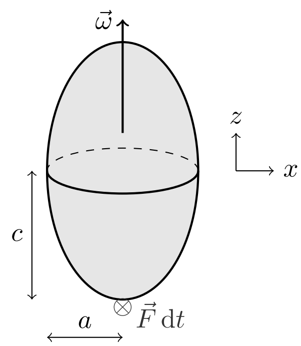
3. izpit iz Klasične mehanike, 30.8.2023

1. Utež z maso m drsi po poledenelem planetu, ki je oblike popolne krogle. Trenje zanemari.
a) Planet naj v prvem delu miruje. Zapiši Lagrangeovo funkcijo za utež in izpelji enačbe gibanja! Katera količina se ohranja?
b) Iz enačb gibanja izpelji trajektorijo $\theta(\phi)$ po kateri se giblje utež! Za kakšno gibanje gre?
c) Sedaj naj se planet vrti okrog osi skozi središče s kotno hitrostjo ω. Zapiši vektor hitrosti *v vrtečem sistemu* (v katerem planet miruje) z uporabo sferičnih koordinat in ustreznih sferičnih baznih vektorjev.
d) Ob času $t = 0$ utež miruje glede na površino planeta na geografski širini, ki ustreza $\theta = \pi/6$ (merjeno od severnega pola). Z besedami opiši, kaj se bo z utežjo dogajalo ob kasnejših časih, tako gledano iz inercialnega kot iz vrtečega sistema!

2. Obravnavaj gibanje togega, homogenega in prostovrtečega elipsoida, ki je osno simetričen vzdolž osi z. Polosi elipsoida označimo z a in c (glej skico).
a) Izračunaj volumen in tenzor vztrajnostnega momenta! Rezultate izrazi z a, c in maso elipsoida m. Namig: površina elipsoida je podana z enačbo $\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Naj se elipsoid vrti okrog osi z s kotno hitrostjo ω_z. V nekem trenutku udarimo dno elipsoida s sunkom sile $\vec{F}\,\mathrm{d}t$ kot je prikazano na skici (predstavljaj si, da je na dnu elipsoida majhna izboklina). Z J_x in J_z označimo lastni vrednosti tenzorja vztrajnostnega momenta. Obravnavaj primera, ko velja $J_x < J_z$ oz. $J_x > J_z$.

b) Po udarcu, v katerem izmed obeh primerov nadaljne gibanje vektorja kotne hitrosti $\vec{\omega}$ nikoli ne more zaiti pod horizontalno ravnino, ne glede na moč udarca? Rezultat argumentiraj s pomočjo skic za oba primera.
c) Določi kritično vrednost razmerja J_x/J_z, do katerega $\vec{\omega}$ ne zaide pod horizontalno ravnino. Za ta primer določi tudi razmerje polosi c/a.



3.
a) Naj gibanje v 1d opisuje Hamiltonian $H = p^2/2 - (1/2)q^{-2}$, kjer sta q in p kanonični položaj in kanonični moment, $\{q, p\}$ =1. Z uporabo Poissonovih oklepajev izračunaj celotno časovno odvisnost količine $D = pq/2 - Ht$, kjer je t čas!
b) Sedaj obravnavaj isti primer v poljubno dimenzijah s Hamiltonianom $H = |\mathbf{p}|^n - a|\mathbf{q}|^{-n}$, kjer sta a in n konstanti. Kako se kot funkcija časa spreminja količina $D = \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}/n - Ht$?