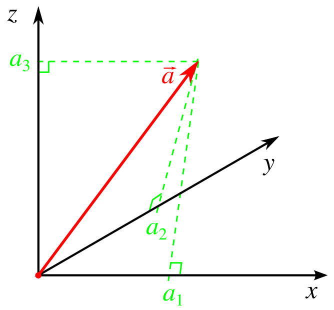
1 Ponovitev matematike — za kemijske inženirje

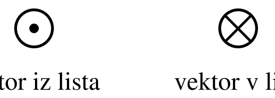
1.1 Vektorji

- Vektor v 3-razsežnem prostoru lahko napišemo kot trojico števil: $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$. Števila a_1, a_2, a_3 po vrsti označujejo *komponente* vektorja v x, y in z smeri kartezičnega koordinatnega sistema. Vektorje si intuitivno predstavljamo kot puščice (v 3-razsežnem prostoru). Če želimo poznati nek vektor, moramo poznati tako njegovo *velikost* kot *smer*.

Vektor razstavimo na komponente



Dogovor za risanje vektorjev v ravnini



- *Ničelni vektor*:

$$\vec{0} = (0, 0, 0)$$

- *Seštevanje in odštevanje vektorjev*:

$$\vec{a} \pm \vec{b} = (a_1 \pm b_1,\, a_2 \pm b_2,\, a_3 \pm b_3)$$

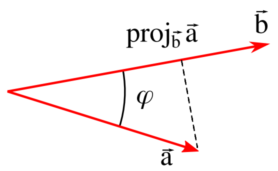
- *Množenje vektorja s skalarjem* (realnim številom) α:

$$\alpha\, \vec{a} = \alpha\, (a_1, a_2, a_3) = (\alpha\, a_1, \alpha\, a_2, \alpha\, a_3)$$

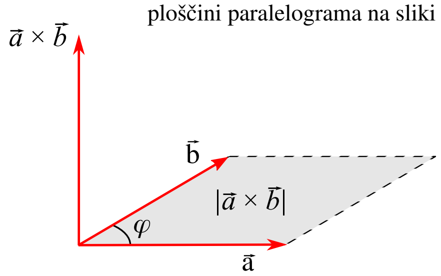
- *Norma* (velikost) *vektorja*:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$$

Skalarni produkt:
produkt velikosti prvega vektorja in
velikosti projekcije drugega vektorja na prvega



Vektorski produkt:
po velikosti enak
ploščini paralelograma na sliki



- *Skalarni prodkut* dveh vektorjev:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\begin{aligned}
\text{komutativnost}: &\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}\\
\text{distributivnost}: &\quad \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\cdot\vec{c}\\
&\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi = |\vec{a}|\,\mathrm{proj}_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}|\,\mathrm{proj}_{\vec{b}}\vec{a}\\
&\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}\perp\vec{b}\\
&\quad \vec{a}\cdot\vec{a} \geq 0\\
&\quad \vec{a}\cdot\vec{a} = 0 \quad\Leftrightarrow\quad \vec{a}=\vec{0} \quad\Leftrightarrow\quad |\vec{a}| = 0\\
\text{kot med vektorjema:} &\quad \varphi = \arccos\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}\right)
\end{aligned}$$

- *Vektorski produkt*: če izberemo ortonormirano bazo

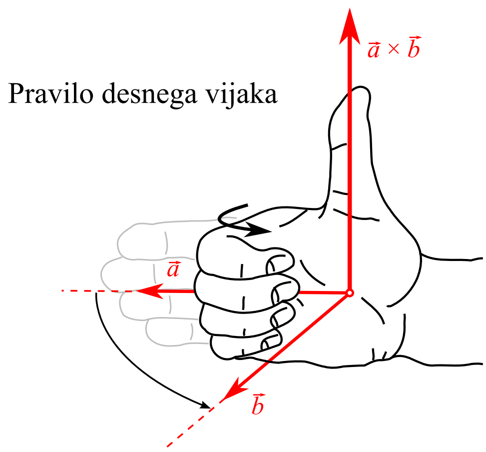
$$\begin{aligned}
\hat{\imath} &= (1,0,0)\\
\hat{\jmath} &= (0,1,0)\\
\hat{k} &= (0,0,1)
\end{aligned}$$

velja

$$\vec{a}\times\vec{b} = (a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3) = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k}\\ a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2,\ -a_1b_3 + a_3b_1,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

$$\begin{aligned}
\text{antikomutativnost}: &\quad \vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}\\
\text{distributivnost}: &\quad \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b} + \vec{a}\times\vec{c}\\
\\
\text{velikost}: &\quad |\vec{a}\times\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi\\
\text{smer}: &\quad \text{pravilo desnega vijaka}
\end{aligned}$$

Vektorski produkt $\vec{a}\times\vec{b}$ je po velikosti enak ploščini paralelograma, ki ga določata vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$, smer pa določimo s *pravilom desnega vijaka*: s prsti **desne** roke zakrožimo od prvega vekorja $\vec{a}$ proti drugemu vektorju $\vec{b}$ v smeri manjšega kota; smer desnega vijaka je definirana s smerjo palca pri omenjenem gibu. Vektorski produkt $\vec{a}\times\vec{b}$ je vedno pravokoten tako na $\vec{a}$ kot na $\vec{b}$.



Pri skalarnem produktu dveh vektorjev dobimo skalar (število), pri vektorskem produktu pa je rezultat vektor.

Opomba: v nekaterih učbenikih se vektorji namesto s puščico označujejo z odebeljenim tiskom (npr. **a** namesto $\vec{a}$). Norma vektorja se včasih označuje z dvojno črto, torej $\|\vec{a}\|$ namesto $|\vec{a}|$.

1.2 Kvadratna enačba

- Kvadratna enačba (v realnih številih) je enačba oblike

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0,$$

kjer so a, b in c neka realna števila, x pa neznanka. Kvadratna enačba ima za kompleksne x vedno dve rešitvi x_1 in x_2 (ne nujno različni), ki jih lahko zapišemo z naslednjima predpisoma:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

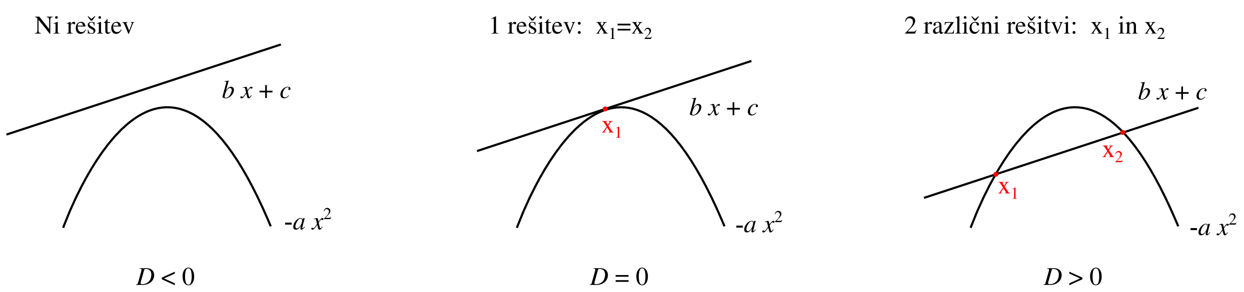
Iz teh predpisov tudi vidimo, da je število realnih rešitev odvisno od vrednosti izraza pod korenom $D \equiv b^2 - 4ac$; pravimo mu *diskriminanta* kvadratne enačbe.

1. Če je $D < 0$, kvadratna enačba nima realnih rešitev (ima 2 kompleksni rešitvi).
2. Če je $D = 0$, sta rešitvi x_1 in x_2 enaki, in sicer $-b/2a$.
3. Če je $D > 0$, ima kvadratna enačba dve različni realni rešitvi x_1 in x_2.

- Razloge za različno število rešitev kvadratne enačbe si lahko predstavljamo tudi geometrično. Kvadratno enačbo prepišemo v drugačno obliko:

$$-ax^2 = bx + c.$$

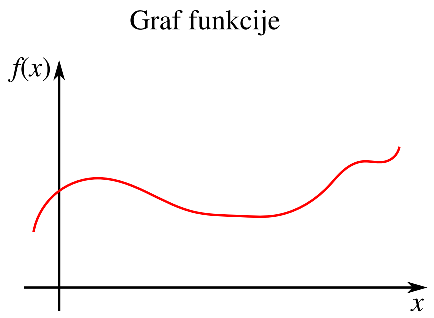
Če si levo in desno stran predstavljamo kot funkciji spremenljivke x, na levi prepoznamo parabolo, na desni pa linearno funkcijo (premico). Točke x, ki dajo enako vrednost na obeh straneh, so presečišča omenjenih funkcij. S kvadratno enačbo torej iščemo presečišča parabole in premice: imamo 0, 1 ali 2 presečišči, kot prikazuje spodnja slika; to ravno ustreza primerom $D < 0$, $D = 0$ in $D > 0$.

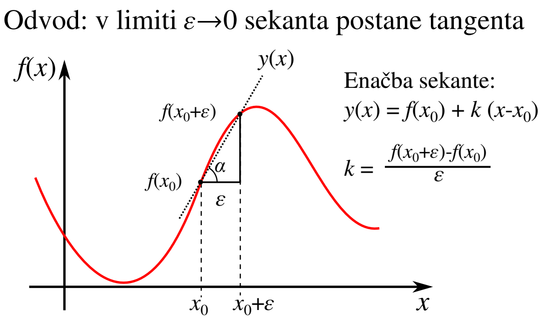


1.3 Odvodi

- Naj bo f funkcija, ki slika iz realnih števil v realna števila: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Vsak $x \in \mathbb{R}$ funkcija f preslika v $f(x)$, kar zapišemo kot $x \mapsto f(x)$. Množico vseh parov $\big(x, f(x)\big)$ imenujemo *graf* funkcije f.

- Odvod funkcije f v točki $x_0 \in \mathbb{R}$ označimo z $f'(x_0)$ ali $\frac{df}{dx}(x_0)$ in je definiran z limito:
$$f'(x_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0)}{\varepsilon}.$$
Odvod funkcije f v točki x_0 si intuitivno lahko predstavljamo kot **naklon tangente** na graf f v točki x_0, kar je "hitrost spreminjanja funkcije f v točki x_0"; tangenta na f skozi točko x_0 je premica, ki se v točki $\big(x_0, f(x_0)\big)$ dotika grafa funkcije f. To lahko vidimo, če v definiciji odvoda namesto x_0 pišemo x_1, namesto $x_0 + \varepsilon$ pišemo x_2, ter z generičnim zapisom $y = f(x)$ definiramo $y_2 = f(x_2)$ in $y_1 = f(x_1)$. Potem velja
$$f'(x_1) = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \tan \alpha$$
Izraz v limiti je enak naklonu premice, ki gre skozi točki (x_1, y_1) in (x_2, y_2) na grafu funkcije f, torej naklonu sekante. Ko točko x_2 pomikamo vedno bližje x_1, se sekanta vedno bolj približuje tangenti; v limiti $x_2 \to x_1$ sekanta postane tangenta.





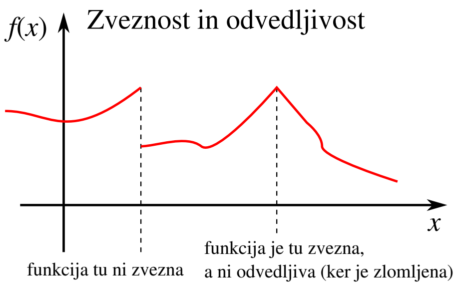
- Z odvajanjem iz funkcije f dobimo novo funkcijo f', katere vrednost $f'(x)$ je enak odvodu funkcije f v točki x.

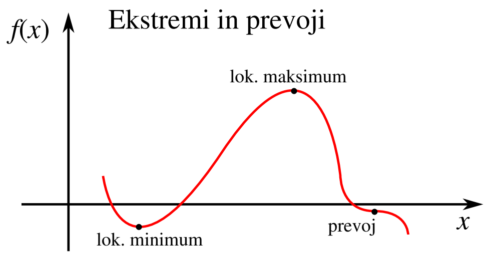
- Primer izračuna odvoda prek definicije: za $f(x) = x^2$ je
$$f'(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon) - f(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(x + \varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2x\varepsilon + \varepsilon^2}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} (2x + \varepsilon) = 2x$$

- Nekaj pravil odvajanja in tabela odvodov pogostih funkcij (oboje skupaj v praksi zadošča za odvajanje poljubne funkcije):
$$\begin{aligned}
\text{vsota/razlika}: &\quad \big(f(x) \pm g(x)\big)' = f'(x) \pm g'(x) \\
\text{produkt s konstanto}: &\quad \big(a\ f(x)\big)' = a\ f'(x) \\
\text{produkt}: &\quad \big(f(x)\ g(x)\big)' = f'(x)\ g(x) + f(x)\ g'(x) \\
\text{kvocient}: &\quad \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2} \qquad \text{kjer je } g(x) \neq 0 \\
\text{kompozitum}: &\quad \big(f(g(x))\big)' = f'\big(g(x)\big)\ g'(x)
\end{aligned}$$

$f(x)$	a	x	x^n	$\sin x$	$\cos x$	e^x	a^x	$\ln x$
$f'(x)$	0	1	$n\, x^{n-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	e^x	$a^x\, \ln a$	$1/x$

- Ekstremi funkcije:
  - Potrebni pogoj, da ima funkcija f v točki x_0 (lokalni) ekstrem, je $f'(x_0) = 0$.
  - Zadostni pogoj za (lokalni) maksimum v x_0: $f'(x_0) = 0$, $\underline{f''(x_0) < 0}$.
  - Zadostni pogoj za (lokalni) minimum v x_0: $f'(x_0) = 0$, $\underline{f''(x_0) > 0}$.
  - Zadostni pogoj za prevoj v x_0: $f'(x_0) = 0$, $\underline{f''(x_0) = 0}$, $f'''(x_0) \neq 0$.
  - Primeri onkraj zgornjih zadostnih pogojev: x^4 ima v 0 minimum, x^5 ima v 0 prevoj.





1.4 Integrali

- Če imamo funkciji $f(x)$ in $F(x)$ pravimo, da je $F(x)$ (nedoločen) integral funkcije $f(x)$, kadar je $F'(x) = f(x)$. Pišemo: $F(x) = \int f(x)\,dx$. Vidimo, da je "integral po dx" inverzna funkcija "odvajanja po x".

- Nedoločen integral je v resnici nedoločen do konstante, saj za poljubno konstanto C velja $(F(x) + C)' = F(x)' = f(x)$, torej je tudi $F(x) + C$ nedoločen integral funkcije $f(x)$. Zato generično pišemo $\int f(x)\,dx = F(x) + C$.

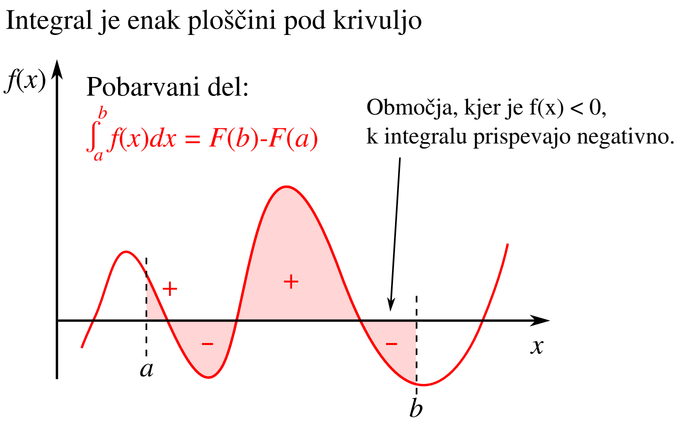
- Pravila integracije in tabela nedoločenih integralov pogostih funkcij (pisano brez generične konstante C):

$$\text{vsota/razlika}: \qquad \int \big(f(x) \pm g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

$$\text{produkt s konstanto}: \qquad \int A\,f(x)\,dx = A \int f(x)\,dx$$

$f(x)$	1	x	x^n	$1/x$	$\sin x$	$\cos x$	e^x
$\int f(x)\,dx$	x	$x^2/2$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\ln\lvert x\rvert$	$-\cos x$	$\sin x$	e^x

- Osnovni izrek analize: $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, kjer je F eden od nedoločenih integralov f. Določeni integral funkcije f nam pove ploščino lika pod krivuljo grafa.



1.5 Kotne funckije

- Kote lahko merimo v stopinjah ali radianih. Slednji so "naravne enote" za merjenje kotov, saj se velikost kota v teh enotah ujema z dolžino loka pri krožnici z radijem 1. Polni kot je enak $360°$ oziroma 2π radianov, zato se iz radianov v stopinje pretvori tako, da se število radianov množi s $180°/\pi$.

- Zbirka formul za kotne funkcije:

$$
\begin{aligned}
e^{i\varphi} &= \cos\varphi + i\sin\varphi, \\
\cos\varphi &= \tfrac{1}{2}(e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}), \\
\sin\varphi &= -\tfrac{i}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}), \\
\tan\varphi &= \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = -i\frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}, \\
\sin\varphi &= \cos(\tfrac{\pi}{2} - \varphi), \\
1 &= \sin^2\varphi + \cos^2\varphi,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sin(\alpha \pm \beta) &= \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha, \\
\cos(\alpha \pm \beta) &= \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta, \\
\tan(\alpha \pm \beta) &= \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha\tan\beta},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\cos\alpha + \cos\beta &= 2\cos\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right), \\
\cos\alpha - \cos\beta &= -2\sin\left(\tfrac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\tfrac{\alpha-\beta}{2}\right), \\
\sin\alpha \pm \sin\beta &= 2\sin\left(\tfrac{\alpha\pm\beta}{2}\right)\cos\left(\tfrac{\alpha\mp\beta}{2}\right),
\end{aligned}
$$

1.6 Taylorjeva vrsta

- Za analitične funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lahko za x dovolj blizu a napravimo ravoj v *Taylorjevo vrsto* okrog a (a je neko realno število):

$$f(x) = f(a) + \tfrac{1}{1!}(x-a)f'(a) + \tfrac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a) + \tfrac{1}{3!}(x-a)^3 f'''(a) + \ldots$$

- Nekaj primerov razvoja za $a = 0$:

$$
\begin{aligned}
e^x &= 1 + x + \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{3!}x^3 + \ldots \\
\sin x &= x - \tfrac{1}{3!}x^3 + \tfrac{1}{5!}x^5 - \ldots \\
\cos x &= 1 - \tfrac{1}{2!}x^2 + \tfrac{1}{4!}x^4 - \ldots \\
\frac{1}{1-x} &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \qquad (x < 1).
\end{aligned}
$$

Za majhne x (x blizu 0 oziroma $x \ll 1$) zato veljajo naslednji približki:

$$
\begin{aligned}
e^x &\approx 1 + x \\
\sin x &\approx x, \\
\cos x &\approx 1 - x^2/2, \\
\frac{1}{1-x} &\approx 1 + x.
\end{aligned}
$$