpha_{\text{em}} 2(Z-2) \sqrt{\frac{2\mu c^2}{W}} - 4 \sqrt{\frac{2(Z-2)\alpha_{\text{em}} R \mu c^2}{\hbar c}} + \dots, \end{aligned} \quad (1.46)$$

kjer smo v prvem koraku integral izvednotili do drugega reda razvoja po R'/R , v drugem pa izrazili V_0 s pomočjo radija jedra, nabojev jedra in delca α ter konstante fine strukture $\alpha_{\text{em}} = e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c \simeq 1/137$. Poglejmo si odvisnost tako dobljene razpadne konstante (oz. inverznega razpadnega časa) od energije W , ki ustreza ravno kinetični energiji delca α v veliki oddaljenosti od jedra

$$\log w = a_1 + a_2 \log \beta_\alpha + \frac{a_3}{\beta_\alpha}, \quad (1.47)$$

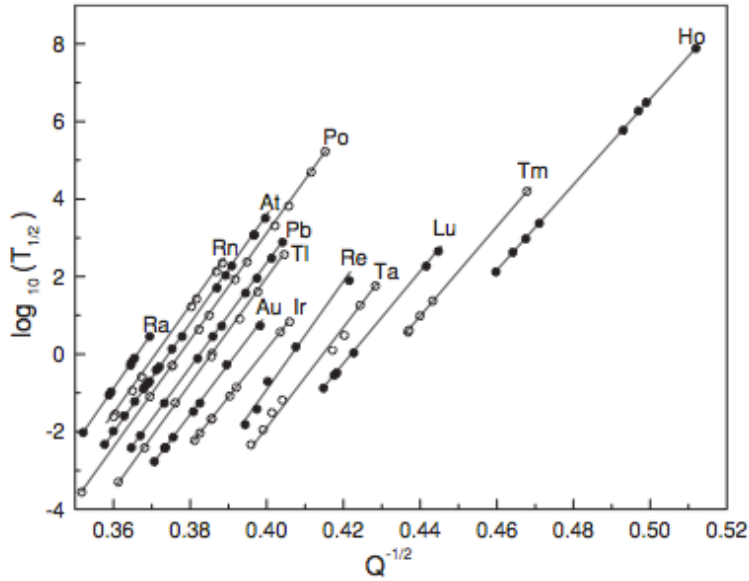
kjer smo izraz $\sqrt{2\mu c^2/W}$ aproksimirali kar s hitrostjo izsevanega delca α ($\beta_\alpha \equiv v_\alpha/c$). Takšna odvisnost je bila potrjena tudi empirično (slika 1.3) in dejstvo, da razpadne konstante za razpad α za podobna jedra (Z in R) ležijo na krivulji, ki jo opisuje, pravimo *Geiger-Nuttalovo pravilo*.

Kot primer pogledimo razpada α dveh izotopov americija



Pri prvem razpadu delec α odnese $W^{(a)} = 5,485$ MeV energije, razpolovni čas pa znaša $t_{1/2}^{(a)} = 432$ let. V drugem primeru delec α odnese $W^{(b)} = 5,275$ MeV energije, od koder lahko ocenimo razpadni čas tudi v tem primeru, saj velja $t_{1/2}^{(b)}/t_{1/2}^{(a)} \simeq \exp(g^{(b)} - g^{(a)})$. Oglejmo si torej izraz za $(g^{(b)} - g^{(a)})/g^{(a)} \equiv \Delta g/g^{(a)}$

$$\frac{\Delta g}{g^{(a)}} = \sqrt{\frac{W^{(a)}}{W^{(b)}}} \frac{f(\rho^{(b)})}{f(\rho^{(a)})} - 1, \quad (1.50)$$



Slika 1.3: Izračunane in izmerjene energije α delcev ter razpadni časi za nekatere jedrske izotope [2].

kjer smo uporabili točen izraz za integral $f(\rho) \equiv \int_{\rho}^1 \sqrt{1/u - 1} du = \arccos(\sqrt{\rho}) - \sqrt{\rho(1 - \rho)}$, ter $\rho = R/R'$. Ker je razlika med oddano energijo v obeh primerih zelo majhna se lahko poslužimo razvoja po $(W^{(b)} - W^{(a)})/W^{(a)} \equiv \Delta W/W^{(a)} \simeq -4\%$ okrog $g^{(a)} \simeq 74$. Majhna sprememba argumenta integrala $f(\rho)$ med obema razpadoma je kar $(\rho^{(b)} - \rho^{(a)})/\rho^{(a)} \equiv \Delta\rho/\rho^{(a)} = \Delta W/W^{(a)}$ od koder sledi z enostavnim odvajanjem

$$\frac{\Delta g}{g^{(a)}} = -\frac{\Delta W}{W^{(a)}} \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{\rho^{(a)}(1 - \rho^{(a)})}}{f(\rho^{(a)})} \right). \quad (1.51)$$

Od tod dobimo za $g^{(b)} - g^{(a)} = 2,8$ razpolovni čas v drugem primeru $t_{1/2}^{(b)} = 7200$ let, kar ni daleč od izmerjenega $[t_{1/2}^{(b)}]_{\text{exp}} = 7370$ let. Opozorimo še, da prvi člen v oklepaju gornjega izraza, ki predstavlja rešitev v limiti $\rho \ll 1$, ne podaja zadovoljive napovedi ($g^{(b)} - g^{(a)} = 1,5$ oziroma $t_{1/2}^{(b)} = 1900$ let).

1.8 Razpad β

Obravnavamo β^+ razpad jedra dušika ^{13}N

$$^{13}_7\text{N} \rightarrow ^{13}_6\text{C} e^+ \nu_e \quad (1.52)$$

Zaradi prisotnosti treh delcev v končnem stanju je kinematika tega procesa nekoliko bolj zapletena – kinetične energije delcev niso vedno enake, temveč tvorijo spekter. Iz energijske bilance procesa

$$E_N = E_C + E_e + E_\nu \quad (1.53)$$

izrazimo najprej vsoto energij pozitrona in nevtrina

$$\begin{aligned} E_e + E_\nu &= E_N - E_C \\ &= \Delta W_v + Zm_p c^2 + (A - Z)m_n c^2 - (Z - 1)m_p c^2 - (A - Z + 1)m_n c^2 + T_N - T_C \\ &= \Delta W_v + (m_p - m_n)c^2 + T_N - T_C, \end{aligned} \quad (1.54)$$

kjer smo z Z označili vrstno število začetnega jedra (v našem primeru $Z = 7$), tako da gornji izraz velja za razpad β^+ poljubnega jedra. Če se osredotočimo le na kinetično energijo pozitrona T_e , potem lahko določimo točko v spektru, kjer bo le-ta maksimalna. V težiščnem sistemu bo to takrat, ko je nevtrino ustvarjen v mirovanju s $\mathbf{p}_\nu = 0$, tako da zaradi njegove zanemarljivo majhne mase velja tudi $E_\nu \simeq 0$. Zaradi ohranitve gibalne količine v tej točki velja $|\mathbf{p}_e| = |\mathbf{p}_C|$. Masa elektrona (oz. pozitrona) je mnogo manjša od mas nukleonov in posledično jeder. Zato že iz primera 1.5 vemo, da bo v tej kinematski točki kinetična energija pozitrona mnogo večja od kinetične energije jedra C . V relativistični kinematiki sicer upoštevamo, da velja

$$T_e^{\max} = \sqrt{m_e^2 c^4 + |\mathbf{p}_e|^2 c^2} - m_e c^2, \quad (1.55)$$

$$T_C^{\max} = \sqrt{M_C^2 c^4 + |\mathbf{p}_e|^2 c^2} - M_C c^2 = \sqrt{M_C^2 c^4 + T_e^{\max}(T_e^{\max} + 2m_e c^2)} - M_C c^2, \quad (1.56)$$

in torej

$$\begin{aligned} T_e^{\max} &= (M_N - M_C)c^2 \left[1 - \frac{(M_N - M_C)}{2M_N} \right] - m_e c^2 \left(1 - \frac{m_e}{2M_N} \right) \simeq (M_N - M_C - m_e)c^2 \\ &\simeq \Delta W_v + (m_p - m_n)c^2 - m_e c^2. \end{aligned} \quad (1.57)$$

Nadaljno obravnavo nam olajša dejstvo, da sta jedri $^{13}_7\text{N}$ in $^{13}_6\text{C}$ t.i. *zrcalni jedri*. Jedrska sila namreč ne loči med protoni in nevtroni v jedru. Če torej v jedru $X(A, Z)$ zamenjamo vse protone z nevtroni in obratno, dobimo zrcalno jedro $Y(A, A - Z)$. Med takšnimi pari jeder razlikuje le elektrostatska sila, zaradi različnih nabojev protonov in nevtronov. Vsa sprememba jedrske vezavne energije v gornjem razpadu je torej enaka spremembi elektrostatične potencialne energije. To izračunamo tako, da jedro aproksimiramo z enakomerno nabito kroglo radija R . Za porazdelitev točkastih nabojev bi bila elektrostatska potencialna energija kar vsota posameznih elektrostatskih energij med vsemi pari nabojev

$$W_p^{\text{point}} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{q_i q_j}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i U(\mathbf{r}_i), \quad (1.58)$$

kjer smo v drugem koraku uvedli potencial vseh nabojev na mestu \mathbf{r}_i . Za primer zvezne porazdelitve naboja se gornja enačba prepiše v integral produkta gostote naboja ρ ter elektrostatskega potenciala po volumnu krogle

$$W_p = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) U(\mathbf{r}) dV, \quad (1.59)$$

Za enakomerno nabito kroglo s celotnim nabojem Ze je gostota naboja

$$\rho = \frac{3Ze}{4\pi R^3}. \quad (1.60)$$

Potencial za tak primer izračunamo s pomočjo Gaussovega izreka za električno polje skozi zaključeno ploskev $\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Ze/\epsilon_0$. Električno polje kaže v radialni smeri in za njegovo jakost pri radiju r od središča krogle potem velja

$$|\mathbf{E}|(4\pi r^2) = \begin{cases} \rho \frac{4\pi R^3}{3} & r > R, \\ \rho \frac{4\pi r^3}{3} & r < R. \end{cases} \quad (1.61)$$

Od tod s pomočjo definicije razlike potenciala $U(\mathbf{r}_2) - U(\mathbf{r}_1) = -\int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{E} d\mathbf{r}$ ter predpisa vrednosti potenciala v neskončni oddaljenosti od središča krogle $U(r \rightarrow \infty) = 0$ že lahko izrazimo vrednost potenciala kot

$$U(r) = \begin{cases} \frac{Ze}{8\pi\epsilon_0 R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) & r < R, \\ \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0 r} & r > R. \end{cases} \quad (1.62)$$

Elektrostatska energija jedra je potem podana z enačbo (1.59)

$$W_p = \frac{3Z^2 e^2}{20\pi\epsilon_0 R}. \quad (1.63)$$

Sprememba le-te v razpadu β^+ , kjer se Z spremeni za -1 pa je

$$\Delta W_p = -\frac{3(2Z-1)e^2}{20\pi\epsilon_0 R}. \quad (1.64)$$

Meritev maksimalne kinetične energije pozitrona v razpadu β^+ (med zrcalnimi jedri) nam torej da informacijo o radiju razpadajočega jedra R in posledično radiju nukleona $r_n \simeq R/A^{1/3}$. Numerično obravnavo nam olajša vpeljava konstante fine strukture ter konstanta $\hbar c \simeq 200$ MeV fm. V primeru β^+ razpada jedra ^{13}N je izmerjena $T_e^{\max} = 2,2$ MeV, od koder sledi $r_n \simeq 1,6$ fm, kar ni daleč od "standardne" vrednosti $r_n = 1,2$ fm. Rezultat lahko uporabimo tudi za izračun koeficienta w_2 v enačbi (1.28) in sicer tako dobimo $w_2 = 3\hbar c \alpha_{\text{em}}/5r_n = 0,55$ MeV.

1.9 Atomsko zajetje elektrona

1.10 Spontana jedrska fizija

Največja vezavna energija na nukleon je v okolici jedra železa ($^{56}_{26}\text{Fe}$), kar lahko enostavno pokažemo z zahtevo

$$\frac{\partial(W_j/A)}{\partial A} = 0. \quad (1.65)$$

Ob zahtevi $Z \simeq A/2$ in zanemarjenju majhnega prispevka w_4 dobimo $A = 2w_1/w_2 \simeq 50$. Pri težjih jedrih torej Coulombska odbojna sila med protoni prevlada nad površinsko napetostjo jedra. Ocena velja v približku sferično simetričnih jeder. Pri procesu spontane fizije pa se mora jedro sprva deformirati, kar privede do povečanja površinske energije in hkratnega znižanja elektrostatske potencialne energije jedra. Jedro bo nestabilno, kadar takšna deformacija vodi v energetsko nižje stanje. Kvantitativno lahko takšen proces iz vrednotimo v približku majhne

sferoidne deformacije (s podaljšanjem ene izmed polosi (a) in skrajšanjem drugih dveh (b)) sprva sferičnega jedra (z radijem R) tako da se volumen jedra pri tem ohranja. Če torej krajši polosi zapišemo kot $b = R(1 - \epsilon)$, ohranitev volumna telesa $V = 4\pi ab^2/3 = 4\pi R^3/3 + \mathcal{O}(\epsilon^3)$ zahteva za $a = R(1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2)$. Površina takšnega sferoida je

$$S = 2\pi b^2 \left[1 + \frac{a}{be} \arcsin(e) \right], \quad (1.66)$$

kjer je $e = \sqrt{1 - (b/a)^2}$. Razvoj do drugega reda v ϵ nam torej da $S = 4\pi R^2(1 + 8\epsilon^2/5)$. Nekoliko težje je iz vrednotiti spremembo elektrostatske potencialne energije. Rešitev W_p za sferoidno jedro lahko zapišemo v sledeči integralski obliki [3]

$$W_p = \frac{3Z^2 e^2}{40\pi\epsilon_0} \int_0^\infty \frac{ds}{Q_s}, \quad (1.67)$$

kjer je $Q_s = (b^2 + s)\sqrt{a^2 + s}$. Razvoj Q_s^{-1} do kvadratnega člena v ϵ nam omogoča eksplicitno iz vrednotenje gornjega integrala v

$$W_p = \frac{3Z^2 e^2}{20\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{4}{5}\epsilon^2 \right). \quad (1.68)$$

Vezavna energija deformiranega jedra je torej

$$W_j = w_0 A - w_1 A^{2/3} \left(1 + \frac{8}{5}\epsilon^2 \right) - w_2 \frac{Z^2}{A^{1/3}} \left(1 - \frac{4}{5}\epsilon^2 \right) + \dots \quad (1.69)$$

Pogoj, da je le-ta nižja ali enaka kot pred deformacijo, nam da torej

$$\frac{Z^2}{A} \geq \frac{2w_1}{w_2} \simeq 50. \quad (1.70)$$

V približku $Z \simeq A/2$ pogoj velja za jedra z masnim številom $A \gtrsim 200$.

1.11 Jedrski potencial v lupinskem modelu

V lupinskem modelu jedra ima potencial, ki ga čuti posamični nukleon, tri pglavitne prispevke $V(r) = -V_0 + V_{\text{h.o.}}(r) + W_s$. V_0 predstavlja globino končne potencialne jame, $V_{\text{h.o.}}(r) = mw^2 r^2/2$ potencial harmonskega oscilatorja (v treh dimenzijah) s strmino potenciala w , $W_s = -2\eta \hat{l}\hat{s}$ pa prispevek sklopitve spin-tir jakosti η . Parametre potenciala (V_0 , w in η) lahko določimo s pomočjo meritev energijskih spektrov jeder. Kot primer uporabimo energijsko razliko (ΔW) med stanjem z zadnjim nukleonom v stanju $3d_{3/2}$ in stanjem z zadnjim nukleonom v stanju $3d_{5/2}$, in sicer $\Delta W = 1,35$ MeV. Na podlagi te razlike lahko ocenimo jakost sklopitve spin-tir. Spomnimo se, da iz izraza za celotno vrtilno količino stanja $\hat{j} = \hat{l} + \hat{s}$ oziroma njen kvadrat $\hat{j}^2 = \hat{l}^2 + 2\hat{l}\hat{s} + \hat{s}^2$ lahko izrazimo produkt $\hat{l}\hat{s}$ kot

$$2\hat{l}\hat{s} = \hat{j}^2 - \hat{l}^2 - \hat{s}^2. \quad (1.71)$$

V stanju $3d_{3/2}$ imamo $j = 3/2$, $l = 2$ ter $s = 1/2$, v stanju $3d_{5/2}$ pa $j' = 5/2$, $l' = 2$ in $s = 1/2$. Od tod sledi

$$\Delta W = \eta[j'(j' + 1) - j(j + 1)] = 5\eta, \quad (1.72)$$

in torej $\eta = \Delta W/5 = 0,27$ MeV. V istem jedru je razlika med stanjem zadnjega nukleona $4f_{7/2}$ in $4d_{5/2}$ enaka $\Delta W = 6,3$ MeV. Od tod lahko sedaj določimo še strmino potenciala v harmoničnega

oscilatorja ($V_{\text{h.o.}}$) w . In sicer zapišimo energijski nivo tri-dimenzionalnega harmonskega oscilatorja v sferičnih koordinatah

$$W_{\text{h.o.}} = \left(2n + l + \frac{3}{2}\right) \hbar w. \quad (1.73)$$

Razlika celotne energije za obe stanji ($4f_{7/2}$: $n = 4$, $l = 3$, $j = 7/2$; ter $4d_{5/2}$: $n' = 4$, $l' = 2$, $j' = 5/2$) znese

$$\Delta W = [2(n - n') + l - l'] \hbar w - [j(j + 1) - l(l + 1) - j'(j' + 1) + l'(l' + 1)] \eta = \hbar w - \eta, \quad (1.74)$$

oziroma $\hbar w = \Delta W + \eta = 6,6 \text{ MeV}$. Iz tega podatka pa lahko sklepamo tudi o globini potencialne jame V_0 . In sicer za jedrsko silo, ki je kratkega dosega zahtevamo $-V_0 + V_{\text{h.o.}}(R_j) = 0$, oziroma, da nukleon na radiju samega jedra (R_j) jedrskega potenciala ne čuti več. Od tod sledi

$$V_0 = \frac{1}{2} m w^2 R_j^2. \quad (1.75)$$

Uporabimo še oceno jedrskega radija $R_j \simeq r_n A^{1/3}$, kjer je $r_n \simeq 1,2 \text{ fm}$ tipični radij posamičnega nukleona v jedru, pa dobimo za jedro z $A = 200$ oceno $V_0 \simeq 22 \text{ MeV}$.

1.12 Magnetni dipolni moment v kvantni mehaniki

Klasično je magnetni dipolni moment pozitivnega naboja q , ki enakomerno kroži po tirnici z radijem r definiran kot $\boldsymbol{\mu} = I S \mathbf{n}$, kjer je tok tega naboja $I = dQ/dt = q|\mathbf{v}|/2\pi r$, površina s tirnico zaobjete ploskve $S = \pi r^2$, magnetni moment pa kaže v smeri pravokotno na ravnino kroženja $\mathbf{n} = \mathbf{r} \times \mathbf{v}$. Če si torej tak naboj predstavljamo kot nabito telo z maso m , lahko njegov magnetni dipolni moment zapišemo tudi s pomočjo njegove tirne vrtilne količine \mathbf{l} kot

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q}{2m} \mathbf{l}. \quad (1.76)$$

Kvantnomehansko lahko tirni magnetni dipolni moment definiramo v skladu s korespondenčnim principom (vrtilno količino v gornji enačbi nadomestimo s primernim operatorjem, ki deluje na kvantnomehanska stanja). Za primer vzemimo pozitron z nabojem $q_{e+} \equiv e = -q_{e-}$ ter maso $m_{e+} = m_{e-}$. Če rešitve Schrödingerjeve enačbe za enodelčni sistem razvijemo po lastnih funkcijah operatorja kvadrata vrtilne količine \hat{l}^2 in njegove projekcije \hat{l}_z na izbrano os z (Y_{lm} , kjer velja $\hat{l}^2 Y_{lm} = l(l+1) Y_{lm}$ ter $\hat{l}_z Y_{lm} = m Y_{lm}$), jim lahko predpišemo tudi vrednost kvadrata magnetnega dipolnega momenta (μ_l^2) ter njegovo projekcijo v smeri osi z (μ_m)

$$\mu_l^2 = \left(\frac{e\hbar}{2m_e}\right)^2 l(l+1) = \mu_B^2 l(l+1), \quad \mu_m = m\mu_B, \quad (1.77)$$

kjer smo v drugem koraku uvedli t.i. *Bohrov magneton* $\mu_B = \hbar e/2m_e$ kot osnovno enoto magnetnega momenta. Formalno lahko v splošnem definiramo

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_l = \left(\frac{\hbar q}{2m}\right) \hat{\mathbf{l}}. \quad (1.78)$$

Tako opišemo magnetni dipolni moment, ki je posledica tirne vrtilne količine gibajočega se naboja. Magnetni dipolni moment delca pa lahko dobi tudi prispevek, ki je posledica spina. Ta nima klasične analogije, za elementarne Diracove fermione pa lahko pokažemo, da velja

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_s = g_s \left(\frac{\hbar q}{2m}\right) \hat{\mathbf{s}}, \quad (1.79)$$

kjer je \hat{s} operator spina, $g_s \simeq 2$ pa je *spinsko giromagnetno razmerje*. Podobno kot za tirno vrtilno količino, lahko tudi za spin definiramo operatorja kvadrata \hat{s}^2 in projekcije \hat{s}_z spina z pripadajočimi lastnimi stanji in lastnimi vrednostmi. Potem lahko celotni magnetni dipolni moment elementarnega Diracovega fermiona zapišemo kot vsoto tirnega in spinskega dela

$$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \hat{\boldsymbol{\mu}}_l + \hat{\boldsymbol{\mu}}_s = \left(\frac{\hbar q}{2m} \right) (\hat{\boldsymbol{l}} + g_s \hat{\boldsymbol{s}}). \quad (1.80)$$

Očitna posledica spinskega giromagnetnega razmerja različnega od ena je, da celotni magnetni moment za neničelno tirno vrtilno količino ne kaže v smeri celotne vrtilne količine $\hat{\boldsymbol{j}} = \hat{\boldsymbol{l}} + \hat{\boldsymbol{s}}$!

1.13 Magnetni dipolni moment jedra

Proton (p) in nevtron (n) sta fermiona s spinom 1/2. Če bi bila elementarna, bi torej za njuna spinska magnetna dipolna momenta pričakovali

$$\begin{aligned} (\sqrt{\mu_s^2})_p &= g_s^p \frac{\hbar e}{2m_p} \sqrt{s(s+1)}, \quad z \quad g_s^p \approx 2, \\ (\sqrt{\mu_s^2})_n &= 0, \quad (q_n = 0). \end{aligned} \quad (1.81)$$

Vendar pa imata oba nukleona notranjo strukturo (v obliki kvarkovskih in gluonskih fluktuacij) in rezultati eksperimentov ustrezajo efektivnima giromagnetnima razmerjema

$$\begin{aligned} g_s^p &\approx 5,6, \\ g_s^n &\approx -3,8, \end{aligned} \quad (1.82)$$

s pomočjo katerih definiramo njuna magnetna dipolna momenta kot

$$\begin{aligned} (\sqrt{\mu_s^2})_p &\equiv g_s^p \mu_N \sqrt{s(s+1)}, \\ (\sqrt{\mu_s^2})_n &\equiv g_s^n \mu_N \sqrt{s(s+1)}, \end{aligned} \quad (1.83)$$

kjer smo uvedli še efektivni *jedrski magneton* $\mu_N = \hbar e / 2m_N$. Zaradi tehnike meritve (Stern-Gerlachov poskus) dobljene vrednosti magnetnih dipolnih momentov jeder ustrezajo komponenti magnetnega momenta v smeri zunanjega magnetnega polja pri maksimalni projekciji celotne vrtilne količine ($m = j$)

$$\mu \equiv \langle j, j | \hat{\mu}_z | j, j \rangle. \quad (1.84)$$

Vemo, da zaradi različnih tirnih in spinskih giromagnetnih razmerij celotni magnetni dipolni moment in celotna vrtilna količina ne kažeta v isto smer. Zato pogosto definiramo tudi *efektivno giromagnetno razmerje* g kot

$$\mu = g \mu_N \langle j, j | \hat{j}_z | j, j \rangle, \quad (1.85)$$

oziroma equivalentno kar

$$g j = \frac{\mu}{\mu_N}. \quad (1.86)$$

Ob predpostavki, da je magnetni dipolni moment jedra kar vsota prispevkov posameznih nukleonov ter da je celoten magnetni dipolni moment *lihega* jedra posledica nesparjenega nukleona, lahko izračunamo magnetni dipolni moment takega jedra. Če je namreč celotna vrtilna količina zgolj posledica nesparjenega nukleona, velja

$$\mu = \mu_N \langle j, j | g_l \hat{l}_z + g_s \hat{s}_z | j, j \rangle, \quad (1.87)$$

kjer za nesparjen proton ali nevtron velja

$$g_l^p = 1 \quad \text{in} \quad g_l^n = 0. \quad (1.88)$$

Od tod lahko izračunamo efektivno giromagnetno razmerje jedra z naslednjim razmislekom: ker desni strani enačb (1.85) ter (1.87) po definiciji ustrežata isti količini in vsebujeta matrična elementa med istimi stanji ($|j, j\rangle$), mora enakost veljati tudi, če operatorje znotraj matričnih elementov pomnožimo z operatorjem \hat{j}_z , katerega lastno stanje je $|j, j\rangle$

$$g\langle j, j|\hat{j}_z\hat{j}_z|j, j\rangle = \langle j, j|g_l\hat{l}_z\hat{j}_z + g_s\hat{s}_z\hat{j}_z|j, j\rangle. \quad (1.89)$$

Ker je v tem stanju smer naše projekcije z že v smeri celotne vrtilne količine $\hat{\mathbf{j}}$, produkti operatorjev znotraj matričnih elementov v limiti $j \rightarrow \infty$ asimptotsko konvergirajo k \hat{j}^2 , $\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{j}}$ ter $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{j}}$ in torej velja

$$g\langle j, j|\hat{j}^2|j, j\rangle = \langle j, j|g_l\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{j}} + g_s\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{j}}|j, j\rangle. \quad (1.90)$$

Gornje produkte operatorjev sedaj lahko poenostavimo s pomočjo identitet

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{j}} &= \hat{\mathbf{l}} \cdot (\hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{s}}) = \hat{l}^2 + \hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}, \\ \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{j}} &= \hat{\mathbf{s}} \cdot (\hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{s}}) = \hat{s}^2 + \hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}, \\ \hat{j}^2 &= (\hat{\mathbf{l}} + \hat{\mathbf{s}})^2 = \hat{l}^2 + \hat{s}^2 + 2\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}. \end{aligned} \quad (1.91)$$

Iz zadnjega izraza izpostavimo produkt $\hat{\mathbf{l}} \cdot \hat{\mathbf{s}}$, ga uporabimo v prvih dveh, ki ju nato vstavimo v enačbo (1.90) da dobimo končni rezultat

$$g = g_l \frac{j(j+1) + l(l+1) - s(s+1)}{2j(j+1)} + g_s \frac{j(j+1) - l(l+1) + s(s+1)}{2j(j+1)}. \quad (1.92)$$

Pri izračunu magnetnega dipolnega momenta jedra moramo sedaj ločiti med dvema možnostima medsebojne interference spina in tirne vrtilne količine

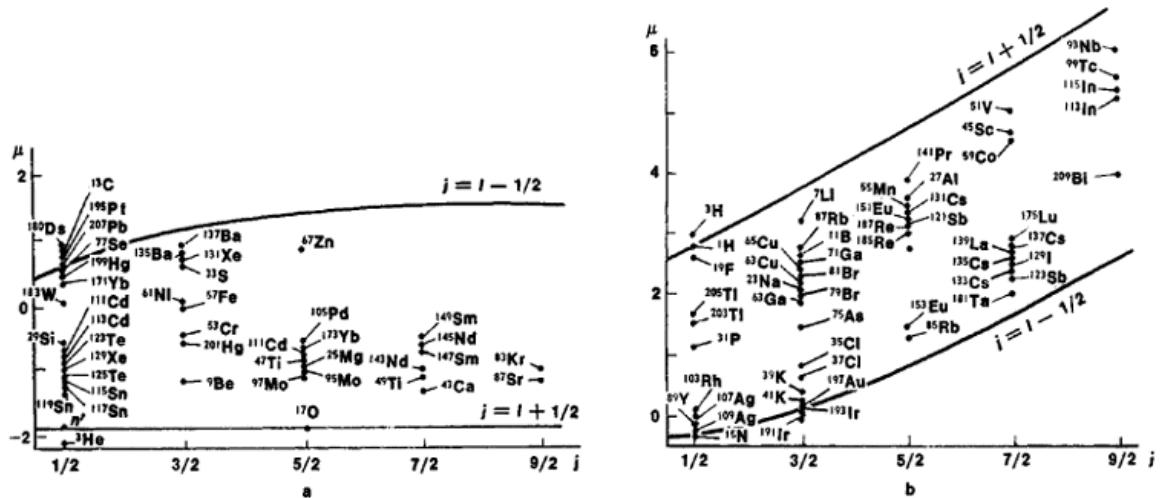
$$j = l + \frac{1}{2} : \quad \frac{\mu}{\mu_N} = g_l \left(j - \frac{1}{2} \right) + \frac{g_s}{2}, \quad (1.93)$$

$$j = l - \frac{1}{2} : \quad \frac{\mu}{\mu_N} = \frac{j}{j+1} \left[g_l \left(j + \frac{3}{2} \right) - \frac{g_s}{2} \right]. \quad (1.94)$$

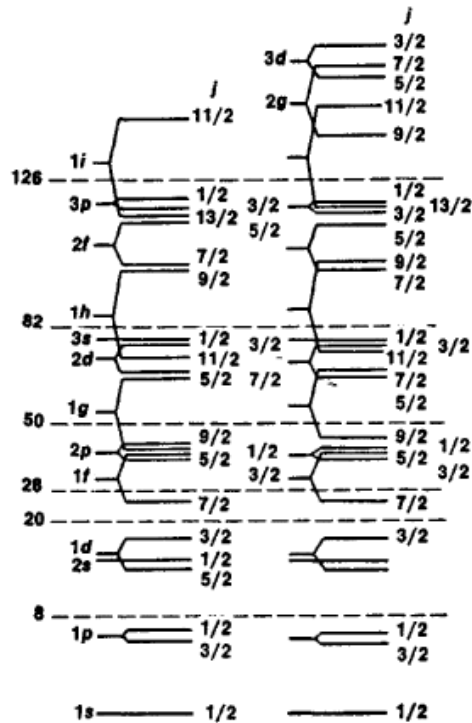
Takšno odvisnost magnetnega momenta lihih jeder od njihove celotne vrtilne količine opisujejo t.i. *Schmidtove linije* [4].

1.14 Magnetni dipolni moment jedra v lupinskem modelu

Lupinski model jedra sorazmerno uspešno napove spin, parnost in magnetne momente sodo-lihih jeder. Te lastnosti namreč v dobrem približku sledijo iz lupine edinega nesparjenega nukleona (protona ali nevtrona). Kot primer si pogledimo jedro ${}_{20}^{43}\text{Ca}$. Nesparjen 23. nevtron leži v lupini $1f_{7/2}$ (glej sliko 1.5). Od tod že lahko odberemo spin in parnost jedra $J^P = (7/2)^-$. Tudi magnetni dipolni moment jedra (Schmidtova linija za nevtron pri $j = l + 1/2$) $\mu/\mu_N = -1,92$ se dobro ujema z eksperimentalno vrednostjo $(\mu/\mu_N)^{\text{exp}} = -1,32$. Podobno v primeru ${}_{41}^{93}\text{Nb}$ lupinski model napove nesparjen proton v stanju $1g_{9/2}$ ter posledično $\mu/\mu_N = 6,8$. Obe napovedi potrjujejo tudi meritve $J^P = (9/2)^+$ ter $(\mu/\mu_N)^{\text{exp}} = 6,17$. Pogledimo še primera z nesparjenimi



Slika 1.4: Schmidtove linije za jedra z lihimi števili nevtronov (a) ali protonov (b). Pike označujejo eksperimentalne podatke.



Slika 1.5: Lupinski model jedra.

nukleoni v stanjih z $j = l - 1/2$: Jedro $^{137}_{56}\text{Ba}$ ima izmerjeno $J^P = (3/2)^+$ od koder sledi da ima nesparjen 81. nevtron v lupini $2d_{3/2}$ in torej ter $\mu/\mu_N = 1,15$ ($(\mu/\mu_N)^{\text{exp}} = 0,931$). V lupinskem modelu bi pričakovali nesparjen nevtron v lupini $3s_{1/2}$, vendar pa sta stanji $2d_{3/2}$ in $3s_{1/2}$ skoraj degenerirani, zato lahko pričakujemo takšno križanje energijskih nivojev. In nazadnje še $^{197}_{79}\text{Au}$, za katerega so prav tako izmerili $J^P = (3/2)^+$ in ima zato nesparjen 79. proton v lupini $2d_{3/2}$ (v skladu z napovedjo lupinskega modela) ter posledično $\mu/\mu_N = 0,12$

$((\mu/\mu_N)^{\text{exp}} = 0,145)$.

1.15 Električni kvadrupolni moment jeder

Električni kvadrupolni moment q (dejansko njegova zz komponenta q_{zz} v izbranem koordinatnem sistemu z) osno simetrične porazdelitve naboja je definiran kot

$$q \equiv \int (3z^2 - r^2)\rho(r, z)dV, \quad (1.95)$$

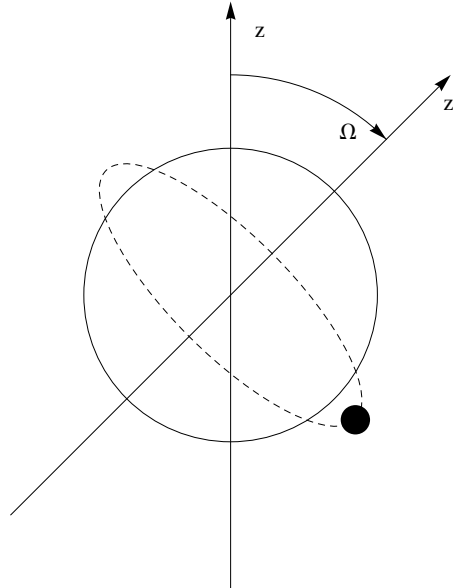
kjer je v navadi, da gostoto naboja ρ podajamo brez enote osnovnega naboja (za porazdelitev celotnega naboja Ze je torej integral $\int \rho dV = Z$), tako da ima kvadrupolni moment enoto površine oz. *barn* [$b = 10^{-28}\text{m}^2$]. Gornji izraz lahko dodatno poenostavimo z vpeljavo sferične harmonske funkcije Y_{20} , namreč

$$q = \int r^2 \left(3\frac{z^2}{r^2} - 1 \right) \rho(r, z)dV = \int r^2 (3\cos^2\theta - 1)\rho(r, \theta)dV = 2 \int r^2 Y_{20}(\theta)\rho(r, \theta)dV. \quad (1.96)$$

Krajše lahko torej električni kvadrupolni moment v poljubni smeri z zapišemo kot

$$q = 2Z\langle r^2 Y_{20}(\theta) \rangle, \quad (1.97)$$

kjer $\langle \rangle$ označuje poprečje čez prostorsko porazdelitev gostote naboja $\rho(r, \theta)$. Po gornji definiciji krogelno simetrične porazdelitve nimajo neničelnega električnega kvadrupolnega momenta. Pričakujemo torej, da bodo največji električni kvadrupolni moment imela jedra s posamičnim nukleonom v najvišji jedrski lupini. Klasično si predstavljamo tak nukleon kot točkast naboj, krožec v ravnini z normalnim vektorjem v smeri z' . Kot med osjo meritve električnega kvadrupolnega momenta (z) ter osjo kroženja (z') označimo z Ω . Če sta obe osi poravnani ($\Omega = 0$)



potem lahko q_{zz} že iz vrednotimo, saj bo prispevala le radialna porazdelitev v ravnini krožečega naboja pri $z = 0$

$$q' = -\langle r^2 \rangle. \quad (1.98)$$

Hkrati vemo, da po definiciji to ustreza $q' = 2\langle r^2 Y_{20}(\theta') \rangle$. Vrednost električnega kvadrupolnega momenta v poljubnem drugem koordinatnem sistemu (z) lahko sedaj izrazimo s pomočjo transformacijskih lastnosti krogelnih funkcij pri rotaciji za azimutni kot Ω in polarni kot ω , namreč

$$Y_{20}(\theta) = Y_{20}(\theta')Y_{20}(\Omega) + \sum_{m \neq 0} c_m Y_{2m}(\theta')Y_{2m}(\Omega) \cos m(\phi' - \omega), \quad (1.99)$$

kjer je ϕ' polarni kot v sistemu z' . Za električni kvadrupolni moment v poljubnem sistemu z velja torej

$$q = 2\langle r^2 Y_{20}(\theta')Y_{20}(\Omega) + r^2 \sum_{m \neq 0} \dots \rangle, \quad (1.100)$$

kjer se prispevki višjih krogelnih projekcij izpoprečijo v nič, saj velja

$$\int_0^{2\pi} \cos m(\phi' - \omega) d\phi' = 0, \quad (1.101)$$

za $m = -2, -1, 1, 2$. Odvisnost of Ω lahko sedaj izpostavimo iz integrala (poprečja), pa dobimo zvezo

$$q = Y_{20}(\Omega) q'. \quad (1.102)$$

Kvantnomehansko lahko $\cos \Omega$ ocenimo s projekcijo vrtilne količine sistema (h kateri bo v našem približku prav tako prispeval le osamljen nukleon v najvišji lupini) na os z ter normiramo na celotno vrtilno količino, oziroma

$$\cos \Omega \simeq \frac{m}{\sqrt{j(j+1)}}, \quad (1.103)$$

od koder sledi pri maksimalni projekciji vrtilne količine na izbrano os z ($m = j$) za $Y_{20}(\Omega) \simeq (2j-1)/2(j+1)$ in končno

$$q \simeq -\frac{2j-1}{2(j+1)} \langle r^2 \rangle. \quad (1.104)$$

Kot primer ocenimo električni kvadrupolni moment težkih jeder pri velikem j . Radij jedra zapišemo v približku kot $r \simeq r_0 A^{1/3}$, z $r_0 = 1,4$ fm ter dobimo $q \simeq -r_0^2 A^{2/3} = 1,2 A^{2/3} \cdot 10^{-2}$ b.

Gornja ocena velja, če je neparjeni nukleon na zunanji lupini proton. Naivno bi morda pričakovali, da v primeru, da zunanjo lupino zaseda nevtron, prispevka k električnemu kvadrupolnemu momentu ne bo, saj nevtron nima naboja. Vendar pa je tak zaključek prenačilen, saj zunanji nevtron povzroči tudi premik težišča celotnega jedra oziroma preostalih nukleonov

$$\mathbf{r}_t = \frac{\sum_i m_i \mathbf{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{m_N \mathbf{r}_n}{A m_N} = \frac{\mathbf{r}_n}{A}. \quad (1.105)$$

Efektivno imamo torej Z protonov v orbiti z radijem $r_t \equiv |\mathbf{r}_t|$ in dobimo naslednjo oceno za električni kvadrupolni moment

$$q \simeq -Z r_t^2 = -\frac{Z}{A^2} \langle r^2 \rangle. \quad (1.106)$$

Kot primer ocenimo q za jedro ${}^{17}_8\text{O}$. Z gornjim sklepanjem dobimo $q \simeq -0.003$ b, eksperimentalno izmerjena vrednost $q^{exp} = -0.026$ b pa je precej večja! Razlika je posledica deformacije radialne porazdelitve gostote naboja jedra, ki je v našem pristopu nismo upoštevali in da poglobitvi prispevek.

1.16 Razpadi γ

1.17 Nerelativistična kvantna perturbacijska teorija

Obravnavamo delovanje lokalizirane perturbacije v obliki potenciala (v koordinatni upodobitvi) $V(\mathbf{x}, t)$ na rešitve ($\psi_k(\mathbf{x}, t)$) enodelčnega Hamiltonovega operatorja brez interakcije ($H_0 = \hat{\mathbf{p}}^2/2m$). Rešitve celotnega Hamiltoniana $H = H_0 + V$ lahko razvijemo po ψ_k kot $\psi = \sum_k a_k(t)\psi_k$, kjer ob uporabi ortogonalnosti stanj ψ_k za koeficiente razvoja velja Schrödingerjeva enačba

$$i\hbar \frac{da_j}{dt} = \sum_k a_k(t) \int d^3\mathbf{x} \psi_j^* V \psi_k. \quad (1.107)$$

Predstavljajmo si sedaj, da ob času $-T/2$ sistem pripravimo v stanju ψ_i ($a_i(-T/2) = 1$ ter $a_{j \neq i}(-T/2) = 0$). Potem ob predpostavki, da je vpliv motnje V na stanja ψ_j dovolj majhna, da na desni strani gornjega izraza vedno dominira prispevek a_i , lahko izrazimo poljubno a_f ob končnem času $T/2$ kot

$$a_f(T/2) = -\frac{i}{\hbar} \int_{-T/2}^{T/2} dt \int d^3\mathbf{x} \psi_f^* V \psi_i. \quad (1.108)$$

V limiti, ko pošljemo začetni in končni čas proti neskončnosti, gornji izraz definira *sipalno matriko*

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} \int d^4x \psi_f^* V \psi_i. \quad (1.109)$$

Njen kvadrat $|T_{fi}|^2$ bi želeli interpretirati kot verjetnost prehoda med začetnim (i) in končnim (f) stanjem prostega Hamiltoniana pod vplivom perturbacije V . V kolikor je le-ta časovno neodvisna (oz. adiabatska) bo edina relevantna časovna odvisnost znotraj integrala v $\psi_{i,f} \equiv \phi_{i,f}(\mathbf{x}) \exp(-iE_{i,f}t/\hbar)$ in lahko časovni integral že izvrednostimo

$$T_{fi} = -\frac{i}{\hbar} V_{fi} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} = -2\pi i V_{fi} \delta(E_f - E_i), \quad (1.110)$$

kjer smo uvedli matrični element perturbacije med stacionarnimi stanji $V_{fi} \equiv \int d^3\mathbf{x} \phi_f^* V \phi_i$. Ponavadi nas zanima verjetnost prehoda poprečena na enoto časa (T) ter pointegrirana čez porazdelitev gostote končnih stanj po energiji ($\rho_f(E_f)$)

$$\begin{aligned} W_{fi} &\equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int dE_f \rho_f(E_f) |T_{fi}|^2}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|V_{fi}|^2 (2\pi)^2 \int dE_f \rho_f(E_f) \delta^2(E_f - E_i)}{T} \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|V_{fi}|^2 (2\pi\hbar) \int dE_f \rho_f(E_f) \delta(E_f - E_i) \int_{-T/2}^{T/2} e^{i(E_f - E_i)t/\hbar} dt}{\hbar T} \\ &= |V_{fi}|^2 \frac{2\pi}{\hbar} \int dE_f \rho_f(E_f) \delta(E_f - E_i) = |V_{fi}|^2 \frac{2\pi}{\hbar} \rho_f(E_i), \end{aligned} \quad (1.111)$$

kjer smo v drugi vrstici uporabili integralsko definicijo za eno od Diracovih delta funkcij nato pa ta integral izvrednotili ob $E_f = E_i$, kot to narekuje preostala delta funkcija. Izpeljali smo *Fermijevo zlato pravilo*.

1.18 Sipalni presek

Rezultate eksperimentov s sipanjem curkov delcev na sipalnih tarčah ponavadi podajamo v obliki *sipalne preseka*, ki je definiran kot W_{fi} normirana na gostoto vpadnega toka delcev (j_i).

$$\sigma(i \rightarrow f) = \frac{W_{fi}}{j_i}. \quad (1.112)$$

Sipalni presek ima enote površine oz. *barn* [$b = 10^{-28} \text{ m}^2 = 100 \text{ fm}^2$]. Poleg celotnega sipalnega preseka nas pogosto zanima njegova porazdelitev po prostorskem kotu Ω

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{|V_{fi}|^2}{j_i} \frac{2\pi}{\hbar} \frac{d\rho_f(E_i)}{d\Omega}. \quad (1.113)$$

Kot primer vzemimo sipanje delcev z maso m na statični tarči in izrazimo gostoto enodelčnih stanj $\rho_f(E) = dN_f/dE$ prostih ravnih valov upoštevajoč, da je tedaj element faznega prostora

$$d^6 N_f = d^3 \mathbf{x} \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{h^3} = dV \frac{p_f^2 dp_f d\Omega}{h^3}, \quad (1.114)$$

ter $E = p^2/2m$, pa dobimo

$$\frac{d^2 N_f}{dE d\Omega} = \frac{d\rho_f(E)}{d\Omega} = V \frac{m_f \sqrt{2Em_f}}{(2\pi\hbar)^3}. \quad (1.115)$$

Vstavimo ta izraz nazaj v (1.113) ter upoštevajmo še gostoto začetnega toka ravnih valov $j_i = \rho_i v_i = v_i/V = p_i/m_i V$, pa dobimo končni rezultat

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi^2 m_i m_f}{(2\pi\hbar)^4} \frac{p_f}{p_i} V^2 |V_{fi}|^2. \quad (1.116)$$

Za primer sipanja ravnih valov se poenostavi tudi matrični element perturbacije, saj velja

$$V_{fi} = \frac{1}{V} \int d^3 \mathbf{x} e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}} V(\mathbf{x}), \quad (1.117)$$

kjer smo uvedli še izmenjalni valovni vektor $\mathbf{q} = (\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)/\hbar$.

1.19 Elektromagnetno sipanje na jedrih

Pri sipanju elektronov preko elektromagnetne interakcije lahko perturbacijski potencial zapišemo kot $V(\mathbf{x}) = -eU(\mathbf{x})$, kjer je U elektromagnetni potencial. Le-tega lahko opišemo z gostoto naboja, ki je izvor potenciala kot

$$\nabla^2 U(\mathbf{x}) = -\frac{e\rho(\mathbf{x})}{\epsilon_0}. \quad (1.118)$$

V skladu s predpostavkami pri izpeljavi sipalne matrike (1.109) mora biti tak potencial na velikih razdaljah zanemarljiv in lahko na pripadajočem matričnem elementu perturbacije uporabimo Greenovo formulo

$$\int dV (U \nabla^2 \Phi - \Phi \nabla^2 U) = \int d\mathbf{S} (U \nabla \Phi - \Phi \nabla U) \rightarrow 0. \quad (1.119)$$

Upoštevajoč $\nabla^2 \exp(-\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}) = -q^2 \exp(-\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})$ od tod že sledi

$$-q^2 V_{fi} = \frac{e}{V} \int d^3\mathbf{x} q^2 e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} U(\mathbf{x}) = \frac{-e}{V} \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \nabla^2 U(\mathbf{x}) = \frac{Ze^2}{\epsilon_0 V} \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \bar{\rho}(\mathbf{x}), \quad (1.120)$$

kjer smo vpeljali $\bar{\rho} \equiv \rho/Z$ (tako da je $\int \bar{\rho} dV = 1$) in lahko matrični element perturbacije zapišemo kot

$$V_{fi} = \frac{Ze^2}{\epsilon_0 V q^2} F(\mathbf{q}), \quad (1.121)$$

kjer Fourierovo transformacijo gostote naboja $F(\mathbf{q}) = \int d^3\mathbf{x} e^{-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x}} \bar{\rho}(\mathbf{x})$ imenujemo *elektromagnetni oblikovni faktor*. Končno zapišimo še pripadajoči elastični diferencialni sipalni presek

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{4\pi^2 m^2 (Ze^2)^2}{(2\pi\hbar)^4 \epsilon_0^2 q^4} |F(\mathbf{q})|^2. \quad (1.122)$$

Za elastično sipanje velja $|\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f| \equiv p$ in lahko kvadrat izmenjalnega valovnega vektorja zapišemo s pomočjo sipalnega kota θ med smerjo vpadnega in sipanega curka elektronov

$$q^2 = \frac{1}{\hbar^2} (|\mathbf{p}_i|^2 + |\mathbf{p}_f|^2 - 2|\mathbf{p}_i||\mathbf{p}_f| \cos \theta) = \frac{4p^2}{\hbar^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \quad (1.123)$$

od koder sledi sipalni presek za t.i. *Rutherfordovo sipanje*

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2 m}{8\pi\epsilon_0 p^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} |F(\mathbf{q})|^2. \quad (1.124)$$

Najprej si pogledjmo najenostavnejši primer Rutherfordovega sipanja na točkastem naboju Ze . Gostota naboja je kar $\rho(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$, od koder sledi oblikovni faktor $F(\mathbf{q}) = 1$. Tako imenovano čisto Rutherfordovo sipanje dobro opisuje rezultate eksperimentov sipanja nabitih curkov, kadar je (de Brogliejeva) valovna dolžina vpadnih valov $\lambda = \hbar/p$ dosti večja od velikosti (radija R) porazdelitve naboja sipalne tarče (npr. jedra), torej $Rp/\hbar \ll 1$.

Izračunajmo sedaj prve popravke k omenjeni limiti. Upoštevamo torej porazdelitev naboja v jedru. Tedaj nam sipanje da informacijo o velikosti jedra. Predpostavimo, da je porazdelitev naboja sferično simetrična $\rho(\mathbf{x}) = \rho(r)$, ter v definiciji oblikovnega faktorja zapišimo še $\mathbf{q} \cdot \mathbf{x} = qr \cos \theta'$, pa dobimo

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}) &= 2\pi \int_0^1 d \cos \theta' \int_0^\infty r^2 dr \bar{\rho}(r) e^{iqr \cos \theta'} \\ &= \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty \bar{\rho}(r) \sin(qr) r dr. \end{aligned} \quad (1.125)$$

V območju integrala kjer velja $qr \ll 1$ lahko sinusno funkcijo razvijemo

$$\sin(qr) = qr - \frac{(qr)^3}{6} + \dots, \quad (1.126)$$

in obravnavamo posamezne člene integrala

$$\begin{aligned} 1. \text{ clen : } & 4\pi \int_0^\infty \bar{\rho}(r) r^2 dr = 1, \\ 2. \text{ clen : } & -4\pi \int_0^\infty \bar{\rho}(r) \frac{(qr)^2}{6} r^2 dr = -\frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle. \end{aligned} \quad (1.127)$$

Oblikovni faktor ima torej v primeru $q^2 \langle r^2 \rangle \ll 1$ obliko

$$F(\mathbf{q}) = 1 - \frac{1}{6} q^2 \langle r^2 \rangle + \dots \quad (1.128)$$

Kot primer si pogledjmo še sipanje na jedru, ki ga aproksimiramo z enakomerno nabito kroglo

$$\bar{\rho}(r) = \frac{3}{4\pi R^3} \begin{cases} 1 & r < R, \\ 0 & r \geq 0. \end{cases} \quad (1.129)$$

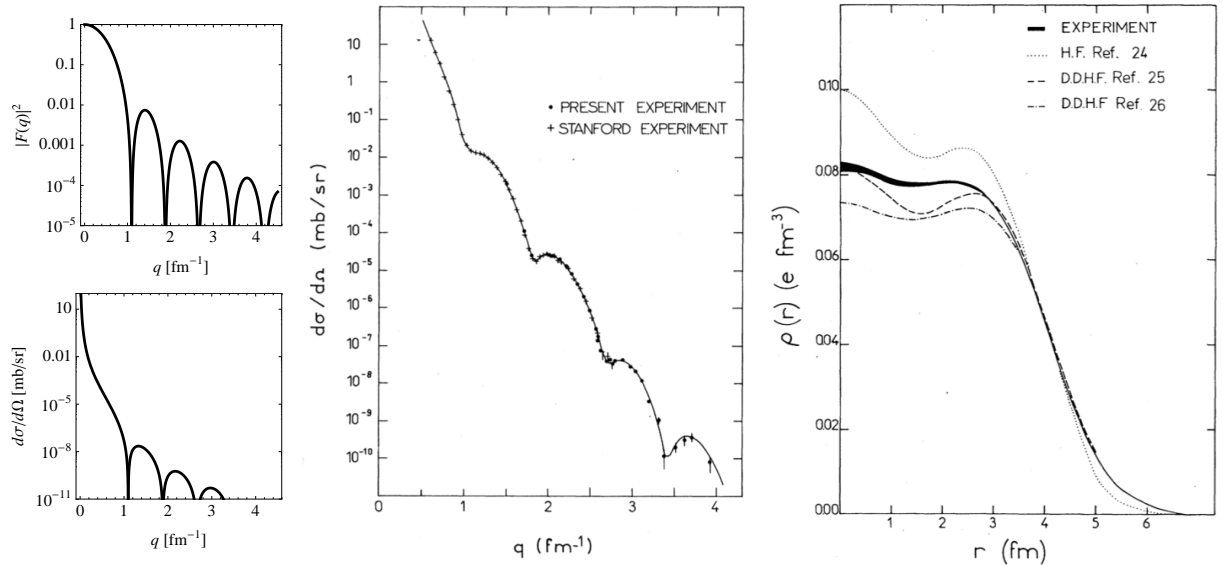
Oblikovni faktor ima potem obliko

$$\begin{aligned} F(\mathbf{q}) &= \frac{3}{4\pi R^3} \int_0^R \frac{4\pi}{q} \sin(qr) r dr \\ &= \frac{3}{(qR)^3} [\sin(qR) - qR \cos(qR)] , \end{aligned} \quad (1.130)$$

elastični sipalni presek pa je v tem primeru

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{Ze^2 m}{2\pi \epsilon_0 \hbar^2} \right)^2 \frac{9R^4}{(qR)^{10}} [\sin(qR) - qR \cos(qR)]^2 . \quad (1.131)$$

Izmenjalni valovni vektor \mathbf{q} vsebuje informacijo o kotni porazdelitvi in iz minimumov preseka lahko določimo radij jedra. Če bi bil naš približek točen, bi pričakovali ničle pri $\tan(qR) = qR$. Ker pa jedra nimajo ostrih robov, je porazdelitev zabrisana, tako da namesto ničel opazimo v njej minimume.



Slika 1.6: (Levo) Oblikovni faktor ter sipalni presek za enakomerno porazdelitev naboja z radijem $R = 4,1$ fm pri sipanju elektronov s vpadno energijo 450 MeV. (Sredina in desno) Meritev sipalnega preseka in prilagajana porazdelitev naboja pri sipanju elektronov z energijo 450 MeV na jedrih ${}^{58}_{28}\text{Ni}$ (Povzeto po I. Sick et al., Phys. Rev. Lett. 35, 910 (1975)).

Poglejmo si konkretni primer. Pri sipanju elektronov z energijo 300 MeV na nekem jedru opazimo prvi minimum v številu izmerjenih sipanih delcev pri 30° . Ocenimo polmer jedra v

približku, ko ga obravnavamo kot homogeno kroglico. Minimumi (oz. ničle) sipalnega preseka v enačbi (1.131) so prisotni, ko je izpolnen pogoj $qR = (n - 1/2)\pi$; $k = 2, 3, \dots$. Prvi minimum zato nastopi pri kotu, kjer velja

$$\frac{2pR}{\hbar} \sin(\theta/2) = \frac{3\pi}{2}, \quad (1.132)$$

od koder sledi za radij jedra $R = 3\pi\hbar/4p \sin(\theta/2) = 6$ fm.

Poglejmo si še sipanje curka elektronov izostrenim na $S_I = 1$ mm², s tokom $I = 1$ mA in energijo 250 MeV na tarči v obliki lističa zlata (^{197}Au) z gostoto $\rho = 19$ g/cm³, debeline $d = 100$ μm . Najprej določimo luminoznost takšnega eksperimenta

$$\mathcal{L} = N_{\text{tarca}} \frac{dn_{\text{curek}}}{dSdt} = \frac{\rho N_A S_I d}{m_{\text{Au}}} \frac{I}{e S_I} = \frac{\rho N_A I d}{e m_{\text{Au}}} = 3,6 \times 10^{40} / \text{m}^2 \text{s}, \quad (1.133)$$

kjer smo v zadnjem koraku uporabili vrednost Avogadrovega števila $N_A = 6.0 \times 10^{23}$ mol⁻¹ ter osnovnega naboja $e = 1,6 \times 10^{-19}$ As. Curek sipanih delcev merimo z detektorjem preseka $S_{\text{det}} = 5$ cm² na razdalji $r = 10$ cm od tarče pri kotu $\theta = 30^\circ$ napram smeri vhodnega toka. V približku, ko obravnavamo jedra zlata kot točkasta lahko sedaj ocenimo še pogostost zadetkov v takšnem detektorju (Γ). Velja namreč

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega} = \mathcal{L} \frac{d\sigma}{d\Omega}, \quad (1.134)$$

kjer nam diferencialni sipalni presek na točkastem jedru podaja enačba (1.124) pri $F(\mathbf{q}) = \mathbf{1}$, oziroma $d\sigma/d\Omega = 8$ mb/sr. V končnem prostorskem kotu $\Delta\Omega = S_{\text{det}}/r^2 = 5 \times 10^{-2}$ sr je potem

$$\Gamma = \int_{\Delta\Omega} \frac{d\Gamma}{d\Omega} d\Omega \simeq \frac{d\Gamma}{d\Omega} \Delta\Omega = 3,3 \text{ kHz}. \quad (1.135)$$

Poglavje 2

Fizika osnovnih delcev

2.1 Odvisnost sipalnega preseka od energije vpadnega curka

Odvisnost sipalnega preseka od energije vpadnega curka ima pogosto specifično resonančno obliko, ki je posledica tvorbe posamičnega resonančnega stanja oziroma *resonance*, ki da pri resonančni energiji poglobitveni prispevek k sipalnemu preseku. Izpeljimo torej to resonančno obliko na primeru elastičnega sipanja, ko se kompozicija vpadnega curka in sipalnega jedra v sipanju ne spremenita. Začetno stanje – obravnavamo ga kot vpadni ravni val v smeri z ter z valovnim vektorjem $k \equiv p_i/\hbar$ – razvijemo po krogljnih valovih daleč stran od sipalnega jedra (pri radiju, ki je posledično tudi mnogo večji od de Brogliejeve valovne dolžine vpadnih delcev $r \gg 1/k$) kot

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{ikz} = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{i}{2kr} \sum_l (2l+1) \left[(-1)^l e^{-ikr} - e^{ikr} \right] P_l(\cos\theta) + \dots, \quad (2.1)$$

kjer so P_l Legendrovi polinomi. Vpadni ravni val je torej sestavljen iz vpadnega in izstopajočega krogljnega vala. Vpliv sipalnega jedra je lahko le v faznem premiku izstopnega krogljnega vala¹. Ker nas zanimajo le sipana stanja in ne tisti del vpadnega curka, ki se ne sipa, moramo iz takšnega končnega stanja odšteti še projekcijo začetnega (nesipanega) stanja in lahko torej sipani val zapišemo kot

$$\psi_f = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{e^{ikr}}{kr} \sum_l (2l+1) \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2i} P_l(\cos\theta) + \dots. \quad (2.2)$$

Sedaj definiramo sipalno amplitudo $A(\theta)$

$$A(\theta) \equiv \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2i} P_l(\cos\theta), \quad (2.3)$$

tako da se valovna funkcija končnega stanja zapiše kot

$$\psi_f = \frac{1}{\sqrt{V}} \frac{e^{ikr}}{r} A(\theta). \quad (2.4)$$

¹Amplituda sipanega vala se pri elastičnem sipanju zaradi ohranitve verjetnosti ne more spremeniti.

Posledično je izstopajoči tok sipanega curka (njegova divergenca ustreza količini W_{fi} iz primera 1.17) v prostorski kot $d\Omega$ v oddaljenosti r od sipalnega centra

$$\Phi_f = \rho_f v_f r^2 d\Omega = \frac{1}{V} v_f |A(\theta)|^2 d\Omega, \quad (2.5)$$

medtem ko po definiciji velja za diferencialni sipalni presek

$$j_i \sigma(i \rightarrow f) = \Phi_f. \quad (2.6)$$

Od tod že lahko izrazimo elastični diferencialni sipalni presek kot

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{el}} = |A(\theta)|^2. \quad (2.7)$$

Integracija po $d\Omega$ nam da celoten elastični presek. Pri tem upoštevamo ortogonalnost Legendrovih polinomov ($\int P_l(\cos\theta) P_{l'}(\cos\theta) d\Omega = 4\pi \delta_{ll'}/(2l+1)$)

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{el}} &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \left| \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2i} \right|^2 \\ &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2(\delta_l). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Energijska odvisnost sipalnega preseka je v k in v δ_l . Sipalna amplituda in s tem sipalni presek bosta maksimalna, ko je posamičen $\delta_l \simeq \pi/2$ – takšnemu primeru pravimo resonanca. Zapišimo torej sipalno amplitudo kot

$$\begin{aligned} A(\theta) &= \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) \frac{e^{2i\delta_l} - 1}{2i} P_l(\cos\theta) \\ &= \frac{1}{k} \sum_l (2l+1) f_l P_l(\cos\theta), \end{aligned} \quad (2.9)$$

kjer je

$$f_l = \frac{i}{2} \left(1 - e^{2i\delta_l} \right) = \frac{1}{\text{ctg}\delta_l - i}. \quad (2.10)$$

Sedaj $\text{ctg}\delta_l$ razvijemo okoli $\delta_l^R = \pi/2$ oziroma razvijamo po energiji E , pri čemer upoštevamo $\delta_l^R = \delta_l(E_R)$, kjer je E_R energija resonanca

$$\begin{aligned} \text{ctg}\delta_l(E) &= \text{ctg}\delta_l(E_R) + (E - E_R) \left[\frac{d}{dE} \text{ctg}\delta_l(E) \right]_{E=E_R} + \dots \\ &= -(E - E_R) \frac{2}{\Gamma} + \dots, \end{aligned} \quad (2.11)$$

kjer smo vpeljali resonančno širino Γ kot $2/\Gamma \equiv -[d(\text{ctg}\delta_l)/dE]|_{E=E_R}$. f_l je tedaj

$$f_l = \frac{1}{\text{ctg}\delta_l - i} \simeq \frac{\Gamma/2}{(E - E_R) - i\Gamma/2}, \quad (2.12)$$

elastični sipalni presek za posamezen parcialni val v okolici njegove resonanca pa

$$\sigma_{\text{el}}^l = \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) |f_l|^2 \simeq \frac{4\pi}{k^2} (2l+1) \frac{\Gamma^2/4}{(E - E_R)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (2.13)$$

Takšni resonančni odvisnosti sipalnega preseka od energije pravimo tudi *Breit-Wignerjeva krivulja*. Izraz velja za brezspinsko tarčo in vpadni curek. V tem primeru l identificiramo s spinom resonance (j) kot kratkoživega vmesnega stanja (R). Če imata tarča (a) in vpadni curek (b) spin, ostane izraz enak, le povprečiti ga je potrebno po začetnih spinskih orientacijah

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{4\pi}{k^2} \frac{(2j+1)}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \frac{\Gamma^2/4}{(E-E_R)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (2.14)$$

Resonančno širino lahko interpretiramo s pomočjo principa nedoločenosti. Sipalni presek pri energijah, ki za $\Gamma/2$ odstopajo od resonančne E_R v primeru $\Gamma \ll E_R$ pade na polovico resonančnega

$$\sigma(E_R \pm \Gamma/2) \simeq \frac{\sigma(E_R)}{2}. \quad (2.15)$$

Resonančna energija E_R je s pomočjo meritve energijske odvisnosti sipalnega preseka določljiva le do intrinzične natančnosti, ki jo določa Γ . Takšna nedoločenost energije vmesnega stanja R pa po principu nedoločenosti pomeni, da stanje R ni stabilno, temveč razpade z razpadnim časom $\tau = \hbar/\Gamma$.

Resonančni elastični sipalni presek ($a + b \rightarrow R \rightarrow a + b$) lahko posplošimo tudi na primere, ko resonančno povečanje sipalnega preseka opazimo tudi v neelastičnem sipanju v druga stanja ($a + b \rightarrow R \rightarrow c + d$). V takšnem primeru namreč velja

$$\sigma(a + b \rightarrow R \rightarrow c + d) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{(2j+1)}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \frac{\Gamma_{ab}\Gamma_{cd}/4}{(E-E_R)^2 + \Gamma^2/4}, \quad (2.16)$$

kjer je celotna (razpadna) širina resonance sedaj

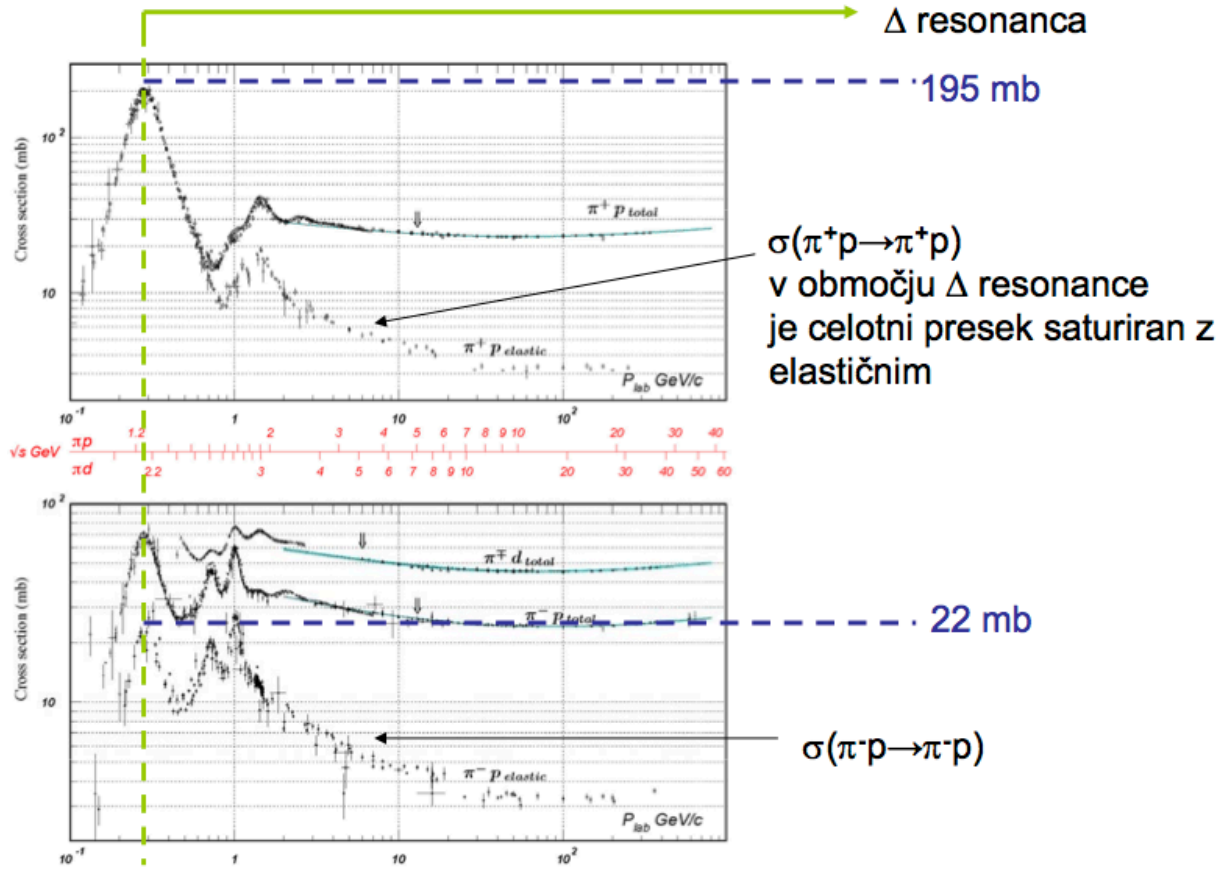
$$\Gamma = \sum_{ij} \Gamma_{ij}, \quad (2.17)$$

in seštevamo po vseh možnih stanjih ij pri katerih opazimo resonančno povečanje sipalnega preseka pri isti energiji E_R ter istem parcialnem valu ($l = j$). Verjetnost za 'razpad' takšne resonance v stanje ij je podana kar z razmerjem

$$\text{Br}(R \rightarrow ij) \equiv \Gamma_{ij}/\Gamma, \quad (2.18)$$

ki ga imenujemo tudi *razvejitevno razmerje*. Pri takšnih resonancah ima elastični sipalni presek posplošeno obliko

$$\sigma_{\text{el}} = \sigma(a + b \rightarrow R \rightarrow a + b) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{(2j+1)}{(2s_a+1)(2s_b+1)} \frac{\Gamma_{\text{ab}}^2/4}{(E-E_R)^2 + \Gamma^2/4}. \quad (2.19)$$



2.2 Sipanje $\pi^+ p$ ter resonanca Δ^{++}

Obravnavamo sipanje nabitih pionov na protonski tarči. Pri kinetični energiji pionov $T_\pi = 195$ MeV v laboratorijskem sistemu opazimo resonančni vrh v elastičnem sipalnem preseku z maksimalno vrednostjo $\sigma_{\text{el}}^{\text{max}} = 190$ mb. Iz te meritve lahko določimo tako maso kot spin takšne resonance (Δ^{++}). Ker je kinetična energija piona primerljiva z njegovo maso ($m_\pi c^2 = 140$ MeV), moramo kinematiko takšnega sipanja obravnavati relativistično. Zapišimo torej četverec celotne gibalne količine sistema v začetnem stanju ($\pi^+ p$) ter po tvorbi resonance (Δ^{++})

$$c p^\mu = (E_\pi + m_p c^2, c \mathbf{p}_\pi) = (E_\Delta, c \mathbf{p}_\Delta), \quad (2.20)$$

kjer je celotna energija piona $E_\pi = T_\pi + m_\pi c^2$. Isti četverec lahko zapišemo tudi v težiščnem sistemu, kjer velja $\mathbf{p}_\pi = -\mathbf{p}_p$ ter $\mathbf{p}_\Delta = \mathbf{0}$

$$c p'^\mu = (\sqrt{m_\pi^2 c^4 + c^2 |\mathbf{p}'_\pi|^2} + \sqrt{m_p^2 c^4 + c^2 |\mathbf{p}'_p|^2}, \mathbf{0}) = (m_\Delta c^2, \mathbf{0}). \quad (2.21)$$

Produkt $p_\mu p^\mu = p'_\mu p'^\mu$ je invarianten na Lorentzove transformacije. Enačimo torej $p_\mu p^\mu$ v začetnem stanju ter $p'_\mu p'^\mu$ v končnem, pa dobimo

$$m_\Delta^2 c^4 = (E_\pi + m_p c^2)^2 - |\mathbf{p}_\pi|^2 c^2, \quad (2.22)$$

kjer lahko gibalno količino piona v začetnem stanju v laboratorijskem sistemu zapišemo s pomočjo kinetične energije kot $c^2 |\mathbf{p}_\pi|^2 = E_\pi^2 - m_\pi^2 c^4 = (T_\pi + m_\pi c^2)^2 - m_\pi^2 c^4$. Vstavimo ta

izraz v gornjo enačbo za m_Δ pa dobimo

$$m_\Delta^2 c^4 = m_p^2 c^4 + m_\pi^2 c^4 + 2m_p c^2 (m_\pi c^2 + T_\pi). \quad (2.23)$$

Preglednost podobnih izpeljav v relativistični kinematiki se precej izboljša s primerno zamenjavo enot, tako da velja $c = 1$, mase in gibalne količine pa podajamo v enotah energije. V nadaljevanju bomo torej povsod uporabili takšno zamenjavo. Gornji izraz se na primer poenostavi v

$$m_\Delta^2 = m_p^2 + m_\pi^2 + 2m_p(m_\pi + T_\pi). \quad (2.24)$$

Ob upoštevanju podanih podatkov ter mase protona $m_p \simeq 940$ MeV torej ocenimo maso resonance Δ^{++} na $m_\Delta \simeq 1236$ MeV.

S pomočjo meritve maksimalnega elastičnega preseka sedaj poiščimo še spin resonance Δ^{++} . Za to moramo $\sigma_{\text{el}}^{\text{max}}$ izrednotiti v težiščnem sistemu. Uporabimo tudi podatek, da pri sipanju π^+p v okolici resonance Δ^{++} elastični sipalni presek skoraj popolnoma zapolni celoten sipalni presek in torej velja $Br(\Delta^{++} \rightarrow \pi^+p) \simeq 1$ oziroma $\Gamma(\Delta^{++}) \simeq \Gamma(\Delta^{++})_{\pi^+p}$. Sipalni presek tudi poprečimo po spinu protona (pioni imajo spin nič), pa dobimo (v težiščnem sistemu velja $E_R = m_\Delta$)

$$\sigma_{\text{el}}(E = m_\Delta) = \frac{4\pi}{k^2} \frac{2j_\Delta + 1}{(2s_p + 1)(2s_\pi + 1)} \frac{\Gamma_{\pi^+p}^2}{\Gamma^2} \simeq \frac{4\pi}{k^2} \frac{2j_\Delta + 1}{2}. \quad (2.25)$$

Izrednotiti moramo še valovni vektor k oziroma pripadajočo gibalno količino $\hbar k \equiv p \equiv |\mathbf{p}'_\pi| = |\mathbf{p}'_p|$. Uporabimo sedaj ohranitev energije v težiščnem sistemu med začetnim in končnim stanjem

$$m_\Delta = E'_\pi + E'_p = \sqrt{m_\pi^2 + |\mathbf{p}'_\pi|^2} + \sqrt{m_p^2 + |\mathbf{p}'_p|^2}. \quad (2.26)$$

Gornjo enačbo kvadriramo

$$m_\Delta^2 = m_\pi^2 + m_p^2 + 2p^2 + 2\sqrt{(m_\pi^2 + p^2)(m_p^2 + p^2)}, \quad (2.27)$$

izpostavimo koren, ter kvadriramo še enkrat, pa dobimo kvadratno enačbo za p^2 , katere rešitev je

$$p^2 = \frac{(m_\Delta^2 - m_p^2 - m_\pi^2)^2 - 4m_p^2 m_\pi^2}{4m_\Delta^2}. \quad (2.28)$$

Sedaj uporabimo že izračunano maso resonance Δ^{++} pa dobimo numerično $p \simeq 230$ MeV. $\sigma_{\text{el}}^{\text{max}}$ sedaj zavisi le še od neznane vrednosti spina j_Δ . Napovedi za $\sigma_{\text{el}}^{\text{max}}$ pri nekaj najnižjih možnih vrednostih j_Δ so podane v tabeli 2.1, od koder po primerjavi z izmerjeno vrednostjo sledi da ima resonanca Δ^{++} spin $3/2$.

| j_Δ | $\sigma_{\text{el}}^{\text{max}}$ [mb] |
|------------|--|
| 1/2 | 95 |
| 3/2 | 190 |
| 5/2 | 285 |

Tabela 2.1: Vrednosti elastičnega sipalnega preseka π^+p pri resonančni energiji m_Δ v težiščnem sistemu za različne vrednosti vrtilne količine vmesnega stanja.

2.3 Sipanje preko močne interakcije ter izospin

Zaradi podobnega obnašanja protona (p) in nevtrona (n) pri jedrski interakciji je pogosto pravno obravnavati oba delca kot enaka, hkrati pa uvesti novo kvantno število – izospin – po katerem se ločita. Lastne vrednosti pripadajočih izospinskih operatorjev za proton in nevtron so podane v tabeli 1.1. Izospin seštevamo podobno kot spin, pri močni (jedrski) interakciji pa se ohranja. Posledično tudi pioni, ki se tvorijo in sipajo preko jedrske interakcije nosijo izospinski naboj, in sicer tvorijo π^+ , π^0 in π^- izospinski triplet s celotnim izospinskim številom $I = 1$ (glej tabelo 2.2).

| nukleon | I | I_3 |
|---------|-----|-------|
| π^+ | 1 | 1 |
| π^0 | 1 | 0 |
| π^- | 1 | -1 |

Tabela 2.2: Izospin pionov.

Kakšen izospin pa ima resonanca Δ^{++} , ki jo opazimo v sipanju π^+ in p ? Celoten izospin I bi lahko bil ali $I_\pi - I_p = 1/2$ ali $I_\pi + I_p = 3/2$. Vendar pa mora biti hkrati $I_{3\Delta} = I_{3\pi} + I_{3p} = 3/2$. Ker za lastne vrednosti operatorjev I in I_3 mora veljati $I_\Delta \geq |I_{3\Delta}|$ zaključimo, da ima Δ^{++} izospin (ter tudi njegovo tretjo komponento) $3/2$. Pričakujemo torej obstoj še treh resonančnih stanj pri isti energiji in sicer v izospinskih kanalih s tretjo komponento $I_3 = 1/2, -1/2, -3/2$.

Sedaj lahko ocenimo tudi razmerje elastičnih sipalnih presekov pri sipanju pozitivno ali negativno nabitih pionov na protonih pri energiji Δ resonance. Evodelčno izospinsko stanje $|\pi^- p\rangle = |1, -1\rangle|1/2, 1/2\rangle$ sprojicirajmo stanja skupnega izospina s pomočjo ustreznih Clebsch-Gordanovih koeficientov $(|l_1, m_1\rangle|l_2, m_2\rangle) = \sum_{J,M} C_{l_1, l_2, m_1, m_2}^{J, M} |J, M\rangle$

$$\begin{aligned} |1, -1\rangle|1/2, 1/2\rangle &= C_{1, 1/2, -1, 1/2}^{3/2, -1/2} |3/2, -1/2\rangle + C_{1, 1/2, -1, 1/2}^{1/2, -1/2} |1/2, -1/2\rangle \\ &= \sqrt{1/3} |3/2, -1/2\rangle - \sqrt{2/3} |1/2, -1/2\rangle. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Naredimo enako dekompozicijo še za stanje $\pi^+ p = |1, 1\rangle|1/2, 1/2\rangle$ (rezultat že poznamo)

$$|1, 1\rangle|1/2, 1/2\rangle = |3/2, 3/2\rangle. \quad (2.30)$$

Sipalni presek je proporcionalen absolutni vrednosti kvadrata matričnega elementa interakcijskega Hamiltoniana med začetnim in končnim stanjem $\sigma \propto |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle|^2$. Ker močna interakcija ohranja izospin lahko zapišemo $\mathcal{H}_{\text{int}} = \sum_I \mathcal{H}_I$, kjer velja $\langle I, I_3 | \mathcal{H}_I | I', I'_3 \rangle = \mathcal{M}_I \delta_{I, I'} \delta_{I_3, I'_3}$. Potem se oba elastična sipalna preseka (kjer sta začetno in končno stanje identični) zapišeta kot

$$\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p) \propto |\langle 3/2, 3/2 | \mathcal{H}_{\text{int}} | 3/2, 3/2 \rangle|^2 = |\mathcal{M}_{3/2}|^2, \quad (2.31)$$

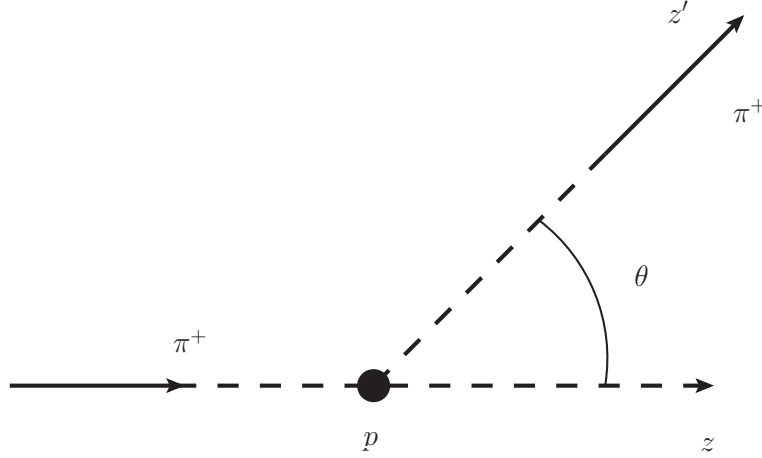
$$\begin{aligned} \sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p) &\propto \\ &|(\sqrt{1/3} \langle 3/2, -1/2 | - \sqrt{2/3} \langle 1/2, -1/2 |) \mathcal{H}_{\text{int}} (\sqrt{1/3} | 3/2, -1/2 \rangle - \sqrt{2/3} | 1/2, -1/2 \rangle)|^2 \\ &= |1/3 \mathcal{M}_{3/2} + 2/3 \mathcal{M}_{1/2}|^2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Pri resonančni energiji ($E_{\text{CMS}} = m_\Delta$) v obeh sipalnih presekih dominira izospinsko stanje $I = 3/2$ in je torej $\mathcal{M}_{3/2} \gg \mathcal{M}_{1/2}$. Za razmerje obeh sipalnih presekov pri tej energiji velja torej

$$\frac{\sigma(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p)}{\sigma(\pi^- p \rightarrow \pi^- p)} \Big|_{E_{\text{CMS}}=m_\Delta} \simeq \frac{|\mathcal{M}_{3/2}|^2}{|1/3 \mathcal{M}_{3/2}|^2} = 9. \quad (2.33)$$

2.4 Kotna porazdelitev pri resonančnem sipanju

Oglejmo si ponovno elastično sipanje $\pi^+p \rightarrow \pi^+p$ v območju resonance Δ^{++} . Spin resonance lahko določimo tudi iz meritve kotne porazdelitve sipanih π^+ . Za z os si izberemo smer vpadnega π^+ . Recimo, da imata vpadni π^+ ter p relativno tirno vrtilno količino $l = 1$ (v sistemu, kjer



p miruje, je to kar tirna vrtilna količina piona). Hkrati mora biti njena projekcija na smer z za ravni val v smeri z ($\psi \propto \exp(ikz)$) enaka nič, v koordinatni upodobitvi velja namreč $\hat{J}_z = i\hbar(x\partial/\partial y - y\partial/\partial x)$. Prostorski del takšne dvodelčne valovne funkcije zapišemo torej simbolično kot $\psi_{space} = |1, 0\rangle_l$. To moramo pomnožiti še s spinsko komponento valovne funkcije protona, za katero si lahko izberemo $\psi_{spin} = |1/2, \pm 1/2\rangle_s$. Takšno sestavljeno stanje lahko ponovno sprojciramo na stanja celotne vrtilne količine sistema. Pri tem imamo dve možni stanji $\psi_{1/2} = |1/2, \pm 1/2\rangle_j$ ali $\psi_{3/2} = |3/2, \pm 1/2\rangle_j$. Po elastičnem sipanju π^+ odleti pod kotom θ glede na os z . Projekcija njegove tirne vrtilne količine na os z je tedaj lahko $+1$, 0 ali -1 . Tudi spin p lahko spremeni orientacijo. Brez izgube splošnosti se lahko osredotočimo na začetno stanje, kjer je projekcija spina protona v smeri z $1/2$. Poglejmo si vmesno stanje $\psi_{3/2}$ ter kako se sprojcira nazaj na produkte enodelčnih stanj π^+ in p z medsebojno tirno vrtilno količino $l = 1$. Možni stanji sta le $|1, 0\rangle_l |1/2, 1/2\rangle_s$ ter $|1, 1\rangle_l |1/2, -1/2\rangle_s$, saj so dosegljiva le stanja s skupno projekcijo vrtilne količine na os z $+1/2$. Ponovno uporabimo torej Clebsch-Gordonove koeficiente, da zapišemo

$$\begin{aligned} |3/2, 1/2\rangle_j &= C_{1,1/2,1,-1/2}^{3/2,1/2} |1, 1\rangle_l |1/2, -1/2\rangle_s + C_{1,1/2,0,1/2}^{3/2,1/2} |1, 0\rangle_l |1/2, 1/2\rangle_s \\ &= \sqrt{1/3} |1, 1\rangle_l |1/2, -1/2\rangle_s + \sqrt{2/3} |1, 0\rangle_l |1/2, 1/2\rangle_s. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Stanji $|1, 1\rangle_l$ in $|1, 0\rangle_l$ opisujeta tirno vrtilno količino koordinatne odvisnosti valovne funkcije in nista nič drugega kot krogelni funkciji $|1, 1\rangle_l = Y_1^1 = -\sqrt{3/8\pi} \sin \theta \exp(i\phi)$ in $|1, 0\rangle_l = Y_1^0 = \sqrt{3/4\pi} \cos \theta$. Kotno porazdelitev sipanih π^+ nam tako da verjetnostna gostota

$$\psi_{3/2}^* \psi_{3/2} = \frac{1}{3} |Y_1^1|^2 + \frac{2}{3} |Y_1^0|^2 \propto 1 + 3 \cos^2 \theta, \quad (2.35)$$

kjer smo v prvem koraku upoštevali še ortogonalnost spinskih stanj, v drugem pa izraz še pointegrali po polarnem kotu ϕ (v našem primeru je takšna integracija trivialna, saj se vsa ϕ

odvisnost pokrajša). Do popolnoma enake porazdelitve bi prišli tudi z izbiro medsebojne tirne vrtilne količine π^+p para $l = 2$, ki v povezavi s spinom protona pravtako da neničelno projekcijo na vmesno spinsko stanje resonance Δ ($j = 3/2$). Meritve kotnih porazdelitev sipanih pionov se res ujemajo z gornjo napovedjo (slika 2.1). Nasprotno pa bi bila v primeru vmesnega stanja $|1/2, 1/2\rangle_j$ kotna porazdelitev piona v končnem stanju z $l = 1$ konstantna, saj je

$$\begin{aligned} |1/2, 1/2\rangle_j &= C_{1,1/2,1,-1/2}^{1/2,1/2} |1, 1\rangle_l |1/2, -1/2\rangle_s + C_{1,1/2,0,1/2}^{1/2,1/2} |1, 0\rangle_l |1/2, 1/2\rangle_s \\ &= \sqrt{2/3} |1, 1\rangle_l |1/2, -1/2\rangle_s - \sqrt{1/3} |1, 0\rangle_l |1/2, 1/2\rangle_s, \end{aligned} \quad (2.36)$$

od koder sledi

$$\psi_{1/2}^* \psi_{1/2} = \frac{2}{3} |Y_1^1|^2 + \frac{1}{3} |Y_1^0|^2 \propto 1. \quad (2.37)$$

Trivialno bi enak rezultat dobili tudi z neposredno projekcijo na $|1/2, 1/2\rangle_j = |0, 0\rangle_l |1/2, 1/2\rangle_s$.

Kotno porazdelitev pionov v resonančnem sipanju preko vmesnega stanja $|3/2, 1/2\rangle_j$ pa lahko dobimo tudi enostavneje. Za to si pogledjmo zasuk tega stanja iz sistema z v sistem z' osjo z' , ki kaže v smer izhodnega piona in je glede na sistem z zasukana za kot θ okrog osi y . Zasukano stanje (valovno funkcijo) izrazimo kot linearno kombinacijo stanj z različnimi projekcijami na bazne vektorje v sistemu z' . Koefficienti takšnih projekcij so t.i. funkcije *d* oziroma *rotacijske funkcije*

$$e^{-i\hat{J}_y\theta} |j, m\rangle = \sum_{m'} d_{m,m'}^j(\theta) |j, m'\rangle. \quad (2.38)$$

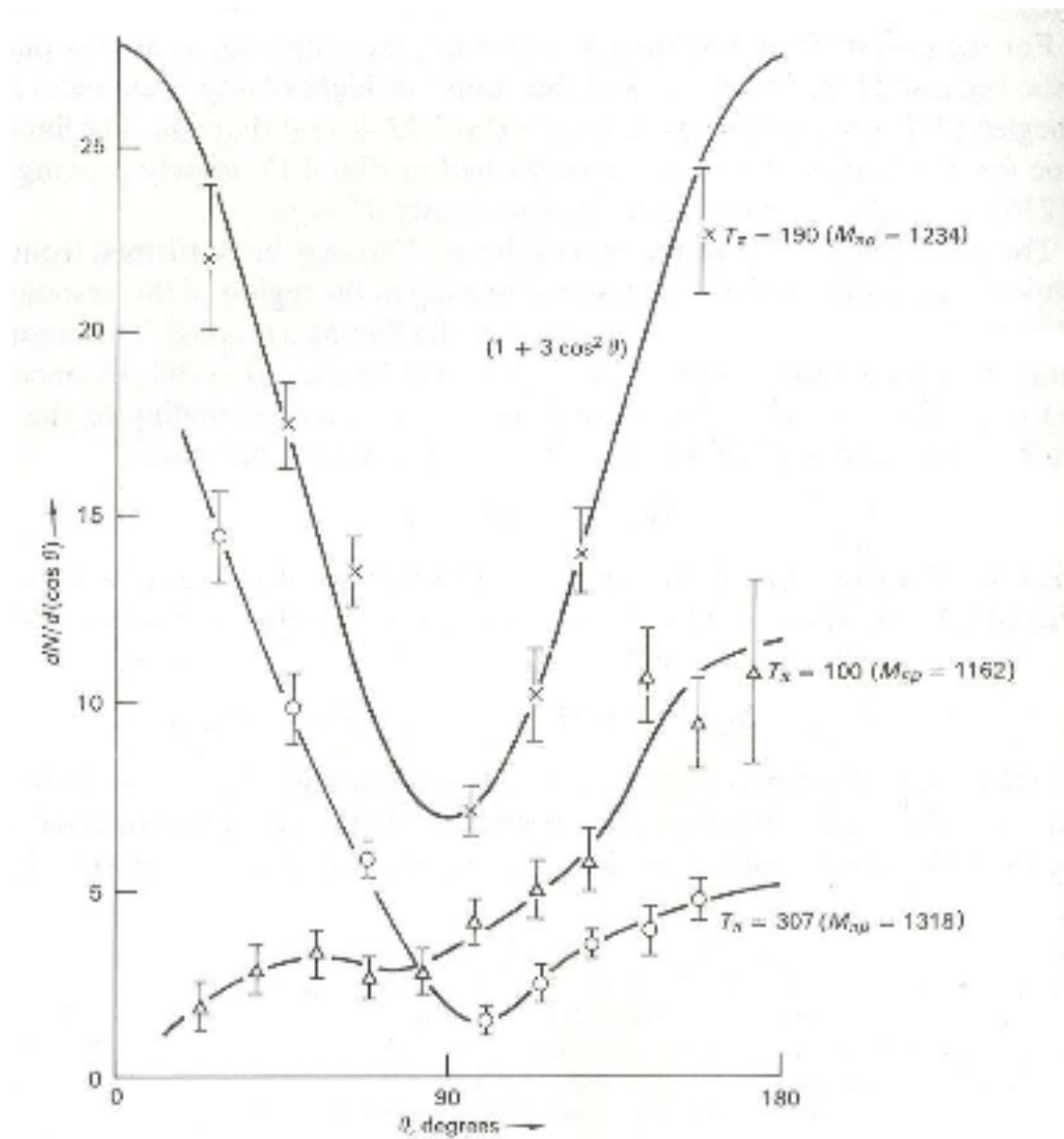
Za naš primer dobimo torej

$$\begin{aligned} \psi'_{3/2} = e^{-i\hat{J}_y\theta} |3/2, 1/2\rangle &= d_{-3/2,1/2}^{3/2}(\theta) |3/2, -3/2\rangle + d_{-1/2,1/2}^{3/2}(\theta) |3/2, -1/2\rangle \\ &\quad + d_{1/2,1/2}^{3/2}(\theta) |3/2, 1/2\rangle + d_{3/2,1/2}^{3/2}(\theta) |3/2, 3/2\rangle. \end{aligned} \quad (2.39)$$

To je torej valovna funkcija Δ^{++} izražena z baznimi vektorji v sistemu z' osjo z' . Sedaj upoštevamo, da je v primeru, da sistem z' ustreza smeri izhodnega piona, projekcija njegove tirne vrtilne količine na z' nič (iz enakega razloga kot smo to zahtevali za vpadni pion v sistemu z). Potem bo lahko projekcija celotne vrtilne količine sistema na os z' le posledica spina protona. Ker lahko ima ta le vrednosti $\pm 1/2$ sta torej stanji $|3/2, \pm 3/2\rangle$ v tem primeru nedosegljivi in lahko kotno odvisnost sipalnega preseka ponovno dobimo iz kvadrata absolutne vrednosti valovne funkcije končnega stanja kot

$$\psi_{3/2}'^* \psi_{3/2}' = |d_{-1/2,1/2}^{3/2}(\theta)|^2 + |d_{1/2,1/2}^{3/2}(\theta)|^2 \propto 1 + 3 \cos^2 \theta, \quad (2.40)$$

kjer smo v prvem koraku ponovno uporabili ortogonalnost spinskih stanj.



Slika 2.1: Kotna porazdelitev pri $\pi^+p \rightarrow \Delta^{++} \rightarrow \pi^+p$. Povzeto po [6].

2.5 Kvarki in leptoni ter njihova kvantna števila

Znotraj standardnega modela osnovnih delcev in interakcij vso znano snov tvorijo fermionski delci s spinom $1/2$, ki jih delimo glede na to ali interagirajo močno (kvarki q , ki tvorijo hadronska stanja) ali le elektromagnetno in šibko (leptoni l). Pri tem opomnimo, da elektromagnetno interagirajo le nabiti delci. Vsem kvarkom lahko pripišemo barionsko kvantno število, ki ga v zelo dobrem približku ohranjajo vse interakcije znotraj standardnega modela. Natančneje, iz zgodovinskih razlogov vsak kvark nosi barionsko število $B_q = 1/3$. Podobno lahko vsem leptonom pripišemo leptonsko število $L_l = 1$. Tudi za to število do sedaj še nismo izmerili fizikalnega procesa, v katerem bi bilo kršeno, čeprav znotraj standardnega modela ta možnost obstaja, povezana pa je z majhnostjo izmerjenih mas nevtrinov. Ker tako kvarki kot leptoni nastopajo v parih z različnim nabojem: $2/3$ ali $-1/3$ osnovnega naboja za kvarke ter -1 ter 0 za leptone; hkrati pa smo do sedaj takšne pare leptonov in kvarkov dosedaj izmerili tudi v treh kopijah, oz. družinah, konvencionalno vsakemu posamičnemu fermionu pripišemo tudi kvantno število okusa. Znotraj standardnega modela le šibka interakcija lahko krši to kvantno število. Nazadnje omenimo, da imajo vsi anti-delci vsa kvantna števila predznačena ravno obratno kot delci, npr. $B_{\bar{q}} = -1/3$. Vsi delci snovi s pripadajočimi kvantnimi števili so povzeti v tabeli 2.3.

| delec (okus) | B | L | Q |
|--------------|-------|-----|--------|
| Kvarki | | | |
| u | $1/3$ | 0 | $2/3$ |
| d | $1/3$ | 0 | $-1/3$ |
| c | $1/3$ | 0 | $2/3$ |
| s | $1/3$ | 0 | $-1/3$ |
| t | $1/3$ | 0 | $2/3$ |
| b | $1/3$ | 0 | $-1/3$ |
| Leptoni | | | |
| ν_e | 0 | 1 | 0 |
| e | 0 | 1 | -1 |
| ν_μ | 0 | 1 | 0 |
| μ | 0 | 1 | -1 |
| ν_τ | 0 | 1 | 0 |
| τ | 0 | 1 | -1 |

Tabela 2.3: Kvantna števila osnovnih delcev.

Barioni so hadroni, ki imajo seštevek kvantnih števil kvarkovskega okusa 3 ter posledično barionsko število $B_B = 1$, leptonsko število pa nič. Takšna sta oba nukleona $p \sim uud$ in $n \sim ddu$, pa tudi bolj eksotična resonančna stanja kot je $\Lambda \sim uds$. Poleg barionov med hadrone štejemo tudi mezone, ki imajo vsoto okusnih kvantnih števil kvarkov nič, npr. $\pi^+ \sim u\bar{d}$ ali $K^+ \sim u\bar{s}$. Ker močna in elektromagnetna interakcija ohranjata okuse, so najnižje ležeče hadronske resonance dolgožive – razpadejo le po šibki interakciji.

Čeprav v splošnem šibka interakcija krši kvantna števila okusa, obstaja velika razlika med procesi, ki potekajo preko t.i. nabitih tokov – v katerih “gornji” kvarki oz. leptoni (z nabojem $2/3$ oz. 0) prehajajo v “spodnje” (z nabojem $-1/3$ oz. -1) ali obratno, ter procesi, ki potekajo preko t.i. nevtralnih tokov, kjer so prehodi znotraj “gornjih” ali “spodnjih” kvarkov oz. leptonov:

Nabitni tokovi znotraj standardnega modela potekajo v prvem redu perturbacije šibke interakcije in so zato mnogo bolj pogosti kot nevtralni tokovi, ki spreminjajo okus. In čeprav se slednji pojavljajo z izmerljivo verjetnostjo med "spodnjimi" kvarki, so komajda opazni med gornjimi kvarki in (znotraj standardnega modela) praktično neizmerljivi med leptoni.

Iz zgodovinskih razlogov kršitev kvarkovskih okusov u in d dostikrat označujemo kar s pomočjo kršitev izospina, ko obravnavamo kvarka u in d kot stanji izosospinskega dubleta z $I = 1/2$ ter $I_3(u) = 1/2$ ter $I_3(d) = -1/2$. Zato pravimo tudi, da šibke interakcije kršijo izospin. Ostale kvarkovske okuse (ki jih prav tako kršijo le šibke interakcije) imenujemo tudi čudnost (označujemo z s ali $S = -s$), čarobnost (c ali C), lepota (ang. beauty, b ali $B = -b$ - pozor, tukaj ne gre za barionsko število) ter t - okus kvarka top.

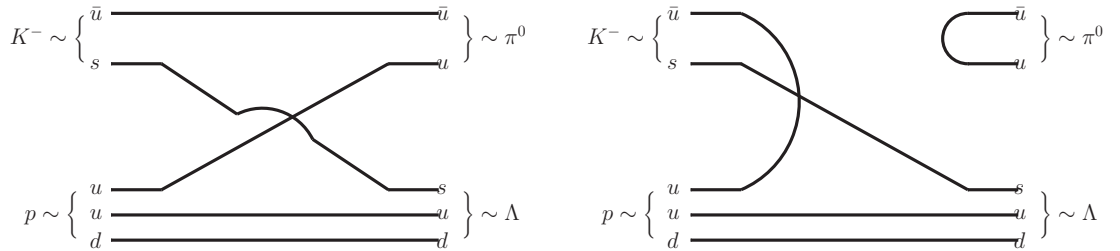
Kot že omenjeno, vse interakcije standardnega modela v izredno dobrem približku ohranjajo barionsko ter leptonsko število², zato procese, ki kršijo ti dve števili označujemo kot prepovedane znotraj standardnega modela. Vse interakcije standardnega modela eksaktno ohranjajo električni naboj.

Oglejmo si torej nekaj morebitnih reakcij, določimo ali so znotraj standardnega modela dovoljene in določimo interakcijo, po kateri potekajo.

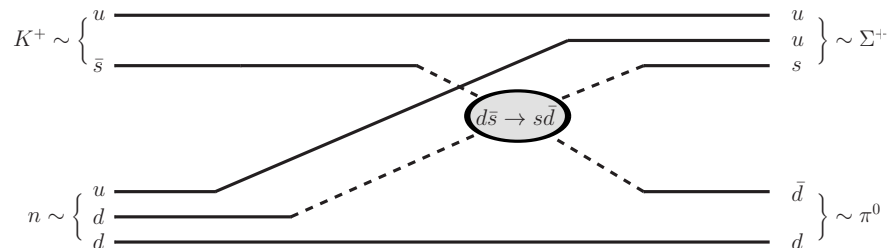
1. $pp \rightarrow ppp\bar{p}$: Protona v začetnem stanju imate skupno barionsko število $B_i = 2$ ter naboj $Q_i = 2$. Ostala kvantna števila standardnega modela so nič (ker imamo v tem procesu opravka le z (anti)protoni, je ohranitev posamičnih kvarkovskih okusov s prejšnjima dvema pogojema že zagotovljena. Tudi končno stanje ima barionsko število $B_f = 2$ ter $Q_f = 2$ (antidelci imajo obratno predznačena vsa kvantna števila delcev). Posledično je gornji proces znotraj standardnega modela dovoljen in poteka preko močne interakcije.
2. $pp \rightarrow p\bar{p}\pi^+\pi^-$: V tem primeru imamo $B_i = 2$, $Q_i = 2$, in pa $B_f = 0$, $Q_f = 0$. Opazimo da bi tak proces kršil tako barionsko število kot tudi naboj. Zato je znotraj standardnega modela prepovedan in dejansko ni bil še nikdar opažen.
3. $e^+e^- \rightarrow p\bar{p}$: V tem primeru imamo v začetnem stanju $B_i = 0$, $Q_i = 0$ (ter tudi $L_i = 0$), enako pa tudi v končnem stanju - proces je znotraj standardnega modela torej dovoljen. Ker pa v procesu nastopajo leptoni in ne le hadronska stanja, ta ne more potekati preko močne interakcije. Nabiti delci v tem primeru lahko interagirajo preko elektromagnetne interakcije (pri zelo visokih energijah je sicer pomemben tudi prispevek šibke interakcije).
4. $pp \rightarrow e^+e^+$: V začetnem stanju imamo $B_i = 2$, $L_i = 0$ ter $Q_i = 2$, v končnem pa $B_f = 0$, $L_f = 2$ ter $Q_f = 2$. Čeprav torej ta proces ohranja naboj, pa krši leptonsko ter barionsko število, zato je znotraj standardnega modela prepovedan.
5. $\pi^+ \rightarrow \mu^+\nu$: V začetnem stanju imamo $B_i = 0$, $L_i = 0$ ter $Q_i = 1$, enako pa tudi v končnem. Ker končno stanje vsebuje leptonska stanja, ta interakcija ne more potekati preko močne interakcije, ker pa imamo opravka tudi z nevtralnimi nevtrinom, tudi elektromagnetna interakcija ne pride v poštev. Proces torej poteka preko (nabite) šibke interakcije, kar nam pove tudi izospinsko število, saj imamo v začetnem stanju $I = 1$, $I_3 = 1$, v končnem pa seveda $I = 0$.

²Teoretični izračuni kažejo, da šibke interakcije pri visokih temperaturah ($T \gtrsim 100$ GeV) lahko kršijo vsoto barionskega ter leptonskega števila ($B + L$), če se njuna razlika $B - L$ ohranja (in s tem morda igrajo pomembno vlogo pri tvorbi kozmične asimetrije med gostoto snovi ter anti-snovi v zgodnjem vesolju). Pri nižjih temperaturah, pa so takšni procesi Boltzmannovo zastrti in zato neizmerljivo redki.

6. $\nu n \rightarrow p\mu^-$: V začetnem stanju imamo $B_i = 1, L_i = 1, Q_i = 0$ ter $(I_3)_i = -1/2$, v končnem pa $B_f = 1, L_f = 1, Q_f = 0$ ter $(I_3)_f = 1/2$. Omenjen proces torej krši izospin ter vsebuje tudi nevtrine, zato poteka preko šibke interakcije.
7. $\mu^+ \rightarrow e^+\gamma$: V omenjenem procesu se spremeni le kvantno število leptonskega okusa (foton ne nosi ohranjenih kvantnih števil). Proces torej načeloma lahko poteka preko šibke interakcije. Vendar pa prehod med "spodnjima" leptonoma predstavlja nevtralni šibki tok, ki znotraj standardnega modela poteka le v višjih redih perturbacije. Omenjen proces je zato zelo redek in tudi eksperimentalno še ni bil opažen.
8. $\mu^+ \rightarrow e^-e^+e^+$: Proces je povsem analogen prejšnjemu primeru, le da imamo sedaj v končnem stanju namesto fotona par elektrona in pozitrona, ki prav tako skupaj nimata neničelnih kvantnih števil. Omenjen proces je zato v prvem redu šibke perturbacije prepovedan.
9. $K^-p \rightarrow \Lambda\pi^0$: V začetnem stanju imamo $B_i = 1, Q_i = 0, (I_3)_i = 1$ ter čudnost $S_i = -1$ ($K^- \sim s\bar{u}$), v končnem pa $B_f = 1, Q_f = 0, (I_3)_f = 1$ ter $S_f = -1$. V tem hadronskem procesu se torej ohranjajo vsa kvantna števila in zato lahko poteka preko močne interakcije. Za hitrejšo pot do rešitve si lahko v hadronskih procesih pogosto pomagamo s preprostimi diagrami na kvarkovskem nivoju, kjer izpišemo vse kvarkovske okuse v začetnem ter končnem stanju, ter jih poskušamo med seboj povezati z neprekinjenimi črtami (morebitno sekanje teh črt ni pomembno, povežemo lahko tudi kvarkovske okuse znotraj posameznega hadrona). Če nam to uspe, je proces dovoljen preko močne interakcije.



10. $K^+n \rightarrow \Sigma^+\pi^0$: V začetnem stanju imamo sedaj $B_i = 1, Q_i = 1, (I_3)_i = 0$ ter $S_i = 1$, v končnem pa $B_f = 1, Q_f = 1, (I_3)_f = 1$ ter $S_f = -1$ ($\Sigma^+ \sim uus$). V tem hadronskem procesu se torej čudnost ter izospin ne ohranjata, zato v nasprotju s prejšnjim primerom lahko poteka le preko šibke interakcije. Izkaže se, da celo šele v višjem redu perturbacije, saj se na nivju kvarkovskih okusov, ti spreminjajo le med "spodnjimi" kvarki in torej ta proces poteka preko nevtralnih šibkih tokov. Spet lahko do rešitve pridemo s pomočjo diagrama. Tokrat vseh kvarkovskih okusov ne moremo enostavno povezati.



2.6 Valovne funkcije hadronov

Oglejmo si lastnosti valovne funkcije Δ^{++} resonance. Njena valovna funkcija naj bo produkt okusnega, spinskega ter krajevnega dela. Iz meritev sipalnega preseka vemo, da ima ta resonanca spin $3/2$ pa tudi izospin $3/2$. Ob utemeljeni predpostavki, da so torej relevantne prostostne stopnje, katerih vezano stanje je Δ^{++} trije (lahki) kvarki, takoj zaključimo, da bosta okusni ter spinski del imela obliko $|uuu\rangle$ ter $|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle$. Ker gre za osnovno stanje s takšno kombinacijo spina ter izospina pravtako zaključimo, da bo krajevni del valovne funkcije v stanju s celotno tirno vrtilno količino $l = 0$ ($|l, m\rangle = |0, 0\rangle \equiv Y_{00}$). Takoj opazimo, da so vse nastete komponente valovne funkcije Δ^{++} sode na zamenjavo gradnikov. Celotna fermionska valovna funkcija pa mora biti nasprotno liha na zamenjavo delcev. Od tod sklepamo, da mora obstajati še četrta komponenta valovne funkcije Δ^{++} , ki je liha na zamenjavo gradnikov. Ta komponenta (η) je posledica barvne interakcije med kvarki v vezanem stanju. Velja torej

$$|\Delta^{++}\rangle = \eta Y_{00} |uuu\rangle |\uparrow\uparrow\uparrow\rangle. \quad (2.41)$$

Na podlagi tega rezultata želimo sedaj skonstruirati še valovne funkcije preostalih najnižje ležečih barionskih resonanc različnih spinov ter okusov. Upoštevajoč le okuse treh najlažjih kvarkov u, d, s bi pričakovali $3^3 = 27$ možnih okusnih kombinacij. Če upoštevamo še vse možne kombinacije kvarkovskih spinov dobimo celo $6^3 = 216$ možnih barionskih stanj v osnovnem stanju tirne vrtilne količine! Vendar je le 56 teh stanj popolnoma simetričnih na zamenjavo delcev, kot zahteva prisotnost barvne komponente. Pri sistematični konstrukciji njihovih valovnih funkcij so nam v veliko pomoč operatorji višanja in nižanja spina (S^\pm) ter izospina (I^\pm). Takšne operatorje za spin poznamo že iz kvantne mehanike. V primeru izospina pa analogno definiramo

$$\begin{aligned} I^+|d\rangle &= |u\rangle & I^-|u\rangle &= |d\rangle & I^+|u\rangle &= 0 = I^+|\bar{d}\rangle, \\ I^+|\bar{u}\rangle &= -|\bar{d}\rangle & I^-|\bar{d}\rangle &= -|\bar{u}\rangle & I^-|d\rangle &= 0 = I^-|\bar{u}\rangle, \end{aligned} \quad (2.42)$$

kjer sta oba negativna predznaka v drugi vrstici stvar dogovora, saj v splošnem pripadajoča kompleksna faza ni eksperimentalno merljiva. Kot enostaven primer si pogledjmo konstrukcijo okusnega dela vseh pionov. Pričnimo s pionskim stanjem z največjo tretjo komponento izospina $|\pi^+\rangle \sim |u\bar{d}\rangle = |1, 1\rangle_{I, I_3}$. Na to stanje delujemo z operatorjem nižanja izospina, pa dobimo

$$I^-|u\bar{d}\rangle = |d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle. \quad (2.43)$$

Ob pravilni normalizaciji takšne valovne funkcije ($\langle\pi^0|\pi^0\rangle = 1$), ji pripada še normalizacijska konstanta $1/\sqrt{2}$, torej

$$|\pi^0\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle) \quad (2.44)$$

Uporabimo sedaj I^- še enkrat na tem rezultatu, pa dobimo

$$I^- (|d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle) \propto |d\bar{u}\rangle \sim |\pi^-\rangle. \quad (2.45)$$

Tako smo skonstruirali okusni del vseh treh valovnih funkcij mezonov z izospinom $I = 1$. Kaj pa stanje z izospinom $I = 0$? Za takšno stanje $|\eta\rangle \sim |0, 0\rangle_{I, I_3}$ mora veljati $I^\pm|\eta\rangle = 0$, od koder sledi s primerno normalizacijo

$$|\eta\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{2}}(|d\bar{d}\rangle + |u\bar{u}\rangle). \quad (2.46)$$

Takšno stanje je avtomatsko tudi ortogonalno na vsa pionska stanja.

Poglejmo si sedaj konstrukcijo (simetričnih) okusnih valovnih funkcij deкупleta lahkih bari-
onov s spinom $3/2$. Ponovno začnemo z najvišjim izospinskim stanjem $|\Delta^{++}\rangle \sim |uuu\rangle$. Na njem
večkrat delujemo z I^- pa dobimo (že upoštevajoč primerno normalizacijo stanj)

$$I^-|\Delta^{++}\rangle = I^-|uuu\rangle = (|uud\rangle + |udu\rangle + |duu\rangle) \sim \sqrt{3}|\Delta^+\rangle, \quad (2.47a)$$

$$I^-|\Delta^+\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}(|udd\rangle + |dud\rangle + |ddu\rangle) \sim 2|\Delta^0\rangle, \quad (2.47b)$$

$$I^-|\Delta^0\rangle = \frac{3}{\sqrt{3}}|ddd\rangle \sim \frac{3}{\sqrt{3}}|\Delta^-\rangle. \quad (2.47c)$$

Podobno lahko konstruiramo tudi stanja, z okusnim kvantnim številom čudnosti. Po analogiji z
 I^\pm vpeljemo namreč operatorja U^\pm , za katera velja

$$\begin{aligned} U^+|d\rangle &= |s\rangle, & U^-|s\rangle &= |d\rangle, \\ U^+|\bar{s}\rangle &= -|\bar{d}\rangle, & U^-|\bar{d}\rangle &= -|\bar{s}\rangle, \end{aligned} \quad (2.48)$$

medtem ko U^\pm na vseh drugih kvarkovskih stanjih dasta nič. Sedaj z operatorjem U^+ delujemo
na vsa stanja $|\Delta\rangle$ pa dobimo triplet resonanc Σ^*

$$U^+|\Delta^{++}\rangle = 0, \quad (2.49a)$$

$$U^+|\Delta^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|uus\rangle + |usu\rangle + |suu\rangle) = |\Sigma^{+*}\rangle, \quad (2.49b)$$

$$U^+|\Delta^0\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}(|dus\rangle + |dsu\rangle + |sdu\rangle + |uds\rangle + |sud\rangle + |usd\rangle) = \sqrt{2}|\Sigma^{0*}\rangle, \quad (2.49c)$$

$$U^+|\Delta^-\rangle = (|dds\rangle + |dsd\rangle + |sdd\rangle) = \sqrt{3}|\Sigma^{-*}\rangle. \quad (2.49d)$$

Postopek na teh stanjih ponovimo še enkrat, pa dobimo par Ξ^* resonanc

$$U^+|\Sigma^{+*}\rangle = 0, \quad (2.50a)$$

$$U^+|\Sigma^{0*}\rangle = \frac{2}{\sqrt{6}}(|sus\rangle + |ssu\rangle + |uss\rangle) = \sqrt{2}|\Xi^{0*}\rangle, \quad (2.50b)$$

$$U^+|\Sigma^{-*}\rangle = \frac{2}{\sqrt{3}}(|dss\rangle + |ssd\rangle + |sds\rangle) = 2|\Xi^{-*}\rangle. \quad (2.50c)$$

Končno imamo še popolnoma simetrično stanje $|\Omega^-\rangle \sim |sss\rangle$, torej skupno deset stanj s sime-
tričnim okusnim delom.

Po drugi strani pa imamo le eno stanje s popolnoma antisimetričnim okusnim delom lah-
kih (u, d, s) kvarkov. Najlažje ga skonstruiramo tako, da vzamemo antisimetrično kombinacijo
($|ud\rangle - |du\rangle$) ter ji simetrično dodamo $|s\rangle$ na vse možne načine. Tako dobimo stanje

$$|\Lambda\rangle \sim \frac{1}{\sqrt{6}}(|uds\rangle - |dus\rangle + |usd\rangle - |dsu\rangle + |sud\rangle - |sdu\rangle). \quad (2.51)$$

Zaradi antisimetrije okusnega dela, pa mora ob (anti)simetriji celotne valovne funkcije takšno
stanje imeti neničelno tirno vrtilno količino ($l \neq 0$). Na koncu nam ostane še 16 stanj z mešano
simetrijo okusnega ter spinskega dela. Ker mora biti njun produkt (pri $l = 0$) simetričen, jih
najlažje skonstruiramo tako, da za izhodišče vzamemo vsoto produktov dovdelčnih valovnih
funkcij z dobro (anti)simetrijo, npr. ($f_A\chi_A + f_S\chi_S$), kjer sta $f_{(A)S}$ ter $\chi_{(A)S}$ (anti)simetrična

okusna ter spinska komponenta dvodelčne valovne funkcije. Takšnemu nastavku potem simetrično dodamo primerno enodelčno valovno funkcijo na vse močne načine. Tako dobimo na primer valovno funkcijo protona

$$\begin{aligned}
|p \uparrow\rangle &= Y_{00}\eta \frac{1}{\sqrt{18}} [|udu\rangle (2|\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle) \\
&\quad + |duu\rangle (2|\downarrow\uparrow\uparrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\uparrow\uparrow\downarrow\rangle) \\
&\quad + |uud\rangle (2|\uparrow\uparrow\downarrow\rangle - |\uparrow\downarrow\uparrow\rangle - |\downarrow\uparrow\uparrow\rangle)] \\
&= Y_{00}\eta \frac{1}{\sqrt{18}} [2|u \uparrow u \uparrow d \downarrow\rangle - |u \uparrow u \downarrow d \uparrow\rangle - |u \downarrow u \uparrow d \uparrow\rangle \\
&\quad + 2|d \downarrow u \uparrow u \uparrow\rangle - |d \uparrow u \downarrow u \uparrow\rangle - |d \uparrow u \uparrow u \downarrow\rangle \\
&\quad + 2|u \uparrow d \downarrow u \uparrow\rangle - |u \downarrow d \uparrow u \uparrow\rangle - |u \uparrow d \uparrow u \uparrow\rangle]. \tag{2.52}
\end{aligned}$$

Analogno valovno funkcijo nevtrona dobimo enostavno z zamenjavo $u \leftrightarrow d$ v gornjem izrazu.

Kot primer uporabe tako konstruiranih okusno-spinskih komponent valovnih funkcij hadronov si pogledjmo razmerje magnetnih dipolnih momentov protona in nevtrona. V nalogi 1.14 smo pokazali, da izmerjena magnetna momenta obeh nukleonov precej odstopata od napovedi za elementarne Diracove delce. Predpostavimo torej, da za kvarke velja

$$\hat{\mu}_i = g_s \frac{\hat{Q}_i \hat{S}_i}{2m_i}, \tag{2.53}$$

kjer je $g_s \simeq 2$ za kvarke s spinom $1/2$. Pri maksimalni projekciji spina ponovno nadomestimo $\hat{S}_i \rightarrow \hat{S}_i^3$. Predpostavimo, da k magnetnemu momentu obeh nukleonov primarno prispeva vsota takšnih magnetnih momentov vseh vezanih kvarkov oziroma

$$\mu_{p(n)} \propto \langle p(n) \uparrow | \sum_i \hat{\mu}_i | p(n) \uparrow \rangle. \tag{2.54}$$

Znak proporcionalnosti nas opozarja na to, da kvarki znotraj nukleonov še zdaleč niso prosti in zato relevantna energijska skala magnetnega momenta nukleona ne bo nujno podana z njihovimi masami m_i , ki nastopajo v enačbi (2.53). Iz zadrege nas reši dejstvo, da sta masi obeh lahkih kvarkov dejansko precej manjši od celotnih mas obeh nukleonov, h katerima torej prevladujoče prispeva vezavna energija močne interakcije (temu v prid govori tudi izredno majhna razlika v masah protona in nevtrona). Ker močne interakcije ne ločujejo med kvarkovskimi okusi lahko pričakujemo, da bo torej relevantna skala, ki bo določala celotni magnetni moment protona in nevtrona v obeh primerih skoraj enaka in se bo v njunem razmerju njena odvisnost v veliki meri pokrajšala, ostalo pa bo le

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} \simeq \frac{\langle n \uparrow | \sum_i \hat{Q}_i \hat{S}_i^3 | n \uparrow \rangle}{\langle p \uparrow | \sum_i \hat{Q}_i \hat{S}_i^3 | p \uparrow \rangle}. \tag{2.55}$$

V primeru protona dobimo

$$\langle p \uparrow | \sum_i \hat{Q}_i \hat{S}_i^3 | p \uparrow \rangle = \frac{e}{18} \left[4 \left(\frac{2}{3} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{1}{2} + \frac{-1}{3} \frac{-1}{2} \right) + \left(\frac{2}{3} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{-1}{2} + \frac{-1}{3} \frac{1}{2} \right) + \dots \right] = \frac{e}{2}. \tag{2.56}$$

V primeru nevtrona pa z zamenjavo $u \leftrightarrow d$

$$\langle n \uparrow | \sum_i \hat{Q}_i \hat{S}_i^3 | n \uparrow \rangle = \frac{e}{18} \left[4 \left(\frac{-1}{3} \frac{1}{2} + \frac{-1}{3} \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \frac{-1}{2} \right) + \left(\frac{-1}{3} \frac{1}{2} + \frac{-1}{3} \frac{-1}{2} + \frac{2}{3} \frac{1}{2} \right) + \dots \right] = -\frac{e}{3}, \tag{2.57}$$

od koder sledi napoved $\mu_n/\mu_p \simeq -2/3$, kar je izredno blizu eksperimentalni vrednosti $(\mu_n/\mu_p)_{\text{exp}} \simeq -0.685$.

2.7 Relativistično sipanje

Podobno kot v obravnavi nerelativističnega sipanja si oglejmo najprej osnove perturbacijske teorije in vzporedimo relevantne količine s koncepti, ki so nam znani že iz nerelativistične obravnave. Kot prvo si pogledjmo stanje relativističnega ravnega vala z dobro definirano gibalno količino. V nerelativistični mehaniki je takšno stanje rešitev Schrödingerjeve enačbe z lastnim valovnim vektorjem $|\mathbf{p}\rangle = \psi = \sqrt{n}e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}-iEt}$, kjer je n število delcev, ki ga takšno stanje predstavlja. V relativistični mehaniki so relevantna lastna stanja Klein-Gordonove enačbe $|p\rangle = \sqrt{2En}e^{-ip\cdot x}$, kjer smo zapisali skalarni produkt četvercev krajše kot $p^\mu x_\mu \equiv p \cdot x$. Nenavadno izbiro normalizacije stanj utemeljita relativistični definiciji toka in gostote delcev. Oglejmo si najprej tok delcev, ki je v nerelativistični mehaniki definiran kot $\mathbf{j} = -i(\psi^*\nabla\psi - \psi\nabla\psi^*)/2m = n\mathbf{p}/m$. Takšna normalizacija (na enoto mase) za relativistično kinematiko ni primerna. Namesto nje, se je uveljavila definicija $\mathbf{j} = 2n\mathbf{p}$, ki torej pojasni izbiro normalizacije stanj ravnih valov $|p\rangle$. V skladu z njo se tudi definicija gostote delcev iz nerelativistične $\rho = |\psi|^2 = n$ spremeni v $\rho = 2nE$, tako da se četverec toka zapiše kot $j^\mu = (\rho, \mathbf{j}) = 2p^\mu n$.

Naslednje si pogledjmo razvoj začetnega (dvodelčnega) stanja z dobro definiranimi gibalnimi količinami $|p_{APB}\rangle_{\text{in}}$ ob času $T \rightarrow -\infty$ v neko (sipano) končno stanje $|p_1, \dots\rangle_{\text{out}}$, ob času $T \rightarrow \infty$ pod vplivom interakcijskega Hamiltoniana $\mathcal{H}^{\text{int}}(\mathbf{x})$ v prvem redu perturbacije ter definirajmo relativistično sipalno matriko kot posplošitev enačbe (1.109)

$$\begin{aligned} T_{f\neq i} &= {}_{\text{out}}\langle p_1, \dots | p_{APB}\rangle_{\text{in}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-T}^T dt \int d^3\mathbf{x} \langle p_1, \dots | -i\mathcal{H}^{\text{int}}(\mathbf{x}) | p_{APB}\rangle \\ &= -(2\pi)^4 \delta^{(4)} [p_A + p_B - (p_1 + \dots)] i\mathcal{M}(p_{APB} \rightarrow p_1, \dots), \end{aligned} \quad (2.58)$$

kjer smo v drugi vrstici uvedli *sipalno amplitudo* \mathcal{M} iz katere smo eksplicitno izpostavili delta funkcijo, ki nam zagotavlja ohranitev energije in gibalne količine v sipanju.

Dejansko želimo obravnavati razvoj (sipanje) valovnih paketov $|\phi\rangle$ z normalizacijo $\langle\phi|\phi\rangle = 1$, zato jih lahko razvijemo po ravnih valovih $|p\rangle$ kot

$$|\phi\rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \phi(\mathbf{k}) \frac{1}{\sqrt{2E_{\mathbf{k}}}} |k\rangle, \quad (2.59)$$

kjer je $\phi(k)$ valovna funkcija valovnega paketa (v k prostoru), $E_{\mathbf{k}}$ pa energija, ki pripada stanju z gibalno količino \mathbf{k} ($E_{\mathbf{k}} = \sqrt{m^2 + |\mathbf{k}|^2}$). Verjetnost za prehod med začetnimi in končnimi stanji valovnih paketov znotraj majhnega izseka faznega prostora končnih stanj je potem

$$d\mathcal{P}(A, B \rightarrow 1, \dots) = \left(\prod_f \frac{d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_f} \right) |{}_{\text{out}}\langle p_1 \dots | \phi_A \phi_B \rangle_{\text{in}}|^2. \quad (2.60)$$

Da dobimo diferencialni sipalni presek, moramo \mathcal{P} poprečiti še po številu sipanih delcev znotraj začetnih valovnih paketov A in B . Predstavljajmo si torej sipanje valovnih paketov A in B s prečnima presekom S_A ter S_B , ki potujeta v smeri z z relativno hitrostjo $|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| = |v_A^z - v_B^z|$. Zaradi morebitnega neničelnega vpadnega parametra $\mathbf{b} \perp \mathbf{z}$, dejansko v sipanju prispevajo le delci A in B znotraj prečnega preseka $S = S_A \cap S_B$. Začetno stanje lahko torej zapišemo tudi kot

$$|\phi_A \phi_B\rangle_{\text{in}} = \int \frac{d^3\mathbf{p}_A}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3\mathbf{p}_B}{(2\pi)^3} \frac{\phi_A(p_A)\phi_B(p_B)e^{i\mathbf{b}\cdot(\mathbf{p}_A - \mathbf{p}_B)}}{\sqrt{(2E_A)(2E_B)}} |p_{APB}\rangle_{\text{in}}, \quad (2.61)$$

kjer smo posebej izpostavili fazni zamik med stanjema A in B , kot posledico neničelnega vpadnega parametra. Sedaj lahko definiramo relativistični diferencialni sipalni presek kot verjetnost

prehoda, povprečeno po prečnem preseku S , oziroma

$$d\sigma(A, B \rightarrow 1, \dots) = \int d^2\mathbf{b} d\mathcal{P}(A, B \rightarrow 1, \dots). \quad (2.62)$$

Izvrednotenje gornjega izraza v splošnem zahteva izračun 14 dimenzionalnega integrala (2 krat $d^3\mathbf{p}_A$ ter $d^3\mathbf{p}_B$ ter enkrat $d^2\mathbf{b}$). Na srečo nam integral po vpadnem parametru pridela le dvo-dimenzionalno delta funkcijo, ki skupaj z eno izmed $\delta^{(4)}[p_A + p_B - (p_A + \dots)]$ znotraj $|T_{fi}|^2$ po nekoliko daljšem računu [7] zreducira celotno integracijo na

$$d\sigma = d\rho_f \int \frac{d^3\mathbf{p}_A}{(2\pi)^3} |\phi_A(p_A)|^2 \int \frac{d^3\mathbf{p}_B}{(2\pi)^3} |\phi_B(p_B)|^2 \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_A 2E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} (2\pi)^4 \delta^{(4)}[p_A + p_B - (p_A + \dots)], \quad (2.63)$$

kjer smo diferencial faznega prostora končnih stanj (posplošitev gostote stanj iz neralativističnega Fermijevega zlatega pravila) bolj kompaktno zapisali kot $d\rho_f = \Pi_f d^3\mathbf{p}_f / [(2\pi)^3 2E_f]$. V realističnih situacijah je zrnatost detektorjev prevelika, da bi razločila končno razsežnost valovnih paketov A in B v prostoru gibalnih količin. Zato lahko $\phi_{A,B}(p_{A,B})$ aproksimiramo z delta funkcijama, pa dobimo končni rezultat

$$d\sigma = d\rho_f \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_A 2E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|} (2\pi)^4 \delta^{(4)}[p_A + p_B - (p_A + \dots)], \quad (2.64)$$

kjer nam sedaj imenovalc ulomka $2E_A 2E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$ predstavlja relativistično analogijo vpadnega toka sipanih delcev iz enačbe (1.112).

2.8 Sipalni presek in Lorentzove transformacije

Oglejmo si, kako se različni gradniki, ki tvorijo izraz za relativistični sipalni presek transformirajo pod Lorentzovimi transformacijami. Sipalna amplituda je po konstrukciji Lorentzovo invariantna količina. Nasprotno pa se moramo za dokaz tega na primeru diferenciala faznega prostora končnih stanj ($d\rho_f$) malce potruditi. V ta namen si pogledjmo Lorentzovo transformacijo v obliki 'boosta' v smeri x . Pod njo se bosta netrivialno transformirali le x -ta komponenta (diferenciala) gibalne količine (dp_x) ter energija (E). Tako da nas v celotnem diferencialu $d\rho_f$ zanima le transformacija ulomka dp_x/E . Izrazimo torej dp_x in E s količinami v novem sistemu $(d)p'_x$ ter $(d)E'$

$$\begin{aligned} dp_x &= \gamma(dp'_x + \beta dE'), \\ E &= \gamma(E' + \beta p'_x). \end{aligned} \quad (2.65)$$

Sedaj za njuno razmerje velja

$$\frac{dp_x}{E} = \frac{\gamma(dp'_x + \beta dE')}{\gamma(E' + \beta p'_x)} = \frac{dp'_x}{E'} \frac{1 + \beta(dE'/dp'_x)}{1 + \beta(p'_x/E')}, \quad (2.66)$$

kjer smo ob zadnjem enačaju upoštevali, da je diferencial energije ($E = \sqrt{m^2 + |\mathbf{p}|^2}$): $dE/dp_x = p_x/E$.

Nazadnje si oglejmo še imenovalc $2E_A 2E_B |\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B|$. Z uporabo enakosti $\mathbf{v} = \mathbf{p}/E$, ga lahko prepišemo kot $4|\mathbf{p}_A E_B - \mathbf{p}_B E_A|$. Ker začetni gibalni količini kažeta izključno v smeri z , lahko ta izraz drugače zapišemo tudi kot $|p_A^0 p_B^z - p_B^0 p_A^z| = |\epsilon_{xy\mu\nu} p_A^\mu p_B^\nu|$, kar je invariantno le na 'booste' v smeri z – ima natanko transformacijske lastnosti (inverzne) ploščine v xy -ravnini, tako kot bi po definiciji sipalnega preseka tudi pričakovali.

2.9 Sipanje brezspinskih delcev preko EM interakcije

Oglejmo si relativistično $2 \rightarrow 2$ sipanje delcev brez spina (npr. kaonov in pionov) preko elektromagnetne interakcije. Kot primer vzemimo elastično sipanje negativno nabitega piona in kaona ($\pi^-(p_A)K^-(p_B) \rightarrow \pi^-(p_C)K^-(p_D)$). Naše izhodišče bo prehodna matrika med začetnim in končnim stanjem, kot jo izračunamo v prvem netrivialnem redu EM perturbacije v približku, ko pion in kaon obravnavamo kot točkasta (psevdo)skalarna delca z nabojem $Q(\pi^-, K^-) = -e$. V tem primeru relevanten interakcijski Hamiltonian prispeva k prehodni matriki preko izmenjave enega samega fotona in lahko zapišemo

$$T_{fi} = \int d^4x j_\mu^{\text{em}}(\pi^-) \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} j_\nu^{\text{em}}(K^-). \quad (2.67)$$

kjer $j_\mu^{\text{em}}(\pi^-) = Q(\pi^-)(p_A + p_C)_\mu e^{-i(p_A - p_C) \cdot x}$ in $j_\mu^{\text{em}}(K^-) = Q(K^-)(p_B + p_D)_\mu e^{-i(p_B - p_D) \cdot x}$ predstavljata relativistični EM tok piona in kaona ter velja $q^2 = (p_A - p_C)^2 = (p_B - p_D)^2$. Integracija po prostoru nam da ravno delta funkcijo ohranitve četverca celotne gibalne količine pa dobimo

$$T_{fi} = -i(2\pi^4)\delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \frac{e^2(p_A + p_C) \cdot (p_B + p_D)}{q^2}, \quad (2.68)$$

kjer nam ulomek v gornji enačbi predstavlja sipalno amplitudo \mathcal{M} . Znotraj nje nastopajo produkti četvercev gibalnih količin (v splošnem jih je šest: $p_A \cdot p_B$, $p_A \cdot p_C$, $p_A \cdot p_D$, $p_B \cdot p_C$, $p_B \cdot p_D$ in $p_C \cdot p_D$). Zaradi ohranitve celotne gibalne količine, sta le dva izmed teh produktov tudi linearno neodvisna. Zato je v obravnavi sipanja $2 \rightarrow 2$ sipalno amplitudo smiselno zapisati v manifestno Lorentzovo invariantnem zapisu s pomočjo treh t.i. *Mandelstamovih spremenljivk*

$$s \equiv (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2, \quad t \equiv (p_A - p_C)^2 = (p_B - p_D)^2, \quad u \equiv (p_A - p_D)^2 = (p_B - p_C)^2, \quad (2.69)$$

za katere je enostavno pokazati enakost

$$s + t + u = p_A^2 + p_B^2 + p_C^2 + p_D^2 = \sum_i m_i^2, \quad (2.70)$$

kjer teče vsota po vseh štirih masah delcev v začetnem in končnem stanju. Opis z Mandelstamovimi spremenljivkami je torej še posebej pripraven v ultrarelativistični limiti $m_i^2 \ll s$, ko lahko mase sipanih delcev v primerjavi z energijo sipanja zanemarimo. S pomočjo Mandelstamovih spremenljivk se v tej limit sipalna amplituda, ki opisuje sipanje $\pi^- K^- \rightarrow \pi^- K^-$ zelo kompaktno zapiše kot

$$\mathcal{M}(\pi^-(p_A)K^-(p_B) \rightarrow \pi^-(p_C)K^-(p_D)) = e^2 \frac{s - u}{t}. \quad (2.71)$$

2.10 Antidelci in križanje

V prejšnjem primeru smo obravnavali sipanje negativno nabitih pionov in kaonov. π^- z gibalno količino $p_\mu = (E, \mathbf{p})$ ima EM naboj in tok $Q(\pi^-) = -e$ ter $j_\mu^{\text{EM}}(\pi^-) = 2(-e)p_\mu$. To lahko primerjamo s π^+ , za katerega pri $p_\mu = (E, \mathbf{p})$ velja $Q(\pi^+) = +e$ ter $j_\mu^{\text{EM}}(\pi^+) = 2ep_\mu = 2(-e)(-p_\mu)$. Opazimo torej, da lahko EM tok antidelcev opišemo s pomočjo toka delcev, katerih četverec gibalne količine spremeni predznak. Ker se s takšno zamenjavo začetno stanje $|p\rangle$ hkrati spremeni v končno stanje $\langle p|$, pomeni da v danem procesu delec v začetnem stanju z gibalno količino p lahko zamenjamo z antidelcem v končnem stanju z gibalno količino $-p$ in

obratno. Takšnemu postopku zamenjave pravimo tudi *križanje*. Kot primer si oglejmo elastično EM sipanje $\pi^+ K^- \rightarrow \pi^+ K^-$. Sibalno amplitudo dobimo kar iz že znanega izraza za sipanje $\pi^- K^- \rightarrow \pi^- K^-$ z zamenjavo $p_A \rightarrow -p_C$ ter $p_C \rightarrow -p_A$, oziroma

$$\mathcal{M}(\pi^+(p_A)K^-(p_B) \rightarrow \pi^+(p_C)K^-(p_D)) = \frac{e^2(-p_A - p_C) \cdot (p_B + p_D)}{q^2} = e^2 \frac{u - s}{t}. \quad (2.72)$$

Ker je sibalni presek odvisen od kvadrata absolutne vrednosti sibalne amplitude, sta torej sibalna preseka za sipanje $\pi^- K^- \rightarrow \pi^- K^-$ ter $\pi^+ K^- \rightarrow \pi^+ K^-$ enaka.

2.11 Elastično EM sipanje $\pi^- \pi^-$ ter $\pi^- \pi^+$

Oglejmo si nekoliko težji primer elastičnega EM sipanja $\pi^-(p_A)\pi^-(p_B) \rightarrow \pi^-(p_C)\pi^-(p_D)$. Zaradi neločljivosti delcev v začetnem in končnem stanju mora biti amplituda simetrična na zamenjavo $p_A \leftrightarrow p_B$ ter $p_C \leftrightarrow p_D$. Dejansko v izračunu prehodne matrike T_{fi} dobimo dva prispevka izmenjave fotona, kar nam da simetrizirano sibalno amplitudo

$$\mathcal{M}(\pi^-(p_A)\pi^-(p_B) \rightarrow \pi^-(p_C)\pi^-(p_D)) = \frac{e^2(p_A + p_C) \cdot (p_B + p_D)}{(p_A - p_C)^2} + \frac{e^2(p_A + p_D) \cdot (p_B + p_C)}{(p_A - p_D)^2}. \quad (2.73)$$

Poskusimo opisati kotno odvisnost sibalnega preseka v takšnem sipanju. V ta namen se preselimo v težiščni sistem v katerem lahko gibalne količine v ultrarelativistični limiti napišemo kot

$$p_A^\mu = (p, \mathbf{p}_i), \quad p_B^\mu = (p, -\mathbf{p}_i), \quad p_C^\mu = (p, \mathbf{p}_f), \quad p_D^\mu = (p, -\mathbf{p}_f), \quad (2.74)$$

kjer je $p = |\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$. Če torej definiramo še kot θ kot projekcijo med vektorjema začetne in končne gibalne količine v tem sistemu $\cos \theta = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f / p^2$ lahko že izrazimo kotno odvisnost sibalne amplitude kot

$$\mathcal{M} = e^2 \left[\frac{3 + \cos \theta}{\cos \theta - 1} - \frac{3 - \cos \theta}{1 + \cos \theta} \right] = -2e^2 \frac{3 + \cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta}, \quad (2.75)$$

oziroma diferencialnega sibalnega preseka

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\pi^- \pi^-} \propto \left[\frac{3 + \cos^2 \theta}{1 - \cos^2 \theta} \right]^2. \quad (2.76)$$

Na koncu si oglejmo še sipanje elastično EM $\pi^+ \pi^-$. Njegovo sibalno amplitudo dobimo s pomočjo križanja ($p_A \rightarrow -p_C$, $p_C \rightarrow -p_A$) in sicer nam to da

$$\mathcal{M}(\pi^-(p_A)\pi^+(p_B) \rightarrow \pi^-(p_C)\pi^+(p_D)) = \frac{e^2(-p_A - p_C) \cdot (p_B + p_D)}{(-p_A + p_C)^2} + \frac{e^2(-p_C + p_D) \cdot (p_B - p_A)}{(-p_C - p_D)^2}, \quad (2.77)$$

v težiščnem sistemu pa je sibalni presek posledično proporcionalen

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\pi^+ \pi^-} \propto \left[\frac{3 + \cos^2 \theta}{1 - \cos \theta} \right]^2. \quad (2.78)$$

2.12 Ohranitev vrtilne količine za Diracove delce

Hamiltonov operator, iz katerega izhaja Diracova enačba je

$$H = \boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m, \quad (2.79)$$

kjer je $\boldsymbol{\alpha} = \gamma_0 \boldsymbol{\gamma}$, $\beta = \gamma_0$, $\gamma_{0,1,2,3}$ pa so Diracove γ matrike, ki tvorijo antikomutacijsko algebro $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$. Zanima nas ohranitev tirne vrtilne količine $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, kjer sta \mathbf{r} in \mathbf{p} krajevna koordinata ter gibalna količina delca, pod vplivom gornjega Hamiltoniana. Za to si pogledjmo komutator $[H, \mathbf{L}]$. Osredotočimo se na eno komponento vrtilne količine, npr. L_1

$$[H, L_1] = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m, x_2 p_3 - x_3 p_2] = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, x_2 p_3 - x_3 p_2] - [\beta m, x_2 p_3 - x_3 p_2]. \quad (2.80)$$

Oba komutatorja na desni strani obravnavamo ločeno. Prvi komutator izvednotimo kot

$$\begin{aligned} [\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3, x_2 p_3 - x_3 p_2] &= 0 + \alpha_2 [p_2, x_2 p_3] - \alpha_3 [p_3, x_3 p_2] \\ &= 0 + \alpha_2 [p_2, x_2] p_3 - \alpha_3 [p_3, x_3] p_2 \\ &= i(p_2 \alpha_3 - p_3 \alpha_2) = i(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\alpha})_1, \end{aligned} \quad (2.81)$$

kjer smo uporabili komutacijske relacije $[p_i, x_j] = -i\delta_{ij}$. Na enak način izvednotimo tudi drug komutator $[\beta m, x_2 p_3 - x_3 p_2] = 0$, pa dobimo končni rezultat

$$[H, \mathbf{L}] = i(\mathbf{p} \times \boldsymbol{\alpha}). \quad (2.82)$$

Očitno torej tak Hamiltonian ne ohranja tirne vrtilne količine. Rešitev iz zagate nam ponudi spin, ki ga nosijo Diracovi delci. Pogledjmo si torej še komutator

$$[H, \mathbf{S}], \quad \mathbf{S} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Spet se osredotočimo na posamično komponento spina, npr. S_1

$$[H, S_1] = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p} + \beta m, S_1] = [\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{p}, S_1] + [\beta m, S_1]. \quad (2.84)$$

Ponovno oba komutatorja na desni izvednotimo ločeno. Za prvega dobimo

$$\mathbf{p} \cdot [\boldsymbol{\alpha}, S_1] = \mathbf{p} \begin{pmatrix} 0 & [\boldsymbol{\sigma}, \sigma_1] \\ [\boldsymbol{\sigma}, \sigma_1] & 0 \end{pmatrix} = -2ip_2 \begin{pmatrix} 0 & \sigma_3 \\ \sigma_3 & 0 \end{pmatrix} + 2ip_3 \begin{pmatrix} 0 & \sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix} = 2i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p})_1, \quad (2.85)$$

kjer smo uporabili komutacijske relacije σ matrik $[\sigma_i, \sigma_j] = 2i\epsilon_{ijk}\sigma_k$. Podobno izvednotimo tudi drugi komutator, oziroma $[\beta, S_1] = 0$, pa dobimo končni rezultat

$$[H, \mathbf{S}] = 2i(\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{p}). \quad (2.86)$$

Ugotovimo, da H ohranja celotno vrtilno količino, ki je vsota tirne vrtilne količine in spina $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}/2$, in torej $[H, \mathbf{J}] = 0$.

2.13 Diracovi spinorji in sučnost

Poglejmo si lastnosti rešitev proste Diracove enačbe $(i\gamma_\mu\partial^\mu - m)\psi = 0$. Poznamo dva razreda rešitev: interpretiramo jih kot delce $\psi = u^{(s)} \exp(-ipx)$ ter antidelce $\psi = v^{(s)} \exp(ipx)$. Diracovi spinorji (u, v) zadoščajo enačbam $(\gamma_\mu p^\mu - m)u^{(s)} = 0$ ter $(\gamma_\mu p^\mu + m)v^{(s)} = 0$. Pripravno je definirati še $\bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0 = \bar{u}^{(s)} \exp(ipx), \bar{v}^{(s)} \exp(-ipx)$, kjer sedaj velja $\bar{u}^{(s)}(\gamma_\mu p^\mu - m) = 0$ ter $\bar{v}^{(s)}(\gamma_\mu p^\mu + m) = 0$. Delčne ter antidelčne spinorje izpišemo še eksplisitno

$$u^{(s)} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad v^{(s)} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \chi^{(-s)} \\ \chi^{(-s)} \end{pmatrix}, \quad (2.87)$$

kjer je izbrana normalizacija konsistentna z relativistično izbiro za skalarne delce v sekciji (2.7), $\chi^{(1)} = (1, 0)^T$, $\chi^{(-1)} = (0, 1)^T$. Za spinorje veljata tudi naslednji dve kompletnostni relaciji pri seštevanju po spinih

$$\sum_s u^{(s)} \bar{u}^{(s)} = \gamma_\mu p^\mu + m, \quad \sum_s v^{(s)} \bar{v}^{(s)} = \gamma_\mu p^\mu - m. \quad (2.88)$$

Definirajmo sedaj operator sučnosti $\kappa = \mathbf{S} \cdot \mathbf{p}/2|\mathbf{p}|$, ki je pravzaprav projekcija spina na smer gibalne količine. Poskusimo dokazati, da tak operator komutira s Hamiltonianom za proste Diracove delce in da torej sučnost predstavlja ohranjeno količino. Če to velja, morajo biti rešitve Hamiltoniana tudi lastna stanja operatorja κ ; veljati mora npr. $\kappa u^{(s)} = \lambda^{(s)} u^{(s)}$, kjer sta $\lambda^{(s)}$ pripadajoči lastni vrednosti. Za dokaz, se torej postavimo v sistem, kjer gibalna količina \mathbf{p} kaže v smeri z , $\mathbf{p} = (0, 0, p)$. Potem se operator sučnosti zapiše kar kot $\kappa = S_3/2$. Delujmo z njim na $u^{(\pm 1)}$, pa dobimo

$$\kappa u^{(\pm 1)} = \sqrt{2E} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \chi^{(\pm 1)} \\ \frac{\sigma_3 p}{E+m} \chi^{(\pm 1)} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_3 \chi^{(\pm 1)} \\ \frac{\sigma_3 p}{E+m} \sigma_3 \chi^{(\pm 1)} \end{pmatrix} = \pm \frac{1}{2} u^{(\pm 1)}. \quad (2.89)$$

Dejansko so rešitve proste Diracove enačbe lastna stanja operatorja sučnosti. Iz gornjega dokaza je enostavno uvideti tudi, da se sučnost ohranja tudi pri zamenjavi delcev z anti-delci. Takšna operacija namreč zamenja predznak gibalne količine ter spina, njuno projekcijo pa pusti nespremenjeno. To nam bo v veliko pomoč pri izračunih sipanja polariziranih Diracovih fermionov s pomočjo križanja.

2.14 Gordonova dekompozicija EM toka za Diracove delce

Elektromagnetni tok za Diracove delce ima obliko $\bar{\psi}_f \gamma_\mu \psi_i = \bar{u}_f \gamma_\mu u_i \exp[i(p_f - p_i) \cdot x]$, kjer smo za enačajem uporabili rešitve proste Diracove enačbe. Za obravnavo nizko-energijske nerelativistične limite je bolj pripravna tako imenovan Gordonova dekompozicija takšnega EM toka, ki ima obliko

$$\bar{u}_f \gamma_\mu u_i = \frac{1}{2m} \bar{u}_f [(p_f + p_i)_\mu + i\sigma_{\mu\nu}(p_f - p_i)^\nu] u_i, \quad (2.90)$$

kjer je $\sigma_{\mu\nu} = i[\gamma_\mu, \gamma_\nu]/2$. Poskusimo jo dokazati. Za to si podrobneje oglejmo drug člen v oglatem oklepaju gornjega izraza

$$\bar{u}_f \sigma_{\mu\nu} (p_f - p_i)^\nu u_i = \frac{i}{2} \bar{u}_f \gamma_\mu \gamma_\nu (p_f - p_i)^\nu u_i - \frac{i}{2} \bar{u}_f \gamma_\nu \gamma_\mu (p_f - p_i)^\nu u_i. \quad (2.91)$$

Razpišimo prvi člen na desni kot

$$\begin{aligned} \frac{i}{2} \bar{u}_f \gamma_\mu \gamma_\nu p_f^\nu u_i - \frac{i}{2} \bar{u}_f \gamma_\mu \gamma_\nu p_i^\nu u_i &= \frac{i}{2} \bar{u}_f (2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu) p_f^\nu u_i - \frac{i}{2} \bar{u}_f \gamma_\mu m u_i \\ &= i \bar{u}_f p_{f\mu} u_i - \frac{i}{2} \bar{u}_f \gamma_\mu m u_i - \frac{i}{2} \bar{u}_f \gamma_\mu m u_i \\ &= i \bar{u}_f (p_{f\mu} - m \gamma_\mu) u_i, \end{aligned} \quad (2.92)$$

kjer smo v prvi vrstici uporabili antikomutacijske lastnosti γ matrik ter enačbo gibanja za u_i , v drugi vrstici pa še enačbo gibanja za \bar{u}_f . Na enak način lahko iz vrednotimo tudi drugi člen v (2.91) kot

$$\frac{i}{2} \bar{u}_f \gamma_\nu \gamma_\mu p_f^\nu u_i - \frac{i}{2} \bar{u}_f \gamma_\nu \gamma_\mu p_i^\nu u_i = i \bar{u}_f (p_{i\mu} - m \gamma_\mu) u_i. \quad (2.93)$$

Sedaj oba izraza vstavimo nazaj v (2.90) pa dobimo

$$\bar{u}_f \gamma_\mu u_i = \frac{1}{2m} \bar{u}_f [(p_f + p_i)_\mu - p_{f\mu} + m \gamma_\mu - p_{i\mu} + m \gamma_\mu] u_i = \bar{u}_f \gamma_\mu u_i. \quad (2.94)$$

2.15 Nerelativistična limita EM interakcij za Diracove delce

Matrični element za sipanje Diracovih delcev v EM polju v prvem redu perturbacije zapišemo kot

$$T_{fi} = -i \int d^4x j_{fi}^\mu A_\mu = ie \int d^4x \bar{u}_f \gamma^\mu u_i e^{i(p_f - p_i) \cdot x} A_\mu, \quad (2.95)$$

kjer je $j_{fi}^\mu = -e \bar{\psi}_f \gamma^\mu \psi_i$ EM tok Diracovih delcev z nabojem e , $A_\mu = (\phi, \mathbf{A})$ pa štirivektor EM polja. ϕ in \mathbf{A} sta skalarni in vektorski EM potencial s pomočjo katerih izrazimo gostoti električnega in magnetnega polja kot $\mathbf{E} = -\nabla\phi - \partial\mathbf{A}/\partial t$ ter $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$. Oglejmo si nizkoenergijsko limito tega matričnega elementa s pomočjo Gordonove dekompozicije EM toka. Osredotočimo se na prispevek drugega člena v oglatem oklepaju v (2.90), ki edino nosi informacijo o vplivu spinskih prostostnih stopenj Diracovih delcev na interakcijo

$$T_{fi} = \dots + \frac{-e}{2m} \int d^3\mathbf{x} dt \bar{u}_f \sigma^{\mu\nu} (p_f - p_i)_\nu u_i A_\mu e^{i(E_f - E_i)t} e^{-i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.96)$$

Če imamo opravka s statičnim magnetnim poljem, nobena od količin pod integralom razen eksponenta ni časovno odvisna in lahko integral po času že izvedemo

$$T_{fi} = \dots + \frac{-e}{2m} 2\pi\delta(E_i - E_f) \int d^3\mathbf{x} \bar{u}_f \sigma^{\mu\nu} (p_f - p_i)_\nu u_i A_\mu e^{-i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i) \cdot \mathbf{x}}. \quad (2.97)$$

Ohranitev energije, kot jo zapoveduje delta funkcija pred integralom, zagotavlja, da nobena izmed časovnih komponent $\sigma^{\mu 0}$ k matričnemu elementu ne bo prispevala. Oglejati si moramo torej le krajevne komponente, npr. σ^{23}

$$\sigma^{23} = \frac{i}{2}(\gamma^2\gamma^3 - \gamma^3\gamma^2) = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix}. \quad (2.98)$$

V nerelativistični limiti se tudi Diracovi spinorji precej poenostavijo

$$u^{(s)}|_{|p| \ll m} \simeq \sqrt{2m} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.99)$$

Prispevek σ^{23} k matričnemu elementu lahko torej iz vrednotimo kot

$$T_{fi} = \dots - \frac{e}{2m} 2\pi\delta(E_f - E_i) 2m \int d^3\mathbf{x} (\chi^T, 0) \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} (p_f - p_i)_3 \begin{pmatrix} \chi \\ 0 \end{pmatrix} A_2 e^{-i(\mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i)\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.100)$$

oziroma v splošnem ob upoštevanju ohranitve gibalne količine ter EM polja oblike ravnega vala $\mathbf{A} = \boldsymbol{\epsilon} \exp(-i\mathbf{q} \cdot \mathbf{x})$, z $\mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i$.

$$T_{fi} = \dots - \frac{e}{2m} 2\pi\delta(E_f - E_i) \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi}_f \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \times \mathbf{A} \psi_i = \dots - \frac{e}{2m} 2\pi\delta(E_f - E_i) \int d^3\mathbf{x} \bar{\psi}_f \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \psi_i. \quad (2.101)$$

Dobili smo torej izraz za prispevek dipolnega magnetnega momenta Diracovega delca k EM interakciji. Od tod lahko izluščimo vrednost spinskega giromagnetnega razmerja za Diracove delce v prvem redu EM perurbacije. Velja namreč $\boldsymbol{\mu} = -eg\mathbf{s}/2m$ ter $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma}/2$ od koder sledi $g = 2$.

2.16 Ultrarelativistična limita EM interakcij za Diracove delce

Oglejmo si še nasprotno limito, torej ko so gibalne količine delcev v EM sipanju mnogo večje od njihovih mas. Kot smo pokazali v poglavju 2.13 lahko poljuben Diracov spinor razpišemo kot linearno kombinacijo lastnih stanj sučnosti

$$\psi = a\psi^{(1)} + b\psi^{(-1)} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \frac{\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}}{E+m} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{pmatrix}. \quad (2.102)$$

V ultrarelativistični limiti se tak spinor še poenostavi v

$$\psi = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \chi^{(s)} \end{pmatrix}, \quad (2.103)$$

kjer je $\hat{\mathbf{p}} = \mathbf{p}/|\mathbf{p}|$. Definirajmo sedaj projekcijska operatorja ročnosti $(1 \pm \gamma_5)/2$ (matrika γ^5 je definirana preko $\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$), ki projicirata Diracove spinorje na desno- in levo-ročne kiralne spinorje

$$\psi_L \equiv \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi, \quad \psi_R \equiv \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi. \quad (2.104)$$

V ultrarelativistični limiti ter Diracovi bazi γ matrik, kjer je

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} 0 & 1_{2 \times 2} \\ 1_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.105)$$

se izraza za $\psi_{L,R}$ poenostavita, npr.

$$\psi_L = \sqrt{2E} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \chi^{(s)} \\ \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}} \chi^{(s)} \end{pmatrix} = \sqrt{2E} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \chi^{(s)} - \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}} \chi^{(s)} \\ -\chi^{(s)} + \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}} \chi^{(s)} \end{pmatrix}. \quad (2.106)$$

Delujmo sedaj na tak spinor z operatorjem sučnosti κ

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \mathbf{S} \cdot \hat{\mathbf{p}} \psi_L &= \sqrt{2E} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ -\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{2E} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ -\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \psi_L, \end{aligned} \quad (2.107)$$

kjer smo uporabili lastnost projekcijskega operatorja $(\boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}})^2 = 1$. Podobno identiteto lahko dokažemo za ψ_R , z drugim predznakom. Sledi torej, da v ultrarelativistični limiti sučnost ter ročnost sovpadata (ekvivalentno $\psi_L \simeq \psi^{(-)}$ ter $\psi_R \simeq \psi^{(+)}$).

Oglejmo si sedaj obliko elektromagnetnega toka Diracovih delcev, če uporabimo projekcijsko identiteto $\psi = \psi_L + \psi_R$ ter zapišimo

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = (\bar{\psi}_L + \bar{\psi}_R) \gamma^\mu (\psi_L + \psi_R) = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R + \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_L. \quad (2.108)$$

Oglejmo si podrobneje mešana člena, npr.

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_R &= \psi^\dagger \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \gamma_0 \gamma^\mu \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi \\ &= \bar{\psi} \frac{1}{2} (\gamma^\mu - \gamma^\mu \gamma_5) \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi \\ &= \bar{\psi} \frac{1}{4} \gamma^\mu (1 - \gamma_5^2) \psi = 0, \end{aligned} \quad (2.109)$$

kjer smo v prvi vrstici uporabili hermitskost γ_5 ($\gamma_5^\dagger = \gamma_5$) v drugi in tretji vrstici antikomutacijske lastnosti γ_5 ($\{\gamma_5, \gamma_\mu\} = 0$), v tretji pa normalizacijo $\gamma_5^2 = 1$. Enako odpade tudi drugi mešani člen in se torej EM tok razpiše izključno kot vsota desno- in levo-ročnih tokov

$$j^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \psi_L + \bar{\psi}_R \gamma^\mu \psi_R. \quad (2.110)$$

V ultrarelativistični limiti, ko ročnost in sučnost sovpadata, to pomeni, da EM tok ohranja sučnost sipanih delcev, saj bo npr. levosučno polariziran vpadni delec iz ultrarelativističnega EM sipanja izšel izključno levosučen.

2.17 Kotna porazdelitev v ultrarelativističnem EM sipanju Diracovih delcev

Oglejmo si anihilacijo elektrona in pozitrona v mion in anti-mion. Proces $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ v prevem redu perturbacije poteka preko izmenjave enega samega fotona in ga obravnavamo v ultrarelativistični limiti. Vmesno stanje fotona mora imeti celotno vrtilno količino ena, zato morata po ohranitvi celotne vrtilne količine tudi začetno in končno stanje imeti enako celotno vrtilno količino. Postavimo se v težiščni sistem, kjer vpadna delca letita vzdolž koordinate z , glede na katero definiramo tudi projekcije vrtilne količine. Izberimo si polarizaciji elektrona in pozitrona, tako da ima elektron, ki leti v smeri z sučnost $1/2$, pozitron, ki leti v smeri $-z$ pa sučnost $-1/2$. Takšno začetno stanje, ko sta spina vpadnih delcev poravnana zapišemo kot $|i\rangle = |1, 1\rangle$ (smer z). Končno stanje si oglejmo v zarotiranem sistemu, kjer mion leti v smeri z' s sučnostjo $-1/2$, anti-mion pa v smeri $-z'$ s sučnostjo $1/2$. Takšno končno stanje lahko zapišemo kot $|f\rangle = |1, -1\rangle$ (smer z'). Matrični element prehoda med začetnim in končnim stanjem v istem sistemu dobimo preko rotacije, npr. začetnega stanja iz sistema z v z' za medsebojni kot θ okoli pravokotne osi, npr. y ($\exp(-i\theta J_y)|j, m\rangle = \sum_{m'} d_{m,m'}^j |jm'\rangle$)

$${}_{z'}\langle f|i\rangle_z = \langle 1, -1| [d_{-1,1}^1|1, -1\rangle + d_{0,1}^1|1, 0\rangle + d_{1,1}^1|1, 1\rangle] = d_{-1,1}^1(\theta) \propto 1 - \cos\theta. \quad (2.111)$$

Na podoben način lahko iz vrednotimo tudi vse ostale možne kombinacije polarizacij/sučnosti

$$\begin{aligned} {}_{z'}\langle 1, 1|1, 1\rangle_z &\propto 1 + \cos\theta, \\ {}_{z'}\langle 1, -1|1, -1\rangle_z &\propto 1 + \cos\theta, \\ {}_{z'}\langle 1, 1|1, -1\rangle_z &\propto 1 - \cos\theta. \end{aligned} \quad (2.112)$$

Izraz za kotno porazdelitev sipalnega preseka za nepolarizirane curke delcev ter seštet čez vse polarizacije končnih stanj dobimo s vsoto kvadratov posameznih matričnih elementov, ki nastopajo v sipalnih amplitudah

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \propto \sum_{s,s'} |\mathcal{M}_{s,s'}|^2 \propto \sum_{s,s'} |{}_{z'}\langle 1, s'|1, s\rangle_z|^2 \propto 1 + \cos^2\theta. \quad (2.113)$$

Takšna kotna odvisnost se razlikuje od tiste, ki bi jo dobili v sipanju (anihilaciji) skalarnih delcev preko EM interakcije, npr. $\pi^+\pi^- \rightarrow K^+K^-$, ki znaša $d\sigma/d\Omega \propto \cos^2\theta$ in izhaja iz sipalne amplitude v težiščnem sistemu oblike $\mathcal{M} \propto (\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f) \propto \cos\theta$.

2.18 Sledi γ matrik

V izračunih sipanja nepolariziranih Diracovih delcev lahko povprečenje kvadratov sipalnih amplitud po njihovih spinih prevedemo na sledi produktov Diracovih γ matrik. Poglejmo si torej nekaj teoremov, ki nam omogočajo izračun sledi produktov γ matrik. Začnemo z definicijo γ matrik, po kateri so le-te brez-sledne oziroma $\text{Tr}[\gamma^\mu] = 0$. To lastnost pa bi lahko izpeljali tudi samo s pomočjo uporabe Diracove algebre ter γ^5 , namreč

$$\text{Tr}[\gamma_\mu] = \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_5 \gamma_\mu] = \text{Tr}[\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_5] = -\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_5] = -\text{Tr}[\gamma_\mu] = 0, \quad (2.114)$$

kjer smo v drugem koraku uporabili $(\gamma_5)^2 = 1$, v tretjem cikličnost sledi produkta matrik, v četrtem antikomutacijo γ_μ ter γ_5 ter v petem ponovno cikličnost sledi ter $(\gamma_5)^2 = 1$. Gornji identiteti je torej lahko zadoščeno le, če je sled identično enaka nič. Na podoben način se da pokazati, da je sled poljubnega lihega produkta γ matrik (kjer v produktu ne nastopa γ_5) enak nič. Podobno velja za sled same γ^5 ($\text{Tr}[\gamma^5] = 0$), kar dokažemo na enak način, z vstavljanjem $(\gamma_0)^2 = 1$ znotraj sledi. Sled produkta dveh γ matrik iz vrednotimo kot

$$\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = \text{Tr}[2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu] = 2g_{\mu\nu} \text{Tr}[1_{4 \times 4}] - \text{Tr}[\gamma_\nu \gamma_\mu] = 8g_{\mu\nu} - \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu], \quad (2.115)$$

kjer smo v prvem koraku uporabili antikomutacijske lastnosti, v zadnjem pa cikličnost sledi. Od tod že sledi

$$\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu] = 4g_{\mu\nu}. \quad (2.116)$$

Naslednja zanimiva sled je

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5] &= \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\alpha \gamma_5] = -\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_5 \gamma_\alpha] = -\text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_5] = \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_5] \\ &= -\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\alpha \gamma_5] = -\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_5] = 0, \end{aligned} \quad (2.117)$$

kjer smo izbrali γ_α tako, da velja $\alpha \neq \mu, \nu$ in torej matrika antikomutira z γ_μ, γ_ν , kar smo uporabili v tretjem, četrtem in petem koraku, nato pa spet cikličnost sledi. Seveda velja tudi $(\gamma_\alpha)^2 = 1$ ter v gornjem izrazu izjemoma ne seštevamo po ponovljenem indeksu α . Naslednje si oglejmo sled produkta štirih γ matrik

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta] &= \text{Tr}[(2g_{\mu\nu} - \gamma_\nu \gamma_\mu) \gamma_\alpha \gamma_\beta] = 2g_{\mu\nu} \text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\beta] - \text{Tr}[\gamma_\nu \gamma_\mu \gamma_\alpha \gamma_\beta] \\ &= 8g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - \text{Tr}[\gamma_\nu (2g_{\mu\alpha} - \gamma_\alpha \gamma_\mu) \gamma_\beta] = 8g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - 8g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + \text{Tr}[\gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta] \\ &= 8g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - 8g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + 8g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha} - \text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta], \end{aligned} \quad (2.118)$$

kjer smo izmenoma uporabili antikomutacijske lastnosti γ matrik ter znano sled produkta dveh γ matrik (2.116). Od tod sledi končni rezultat

$$\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta] = 4g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} - 4g_{\mu\alpha} g_{\nu\beta} + 4g_{\mu\beta} g_{\nu\alpha}. \quad (2.119)$$

Na podoben način lahko izračunamo tudi poljuben večji produkt sodega števila γ matrik. Na koncu brez dokaza napišimo še izraz za sled produkta štirih γ matrik ter γ_5

$$\text{Tr}[\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\alpha \gamma_\beta \gamma_5] = 4i \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}, \quad (2.120)$$

kjer je $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ popolnoma antisimetrični tenzor četrtega ranga z $\epsilon_{0123} = 1$ ter enako za vse sode permutacije indeksov.

2.19 Elastično EM sipanje $e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-$ ter anihilacija $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

Obravnavamo elastično EM sipanje $e^-(p_A)\mu^-(p_B) \rightarrow e^-(p_C)\mu^-(p_D)$. Matrični element prehoda v prvem redu perturbacije opisuje proces preko izmenjave posamičnega fotona in ima obliko

$$T_{fi} = -i \int d^4x j_e^\mu \frac{-g_{\mu\nu}}{q^2} j_\mu^\nu = -i [-e\bar{u}(p_C)\gamma_\mu u(p_A)] \frac{-1}{q^2} [-e\bar{u}(p_D)\gamma^\mu u(p_B)] (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D), \quad (2.121)$$

kjer je $q^2 = (p_A - p_C)^2$ kvadrat izmenjane gibalne količine preko virtualnega fotona. Pripadajoča sipalna amplituda ima tako obliko

$$\mathcal{M} = -e^2 [\bar{u}(p_C)\gamma_\mu u(p_A)] \frac{1}{q^2} [\bar{u}(p_D)\gamma^\mu u(p_B)]. \quad (2.122)$$

V gornjem izrazu vsak spinor u, \bar{u} še vedno predstavlja točno določeno polarizacijo (sučnosti s_A, s_B, s_C, s_D) delca, ki mu pripada, torej natančneje $u = u^{(s_i)}$, $\bar{u} = \bar{u}^{(s_j)}$. Torej tudi vsaki kombinaciji polarizacij v začetnem in končnem stanju pripada ločena sipalna amplituda ($\mathcal{M} = \mathcal{M}_{s_A, s_B, s_C, s_D}$). Za izračun nepolariziranega sipalnega preseka moramo poprečiti kvadrate sipalnih amplitud po vseh polarizacijah začetnih stanj ($e^-(p_A)$ ter $\mu^-(p_B)$) ter sešteti čez vse možne polarizacije delcev v končnem stanju. Število polarizacijskih (spinskih) stanj delca s celotnim spinom s je $2s + 1$ in lahko torej prispevek kvadratov sipalnih amplitud k nepolariziranemu sipalnemu preseku napišemo kot

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 \equiv \frac{1}{(2s_A + 1)(2s_B + 1)} \sum_{s_A, s_B, s_C, s_D} |\mathcal{M}_{s_A, s_B, s_C, s_D}|^2. \quad (2.123)$$

Oglejmo si najprej nerelativistično limito gornjega izraza. Za to izvrednotimo prispevek vsake kombinacije spinov posebej. Spomnimo se, da se v nerelativistični limiti spinorji poenostavijo v $u^{(s)} \rightarrow \sqrt{2m}(\chi^{(s)}, 0)^T$ ter $\bar{u}^{(s)} \rightarrow \sqrt{2m}(\chi^{(s)\dagger}, 0)$. Tako lahko s pomočjo definicij γ matrik, kjer je v Diracovi bazi bločno diagonalna le γ_0 takoj zapišemo EM tokove kot

$$\bar{u}^{(s)} \gamma_\mu u^{(s')} = 2m \delta_{s, s'} \delta_{\mu 0}. \quad (2.124)$$

Absolutna smer spina se torej v nerelativističnem sipanju ohranja. Vstavimo sedaj ta izraz v (2.122) za različne kombinacije orientacij spinov, glede na poljubno smer z pa dobimo

$$\begin{aligned} \mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow) &= \mathcal{M}(\downarrow\uparrow \rightarrow \downarrow\uparrow) = \mathcal{M}(\uparrow\downarrow \rightarrow \uparrow\downarrow) = \mathcal{M}(\downarrow\downarrow \rightarrow \downarrow\downarrow) = -\frac{e^2 4m_e m_\mu}{q^2}, \\ \mathcal{M}(\downarrow\uparrow \rightarrow \uparrow\downarrow) &= \mathcal{M}(\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\uparrow) = \mathcal{M}(\downarrow\downarrow \rightarrow \uparrow\uparrow) = \mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \downarrow\downarrow) = 0. \end{aligned} \quad (2.125)$$

Za poprečen kvadrat sipalnih amplitud tako dobimo

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4} (4m_e m_\mu e^2)^2 \frac{4}{t^2}, \quad (2.126)$$

kjer smo uvedli zapis z Mandelstamovo spremenljivko $t = (p_A - p_C)^2 = q^2$.

Oglejmo si še ultra-relativistično limito tega sipanja. V tem primeru je koristno, da povprečje kvadratov amplitud razpišemo kot produkt

$$\begin{aligned}
\overline{|\mathcal{M}|^2} &= \frac{e^4}{q^4} \frac{1}{2 \cdot 2} \sum_{s,s',s'',s'''} [\bar{u}(p_C)^{(s'')} \gamma_\mu u(p_A)^{(s)}] [\bar{u}(p_D)^{(s''')} \gamma^\mu u(p_B)^{(s')}] \\
&\quad \times [\bar{u}(p_D)^{(s''')} \gamma^\nu u(p_B)^{(s')}]^\dagger [\bar{u}(p_C)^{(s'')} \gamma_\nu u(p_A)^{(s)}]^\dagger \\
&= \frac{e^4}{q^4} L_{e,\mu\nu} L_{\text{muon}}^{\mu\nu}. \tag{2.127}
\end{aligned}$$

Oba leptonska tenzorja lahko sedaj evaluiramo ločeno, dobimo

$$\begin{aligned}
L_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{s,s''} [\bar{u}(p_C)^{(s'')} \gamma_\mu u(p_A)^{(s)}] [u(p_C)^{(s'')} \gamma^0 \gamma_\nu u(p_A)^{(s)}]^\dagger \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s,s''} [\bar{u}(p_C)^{(s'')} \gamma_\mu u(p_A)^{(s)}] [u(p_A)^{(s)} \gamma_\nu^\dagger \gamma^0 u(p_C)^{(s'')}] \\
&= \frac{1}{2} \sum_{s,s''} [\bar{u}(p_C)^{(s'')} \gamma_\mu u(p_A)^{(s)}] [\bar{u}(p_A)^{(s)} \gamma_\nu u(p_C)^{(s'')}] \\
&= \frac{1}{2} (p_C^\alpha \gamma_\alpha + m_e)_{da} (\gamma_\mu)_{ab} (p_A^\beta \gamma_\beta + m_e)_{bc} (\gamma_\nu)_{cd} \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr}[(p_C^\alpha \gamma_\alpha + m_e) \gamma_\mu (p_A^\beta \gamma_\beta + m_e) \gamma_\nu], \tag{2.128}
\end{aligned}$$

kjer smo v drugi vrstici izvedli kompleksno konjugacijo produkta γ matrik ter spinorjev, nato pa v naslednji vrstici uporabili identiteto $\gamma_\mu^\dagger = \gamma_0 \gamma_\mu \gamma_0$ ter $\gamma_0^2 = 1$. V četrti vrstici smo nato vsoto po spinih s in s'' nadomestili z identiteto (2.88) ter eksplicitno izpisali sumacijo po indeksih γ matrik, ki smo jo nato v zadnji vrstici zaradi ciklične ponovitve vseh indeksov lahko identificirali s sledjo. Analogno dobimo za $L_{\text{muon}}^{\mu\nu} = \text{Tr}[(p_D^\alpha \gamma_\alpha + m_\mu) \gamma_\mu (p_B^\beta \gamma_\beta + m_\mu) \gamma_\nu]/2$.

Obe sledi se poenostavita v ultrarelativistični limiti, ko lahko masi elektrona in miona zanemarimo. Takrat dobimo s pomočjo znane sledi produkta štirih γ matrik (2.119)

$$\begin{aligned}
L_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} p_C^\alpha p_A^\beta \text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma_\mu \gamma_\beta \gamma_\nu] = \frac{1}{2} p_C^\alpha p_A^\beta 4(g_{\alpha\mu} g_{\beta\nu} - g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + g_{\alpha\nu} g_{\beta\mu}) \\
&= 2(p_C^\mu p_A^\nu - p_A \cdot p_C g_{\mu\nu} + p_C^\nu p_A^\mu), \tag{2.129}
\end{aligned}$$

ter podobno za $L_{\text{muon}}^{\mu\nu}$ z zamenjavo $p_A \rightarrow p_B$ ter $p_C \rightarrow p_D$. Oba izraza lahko sedaj vstavimo nazaj v (2.127) pa dobimo

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}(e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) = \frac{8e^4}{q^4} [(p_A \cdot p_B)(p_C \cdot p_D) + (p_A \cdot p_D)(p_C \cdot p_B)] = 2e^4 \frac{s^2 + u^2}{t^2}, \tag{2.130}$$

kjer smo v drugem koraku uporabili še definicije Mandelstamovih spremenljivk v ultrarelativistični limiti $s = (p_A + p_B)^2 \simeq 2p_A \cdot p_B \simeq 2p_C \cdot p_D$, $t = q^2 = (p_A - p_C)^2 \simeq -2p_A \cdot p_C \simeq -2p_B \cdot p_D$ ter $u = (p_A - p_D)^2 \simeq -2p_A \cdot p_D \simeq -2p_B \cdot p_C$.

S pomočjo križanja sedaj enostavno dobimo tudi izraz za proces $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ iz poglavja 2.17. Naredimo namreč zamenjavo $\mathcal{M}[e^-(p_A) \mu^-(p_B) \rightarrow e^-(p_C) \mu^-(p_D)] = \mathcal{M}(e^-(p_A) e^+(-p_C) \rightarrow \mu^-(p_D) \mu^+(-p_B))$, oziroma $p_B \leftrightarrow -p_C$ in torej $s \leftrightarrow t$

$$\overline{|\mathcal{M}|^2}(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) = 2e^4 \frac{t^2 + u^2}{s^2}. \tag{2.131}$$

Oglejmo si sedaj ponovno kotno porazdelitev tega sipalnega preseka v težiščnem sistemu. Izraz (2.64) se tedaj poenostavi, saj velja $E_A = E_B \simeq p_i$, kjer je $p_i = |\mathbf{p}_A| = |\mathbf{p}_B|$ in torej $s \simeq 4p_i^2$, hkrati pa tudi $|\mathbf{v}_A - \mathbf{v}_B| \simeq 2$. Tudi fazni integral dvodelčnega končnega stanja se znatno poenostavi, saj dobimo

$$\int (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_A + p_B - p_C - p_D) \frac{d^3 \mathbf{p}_C}{(2\pi)^3 2E_C} \frac{d^3 \mathbf{p}_D}{(2\pi)^3 2E_D} \simeq \int \frac{p_f^2 dp_f d\Omega}{(2\pi)^3 4p_f^2} (2\pi) \delta(2p_i - 2p_f) = \int \frac{d\Omega}{32\pi^2}, \quad (2.132)$$

kjer smo v prvem koraku s pomočjo delta funkcije v težiščnem sistemu, oziroma $\mathbf{p}_C = -\mathbf{p}_D$ izvedli vse integracije po gibalni količini enega od delcev, npr. \mathbf{p}_C , nato vpeljali krogelne koordinate za integracijo po \mathbf{p}_D , s pomočjo $|\mathbf{p}_C| = |\mathbf{p}_D| = p_f$ ter $E_C = E_D \simeq p_f$ izvedli še integracijo po p_f , tako da nam preostane le integral po prostorskem kotu $d\Omega = d\phi d\cos\theta$. Ker sipalna matrika zavisi le od projekcije $(\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f)/p_i p_f = \cos\theta$ lahko izvedemo tudi integral po ϕ pa dobimo za diferencialni sipalni presek

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{128\pi p_i^2} = \frac{2e^4}{32\pi s} \frac{t^2 + u^2}{s^2} = \frac{\pi\alpha^2}{2s} (1 + \cos^2\theta), \quad (2.133)$$

kjer je $\alpha = e^2/4\pi$ in s čimer smo reproducirali rezultat (2.113), sedaj tudi s primerno normalizacijo. Če izvedemo še končno integracijo po $\cos\theta$ dobimo

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^- \mu^+) = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}. \quad (2.134)$$

Oglejmo si še polarizirano EM sipanje $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$ v ultrarelativistični limiti. Ker sučnost in ročnost v tej limiti sovpadata, lahko obravnavamo kar proces z dobro določenimi ročnostmi delcev, npr. $e_R^-(p_A) e_L^+(p_B) \rightarrow \mu_R^-(p_C) \mu_L^+(p_D)$. S pomočjo dekompozicije EM toka na njegove levo- in desnoročne komponente (2.110), lahko že zapišemo sipalno amplitudo za ta proces kot

$$\mathcal{M} = -\frac{e^2}{4} [\bar{v}(p_B) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) u(p_A)] \frac{1}{q^2} [\bar{u}(p_C) \gamma^\mu (1 + \gamma_5) v(p_D)], \quad (2.135)$$

kjer smo poleg dekompozicije EM toka na sipalni amplitudi (2.122) uporabili še križanje, in je $q^2 = (p_A + p_B)^2 = (p_C + p_D)^2$. Vsoti po spinih $e^+ e^-$ ter $\mu^+ \mu^-$ lahko sedaj kot prej izvedemo ločeno s pomočjo sledi matrik γ , npr. za $L_e^{\mu\nu}$ dobimo

$$\begin{aligned} L_e^{\mu\nu} &= \frac{1}{4} \sum_{s,s'} [\bar{v}(p_B)^{(s')} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) u(p_A)^{(s)}] [\bar{v}(p_B)^{(s')} \gamma^\nu (1 + \gamma_5) u(p_A)^{(s)}]^\dagger \\ &= \frac{1}{4} \sum_{s,s'} [\bar{v}(p_B)^{(s')} \gamma^\mu (1 + \gamma_5) u(p_A)^{(s)} \bar{u}(p_A)^{(s)} \gamma^\nu (1 + \gamma_5) v(p_B)^{(s')}] \\ &= \frac{1}{4} \text{Tr}[p_B^\alpha \gamma_\alpha \gamma^\mu (1 + \gamma_5) p_A^\beta \gamma_\beta \gamma^\nu (1 + \gamma_5)] \\ &= 2(p_B^\mu p_A^\nu + p_B^\nu p_A^\mu - g^{\mu\nu} p_A \cdot p_B - i\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} p_{B,\alpha} p_{A,\beta}), \end{aligned} \quad (2.136)$$

kjer smo izpostavili kvadrat predfaktorja (1/2) ki izhaja iz projekcijskega operatorja ročnosti. Pozor, tukaj ne poprečujemo po spinih začetnih delcev, saj obravnavamo polarizirano sipanje (vsi vpadni elektroni so desnoročni ter vsi pozitroni levoročni). Podobno za $L_\mu^{\mu\nu}$ dobimo

$$L_{\text{muon}}^{\mu\nu} = 2(p_C^\mu p_D^\nu + p_D^\nu p_C^\mu - g^{\mu\nu} p_C \cdot p_D - i\epsilon^{\rho\mu\sigma\nu} p_{C,\rho} p_{D,\sigma}). \quad (2.137)$$

Kvadrat amplitude pa se glasi

$$\begin{aligned}
|\mathcal{M}|^2 &= \frac{4e^4}{q^4} [2(p_A \cdot p_C)(p_B \cdot p_D) + 2(p_A \cdot p_D)(p_B \cdot p_C) - \epsilon^{\alpha\mu\beta\nu} \epsilon_{\rho\mu\sigma\nu} p_{B,\alpha} p_{A,\beta} p_C^\rho p_D^\sigma] \\
&= \frac{8e^4}{q^4} [(p_A \cdot p_C)(p_B \cdot p_D) + (p_A \cdot p_D)(p_B \cdot p_C) - (p_A \cdot p_C)(p_B \cdot p_D) + (p_A \cdot p_D)(p_B \cdot p_C)] \\
&= \frac{16e^4}{q^4} (p_A \cdot p_D)(p_B \cdot p_C), \tag{2.138}
\end{aligned}$$

kjer smo v drugi vrstici uporabili identiteto $\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -2(\delta_\rho^\alpha \delta_\sigma^\beta - \delta_\sigma^\alpha \delta_\rho^\beta)$. Od tod v težiščnem sistemu že dobimo pričakovano kotno odvisnost v prvi vrstici (2.112), oziroma

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+) = \frac{\pi\alpha^2}{2s} (1 + \cos\theta)^2. \tag{2.139}$$

Izračun procesa $e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+$ je podoben, v spinski vsoti znotraj $L_{\text{muon}}^{\mu\nu}$ moramo zamenjati predznak γ_5 ter posledično $\epsilon^{\rho\mu\sigma\nu}$ člena. To nas takoj privede do rezultata za kotno odvisnost sipalnega preseka

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e_R^- e_L^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+) = \frac{\pi\alpha^2}{2s} (1 - \cos\theta)^2. \tag{2.140}$$

Podobno dobimo izraza tudi za preostali neničelni kotni odvisnosti

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_L^- \mu_R^+) &= \frac{\pi\alpha^2}{2s} (1 + \cos\theta)^2, \\
\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e_L^- e_R^+ \rightarrow \mu_R^- \mu_L^+) &= \frac{\pi\alpha^2}{2s} (1 - \cos\theta)^2. \tag{2.141}
\end{aligned}$$

2.20 Møllerjevo sipanje $e^- e^-$ ter Bhabha sipanje $e^+ e^-$

Oglejmo si še elastično sipanje identičnih Diracovih delcev, kot je $e^-(p_A) e^-(p_B) \rightarrow e^-(p_C) e^-(p_D)$ preko EM interakcije v prvem redu perturbacije. V primerjavi z elastičnim sipanjem $e^- \mu^-$ mora biti v tem primeru sipalna amplituda antisimetrična na zamenjavo delcev v končnem stanju oziroma $p_C \leftrightarrow p_D$. To dosežemo z razliko obeh prispevkov k amplitudi

$$\mathcal{M} = -e^2 \left\{ [\bar{u}(p_C) \gamma_\mu u(p_A)] \frac{1}{(p_A - p_C)^2} [\bar{u}(p_D) \gamma^\mu u(p_B)] - [\bar{u}(p_D) \gamma_\mu u(p_A)] \frac{1}{(p_A - p_D)^2} [\bar{u}(p_C) \gamma^\mu u(p_B)] \right\}. \tag{2.142}$$

Povprečenje po spinih poteka kot prej. Ponovno si najprej pogledjmo nerelativistično limito, kjer sedaj velja

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\uparrow\uparrow \rightarrow \uparrow\uparrow) = \mathcal{M}(\downarrow\downarrow \rightarrow \downarrow\downarrow) &= -e^2 4m_e^2 \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right), \\
\mathcal{M}(\downarrow\uparrow \rightarrow \downarrow\uparrow) = \mathcal{M}(\uparrow\downarrow \rightarrow \uparrow\downarrow) &= -e^2 4m_e^2 \frac{1}{t}, \\
\mathcal{M}(\downarrow\uparrow \rightarrow \uparrow\downarrow) = \mathcal{M}(\uparrow\downarrow \rightarrow \downarrow\uparrow) &= e^2 4m_e^2 \frac{1}{u}, \tag{2.143}
\end{aligned}$$

in je torej celotna vsota po kvadratih polariziranih amplitud

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4} (4m_e^2 e^2)^2 \left[\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{u} \right)^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{1}{u^2} \right]. \tag{2.144}$$

Če vsoto kvadratov sipalnih amplitud po spinih izvedemo v ultrarelativistični limiti pa po nekoliko daljšem računu dobimo

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2(e^-e^- \rightarrow e^-e^-) = 2e^4 \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2s^2}{tu} + \frac{s^2 + t^2}{u^2} \right], \quad (2.145)$$

kjer je prvi člen enak kot pri elastičnem sipanju $e^-\mu^-$, zadnji člen izhaja iz kvadrata amplitud z zamenjavo $p_C \leftrightarrow p_D$ oziroma $t \leftrightarrow u$, vmesni pa iz dveh mešanih produktov. Eden je oblike

$$\begin{aligned} & -\frac{e^4}{tu} \frac{1}{2 \cdot 2} \sum_{\text{spins}} [\bar{u}(p_C)\gamma_\mu u(p_A)][\bar{u}(p_D)\gamma^\mu u(p_B)][\bar{u}(p_C)\gamma^\nu u(p_B)]^\dagger [\bar{u}(p_D)\gamma_\nu u(p_A)]^\dagger \\ &= -\frac{e^4}{tu} \frac{1}{2 \cdot 2} \text{Tr}[(p_C^\sigma \gamma_\sigma + m_e)\gamma_\mu(p_A^\alpha \gamma_\alpha + m_e)\gamma_\nu(p_D^\delta \gamma_\delta + m_e)\gamma^\mu(p_B^\beta \gamma_\beta + m_e)\gamma^\nu] \\ &= \frac{e^4}{4tu} 32(p_A \cdot p_B)(p_C \cdot p_D) = 2e^4 \frac{s^2}{tu}, \end{aligned} \quad (2.146)$$

kjer za prevedbo sledi v drugem koraku na znane izraze uporabimo antikomutacijske relacije γ matrik ter identiteto $\gamma_\mu \gamma^\mu = 4I_{4 \times 4}$, v zadnji vrstici pa smo zanemarili prispevke mase elektronov. Drugi mešani produkt je le kompleksno konjugirana verzija gornjega in torej njemu enak. Ponovno si oglejmo kotno porazdelitev sipalnega preseka tega procesa v težiščnem sistemu. Dobimo

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{4\pi\alpha^2}{s} \frac{(\cos^2\theta + 3)^2}{\sin^4\theta}, \quad (2.147)$$

takšno kotno porazdelitev imenujemo tudi Møllerjevo sipanje.

S pomočjo križanja sedaj enostavno dobimo tudi kvadrat sipalne amplitude za sipanje “Bhabha”: $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$ in sicer z zamenjavo $s \leftrightarrow u$ (ali ekvivalentno $s \leftrightarrow t$ zaradi anti-simetrije amplitude na zamenjavo $t \leftrightarrow u$), pa dobimo

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2(e^+e^- \rightarrow e^+e^-) = 2e^4 \left[\frac{s^2 + u^2}{t^2} + \frac{2u^2}{ts} + \frac{u^2 + t^2}{s^2} \right]. \quad (2.148)$$

Kotna porazdelitev takšnega sipanja v težiščnem sistemu je proporcionalna (2.147).

2.21 Sipanje $e^- \nu_\mu \rightarrow \nu_e \mu^-$ preko šibke interakcije

Sipanje $e^- \nu_\mu \rightarrow \nu_e \mu^-$ poteka preko t.i. nabitih šibkih tokov

$$J_{\text{weak}}^{e,\alpha} = \bar{\psi}_{\nu_e} \gamma^\alpha \psi_{e,L}, \quad J_{\text{weak}}^{\mu,\alpha} = \bar{\psi}_{\nu_\mu} \gamma^\alpha \psi_{\mu,L}, \quad (2.149)$$

ki pretvarjata med levoročnim elektronom/mionom in njunima (prev tako levoročnima) neutrinoma (ne pozabímo, $\psi_L \equiv P_L \psi = (1 - \gamma_5)\psi/2$). Izkáže, da sipalna amplituda, ki jo dobimo s skalarnim produktom tokov

$$\mathcal{M} = -i \frac{4G_F}{\sqrt{2}} J_{\text{weak}}^{e,\alpha} J_{\text{weak},\alpha}^{\mu,\dagger}, \quad (2.150)$$

kjer je $G_F = 1.166 \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$ *Fermijeva sklopitvena konstanta*, dobro opisuje sipanje $e^- \nu_\mu \rightarrow \nu_e \mu^-$ (ter analogno vse procese, ki jih lahko dobimo s pomočjo križanja), pri težiščnih energijah sipanja, ki so dosti manjše kot $(4G_F/\sqrt{2})^{-1/2} \sim \mathcal{O}(100 \text{ GeV})$. Takšen nastavek imenujemo *Fermijev model šibkih interakcij* in je specifična nizko-energijska limita standardnega modela elektrošibkih interakcij. Oglejmo si torej kotno porazdelitev pripadajočega diferencialnega sipalnega preseka v težiščnem sistemu. V ta namen ponovno najprej izračunamo vsoto kvadratov sipalnih amplitud za vsa spinska stanja končnih delcev ter poprečeno čez možna spinska stanja zašpadnih delcev. Sedaj v interakciji sodelujejo le levoročna stanja, ki v ultrarelativistični limiti sovpadajo z lastnimi stanji sučnošti in lahko uporabimo rezultate iz obravnave sipanja polariziranih elektronov in mionov preko elektromagnetne interakcije v poglavju 2.19. Za razliko od sipanja elektronov in mionov, so vpadni curki nevtrinov vedno le levosučni, zato poprečenje spinov v začetnem stanju zajema le obe spinski stanji elektrona. Tako za proces $e^-(p)\nu_\mu(k) \rightarrow \nu_e(k')\mu^-(p')$ dobimo po izvrednotenju vsote po spinih s pomočjo sledi matrik γ (pozorni moramo biti tudi na pravilno normalizacijo šibkih tokov)

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{1}{2} \frac{16G_F^2}{2} 16(p \cdot k)(p' \cdot k') = 16G_F^2 s^2, \quad (2.151)$$

kjer smo v v drugem koraku že uporabili definicijo Mandelstamove spremenljivke s v ultrarelativistični limiti. Od tod lahko takoj ugotovimo, da diferencialni sipalni presek opisuje enakomerno porazdelitev po prostorskem kotu

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_F^2}{4\pi^2} s. \quad (2.152)$$

S pomočjo križanja enostavno dobimo rezultat še za sipanje $e^-(p)\bar{\nu}_e(k) \rightarrow \bar{\nu}_\mu(k')\mu^-(p')$ in sicer zamenjava $\nu_e \rightarrow \bar{\nu}_e$ ter $\nu_\mu \rightarrow \bar{\nu}_\mu$ v sipalni matriki terja $k \leftrightarrow -k'$ od koder že sledi

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = 64G_F^2(p \cdot k')(p' \cdot k). \quad (2.153)$$

Ponovno si oglejmo kotno porazdelitev takšnega sipanja v težiščnem sistemu, kjer lahko zapišemo $p \cdot k' = |\mathbf{p}|^2(1 + \cos \theta)$ ter $p' \cdot k = |\mathbf{p}|^2(1 + \cos \theta)$, kjer je $|\mathbf{p}| \equiv |\mathbf{p}_i| = |\mathbf{p}_f|$, $p = (|\mathbf{p}_i|, \mathbf{p}_i)$, $k = (|\mathbf{p}_i|, -\mathbf{p}_i)$, $p' = (|\mathbf{p}_f|, \mathbf{p}_f)$, $k' = (|\mathbf{p}_f|, -\mathbf{p}_f)$ ter $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_f = |\mathbf{p}|^2 \cos \theta$. Sledi

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{G_F^2}{16\pi^2} s(1 + \cos \theta)^2. \quad (2.154)$$

Če sedaj oba diferencialna sipalna preseka pointegriramo po prostorskem kotu dobimo

$$\begin{aligned} \sigma(e^- \nu_\mu \rightarrow \nu_e \mu^-) &= \frac{G_F^2 s}{\pi}, \\ \sigma(e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu^-) &= \frac{G_F^2 s}{3\pi}. \end{aligned} \quad (2.155)$$

Prvi sipalni presek je trikrat večji od drugega.

Zančilnost kotne proazdelitve v sipanju $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu^-$, da sipalni presek izgine pri sipalnem kotu $\theta = \pi$, lahko razumemo s pomočjo ohranitve vrtilne količine ter sučnosti. Oglejmo si najprej primer sipanja $e^- \nu_\mu \rightarrow \nu_e \mu^-$ ter izberimo smer vpadnega elektrona (z). Zaradi levoročne narave nabitih šibkih interakcij se bo elektron sipal le, če bo njegov spin kazal v smer $-z$ ($S_z^e = -1/2$). Podobno bo spin vpadnega levosučnega nevtrina (ki leti v smeri $-z$) kazal v smeri z ($S_z^\nu = 1/2$). Projekcija celotne vrtilne količine sistema v smeri z (pri vpadnem parametru $b = 0$) je torej kar vsota obeh spinskih projekcij $J_z = S_z^e + S_z^\nu = 0$. Po sipanju pod kotom $\theta = \pi$ bo izhodni mion letel v smeri $-z$, zaradi levoročnosti interakcije pa bo imel spin poravnan v smeri z ($S_z^\mu = 1/2$). Nasprotno pa bo sipani nevtrino letel v smeri z z spinom $S_z^\nu = -1/2$. Tako bo tudi po sipanju projekcija celotne vrtilne količine sistema enaka $J_z = S_z^\mu + S_z^\nu = 0$. Končno si pogledjmo še sipanje $e^- \bar{\nu}_e \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu^-$. Nasprotno kot vpadni nevtrino ima v šibkem sipanju vpadni anti-nevtrino spin vedno poravnan z smerjo gibanja in torej v začetnem stanju velja $S_z^{\bar{\nu}} = -1/2$ ter posledično $J_z = S_z^e + S_z^{\bar{\nu}} = -1$. Podobno ima po sipanju tudi izhodni antinevtrino spin poravnan v smer gibanja (z), torej $S_z^{\bar{\nu}} = 1/2$. Od tod bi sledilo za celotno projekcijo vrtilne količine sistema po sipanju $J_z = S_z^\mu + S_z^{\bar{\nu}} = 1$. Ob primerjavi s projekcijo vrtilne količine pred sipanjem se torej celotna vrtilna količina v takšnem sipanju ne bi ohranjala, zato je tak prehod prepovedan – verjetnost za proces je nič, in sipalni presek izgine.

2.22 Razpad miona

Fermijev model poleg sipanja nabitih leptonov in nevtrinov napoveduje tudi razpad miona. Sipalna amplituda oziroma produkt nabitih šibkih tokov (2.150) s pomočjo križanja namreč opisuje tudi verjetnost za prehod $\mu^- \rightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$. Verjetnost za razpad delca A v stanje delcev B, C, \dots na časovno enoto nam podaja razpadna širina

$$d\Gamma = d\rho_f \frac{|\mathcal{M}|^2}{2E_A} (2\pi)^4 \delta^{(4)}[p_A - (p_B + p_C + \dots)], \quad (2.156)$$

katere izpeljava poteka analogno kot smo to naredili za sipalni presek v poglavju 2.7. Skladno s tem je $d\rho_f$ diferencial relativističnega faznega prostora končnih stanj, faktor $1/2E_A$ pa izhaja iz normalizacije valovnega paketa začetnega stanja. Pri izvrednotenju kvadrata sipalne amplitude $|\mathcal{M}|^2$ sedaj mase miona v procesu $\mu^-(p) \rightarrow e^-(p') \nu_\mu(k) \bar{\nu}_e(k')$ ne smemo več zanemariti. Kljub temu pa hitro ugotovimo, da nam le-ta sploh ne prispeva, v kolikor še vedno zanemarimo mase elektrona ter nevtrinov, ki so mnogo manjše od mase miona. Če namreč $|\mathcal{M}|^2$ ponovno zapišemo kot produkt elektronskega ter mionskega tenzorja

$$\overline{|\mathcal{M}|^2} = \frac{16G_F^2}{2} L_{e,\mu\nu} L_{\mu\text{on}}^{\mu\nu}, \quad (2.157)$$

nam sedaj masa miona nastopa le znotraj $L_{\mu\text{on}}^{\mu\nu}$ (tokrat poprečujemo le po spinskih stanjih miona v začetnem stanju)

$$\begin{aligned} L_{\mu\text{on}}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \sum_{s,s'} \left[\bar{u}(k)^{(s')} \gamma^\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} u(p)^{(s)} \right] \left[\bar{u}(k)^{(s')} \gamma^\nu \frac{(1-\gamma_5)}{2} u(p)^{(s')} \right]^\dagger \\ &= \frac{1}{8} \text{Tr} [k^\alpha \gamma_\alpha \gamma^\mu (1-\gamma_5) (p^\beta \gamma_\beta + M) \gamma^\nu (1-\gamma_5)], \end{aligned} \quad (2.158)$$

kjer smo z M označili maso miona. Prispevek le-te h kvadratu sipalne amplitude je torej oblike $Mk^\alpha \text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \gamma^\nu (1 - \gamma_5)]$. Takšen izraz pa je ob upoštevanju antikomutacijskih relacij γ^5 identično enak nič. Od tod že lahko uporabimo rezultate iz prejšnjega poglavja, oziroma

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = 64G_F^2 (p \cdot k')(p' \cdot k). \quad (2.159)$$

Poučno je izraziti gornji kvadrat sipalne amplitude v težiščnem sistemu – sistemu mirujočega miona. Tu velja $p = (M, 0) = p' + k + k'$ ter posledično tudi $(p - k')^2 = (p' + k)^2 = p'^2 + k^2 + 2p' \cdot k \simeq 2p' \cdot k$, kjer smo v zadnjem koraku zanemarili masi elektrona in nevtrina v končnem stanju. Definirajmo še $p' = (E', \mathbf{p}')$, $k = (w, \mathbf{k})$, $k' = (w', \mathbf{k}')$, kjer je $w^{(\prime)} \simeq |\mathbf{k}^{(\prime)}|$, pa sledi

$$\begin{aligned} |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= 32G_F^2 (p \cdot k')(p - k')^2 = 32G_F^2 (M - w', -\mathbf{k}')^2 M w' \\ &= 32G_F^2 (M^2 + w'^2 - 2Mw' - w'^2) M w' = 32G_F^2 M (M - 2w') M w'. \end{aligned} \quad (2.160)$$

Opazimo da kvadrat sipalne amplitude ne vsebuje odvisnosti od gibalnih količin izhodnih delcev ter posledično kotov med njihovimi smermi, kar nam bo precej olajšalo izvrednotenje razpadne širine. Preostane nam še izvrednotenje diferenciala faznega prostora končnih stanj $d\rho_f$. Tokrat imamo opravka s tridelčnim faznim prostorom, zato bo potrebnega nekoliko več napora. Kot pomožni rezultat najprej dokažimo naslednjo identiteto

$$\int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2w} = \int d^4 k \chi(w) \delta(k^2), \quad (2.161)$$

kjer je $\chi(w)$ stopničasta funkcija, velja $k = (w, \mathbf{k})$, ne uporabimo pa $k^2 = 0$ ali $w \simeq |\mathbf{k}|$. Za ta namen izrazimo delta funkcijo kvadrata četverca k po definiciji

$$\delta(k^2) = \delta(w^2 - |\mathbf{k}|^2) = \frac{1}{2|\mathbf{k}|} [\delta(w - |\mathbf{k}|) + \delta(w + |\mathbf{k}|)]. \quad (2.162)$$

Sedaj zapišimo desno stran enačbe (2.161) kot

$$\int d^3 \mathbf{k} dw \chi(w) \frac{1}{2|\mathbf{k}|} [\delta(w - |\mathbf{k}|) + \delta(w + |\mathbf{k}|)] = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2w}, \quad (2.163)$$

kjer nam zaradi prisotnosti stopničaste funkcije k integralu prispeva le delta funkcija pri pozitivni energiji w . Sedaj zapišimo diferencial faznega prostora ter pointegrirajmo po gibalni količini mionskega nevtrina k z uporabo gornje formule

$$\begin{aligned} \int_k d\rho_f (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p - p' - k - k') &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{2E'} \frac{d^3 \mathbf{k}'}{2w'} \int d^4 k \chi(w) \delta(k^2) \delta^{(4)}(p - p' - k - k') \\ &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{d^3 \mathbf{p}'}{2E'} \frac{d^3 \mathbf{k}'}{2w'} \chi(M - E' - w') \delta[(p - p' - k')^2]. \end{aligned} \quad (2.164)$$

Sedaj preostala diferenciala prepišemo v krogelne koordinate ter izvedemo integrale po kotih, ki nam predstavljajo le globalne rotacije sistema: po integraciji po \mathbf{k} lahko med preostalima smerema \mathbf{p}' in \mathbf{k}' definiramo le en fizikalen kot (θ), torej

$$d^3 \mathbf{p}' = 4\pi E'^2 dE', \quad (2.165)$$

$$d^3 \mathbf{k}' = 2\pi w'^2 dw' d(\cos \theta). \quad (2.166)$$

Prepišimo tudi preostalo delta funkcijo še v drugačno obliko

$$\begin{aligned} \delta[(p - p' - k')^2] &= \delta[(M - E' - w')^2 - (\mathbf{p}' + \mathbf{k}')^2] = \delta[M^2 - 2ME' - 2Mw' + 2E'w'(1 - \cos \theta)] \\ &= \frac{1}{2E'w'} \delta \left[\frac{M^2 - 2ME' - 2Mw' + 2E'w'}{2E'w'} - \cos \theta \right] \end{aligned} \quad (2.167)$$

ter si pogledjmo integral po $\cos \theta$. Najprej s pomočjo stopničastih funkcij raztegnimo integracijski interval na celotno realno os

$$\int_{-1}^1 d\cos \theta \delta(\dots - \cos \theta) = \int_{-\infty}^{\infty} d\cos \theta \chi(\cos \theta + 1)\chi(1 - \cos \theta)\delta(\dots - \cos \theta), \quad (2.168)$$

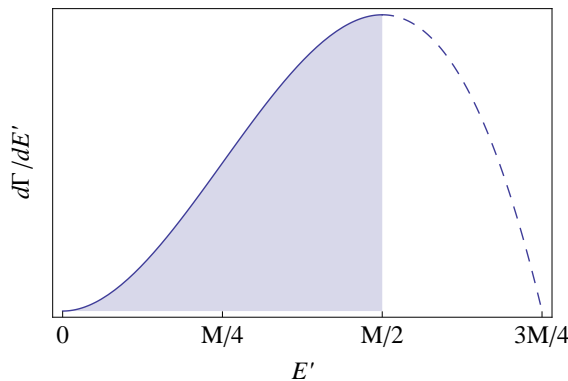
ter si oglejmo argumenta obeh stopničastih funkcij po integraciji:

$$\begin{aligned} \chi(1 - \cos \theta) &\rightarrow \chi(2E'w' - M^2 + 2E'M + 2Mw' - 2E'w') = \chi(w' + E' - M/2) \\ \chi(1 + \cos \theta) &\rightarrow \chi(M^2 - 2E'M - 2Mw' + 4E'w') = \chi(M/2 - w') \end{aligned} \quad (2.169)$$

kjer smo v zadnjem koraku obeh vrstic argument stopničastih funkcij normalizirali na w' . Dobili smo torej nove integracijske meje za integracijo po w' . Sedaj končno izrazimo diferencialno razpadno širino kot

$$\begin{aligned} d\Gamma &= \frac{1}{(2\pi)^5} \frac{1}{2M} \int_0^\infty \frac{4\pi E'^2}{2E'} dE' \int_{M/2-E'}^{M/2} \frac{2\pi w'^2}{2w'} dw' \frac{1}{2E'w'} \chi(M - E' - w') 32G_F^2 M(M - 2w')Mw' \\ &= \frac{G_F^2}{2\pi^3} \int_0^\infty dE' \int_{M/2-E'}^{M/2} dw' M(M - 2w')w' \chi(M - E' - w') \\ &= \frac{G_F^2}{12\pi^3} \int_0^{M/2} dE' \left[M^2 E'^2 \left(3 - 4 \frac{E'}{M} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.170)$$

Po integraciji čez energijo elektronskega nevtrina (ki je v detektorjih ponavadi ni moč izmeriti) smo tako dobili enodimenzionalni spekter energije izsevanega elektrona v mionskem razpadu. Zanimivo je, da je integracijsko področje $(0, M/2)$, ki nam predstavlja fizikalni del spektra,



manjše kot področje, na katerem je integrand pozitiven $(0, 3M/4)$. Če končno pointegriramo še po energiji elektrona, dobimo razpadno širino miona

$$\Gamma(\mu)[= 1/\tau_\mu] = \frac{G_F^2 M^5}{192\pi^3}. \quad (2.171)$$

Z meritvijo lastnega razpadnega časa miona (ter njegove mase) lahko torej določimo vrednost Fermijeve sklopitvene konstante G_F . Trenutne izjemno natanačne meritve nam tako dajo $m_\mu = 0,1057 \text{ GeV}/c^2$, $\tau_\mu = 2,197 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, od koder dobimo $G_F/(\hbar c)^3 = 1.166 \cdot 10^{-5} \text{ GeV}^{-2}$.

□

Literatura

- [1] F. Schwabl. *Quantum mechanics*. Berlin, Germany: Springer, 1995. 2nd Ed., 416 p.
- [2] J. G. Joseph K.P. Santhosh and S. Sahadevan. Alpha decay of nuclei in the range $67 \leq Z \leq 91$ from the ground state and isomeric state. *Physical Review C*, 82:064605, 2010.
- [3] Lev Davidovich Landau and Evgeny Mikhailovich Lifschitz. *Klassische Feldtheorie*. Berlin, Germany: Springer, 1963.
- [4] R. J. Blin-Stoyle. *Theories of Nuclear Moments*. Oxford University Press, 1957.
- [5] M. G. Mayer and J. H. D. Jensen. *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*. John Wiley & Sons, 1955.
- [6] D.H. Perkins. *Introduction to High Energy Physics*. Adison-Wesley Publishing, 1982.
- [7] Michael E. Peskin and Daniel V. Schroeder. *An Introduction to quantum field theory*. Westview press, 1995.
- [8] B. Povh, C. Scholz, K. Rith, and F. Zetsche. *Particles and nuclei: An introduction to the physical concepts*. Berlin, Germany: Springer, 1993.
- [9] F. Halzen and A. D. Martin. *Quarks & Leptons: An Introductory Course in Modern Particle Physics*. John Wiley & Sons, 1984.