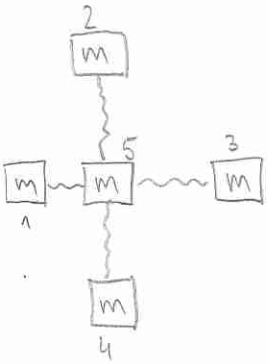
$$T = \sum_i \frac{m_i \dot{z}_i^2}{2} = \frac{1}{2} \underline{\dot{z}}^T \underline{\underline{T}} \underline{\dot{z}}$$



$$\underline{\underline{T}} = m \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow T = \frac{1}{2} \underbrace{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)}_{z^T} \underbrace{m \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{T}}} \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}}_{z}$$

$$V = \frac{1}{2} \underline{z}^T \underline{\underline{V}} \underline{z}$$

$$V = \frac{k}{2} \sum_{i=1}^{4} (z_i - z_5)^2$$

$$= \frac{k}{2} \left[z_1^2 + z_5^2 - 2z_1 z_5 + z_2^2 + z_5^2 - 2z_2 z_5 + z_3^2 + z_5^2 - 2z_3 z_5 + z_4^2 + z_5^2 - 2z_4 z_5 \right]$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{2} \underbrace{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5)}_{z^T} \underbrace{k \begin{bmatrix} 1&0&0&0&-1 \\ 0&1&0&0&-1 \\ 0&0&1&0&-1 \\ 0&0&0&1&-1 \\ -1&-1&-1&-1&4 \end{bmatrix}}_{\underline{\underline{V}}} \underbrace{\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \\ z_5 \end{pmatrix}}_{z}$$

IŠČEMO LASTNA NIHANJA:

$$(\omega^2 \underline{\underline{T}} - \underline{\underline{V}}) a^i = 0$$

$$\left(\omega^2 m \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1 \end{bmatrix} - k \begin{bmatrix} 1&0&0&0&-1 \\ 0&1&0&0&-1 \\ 0&0&1&0&-1 \\ 0&0&0&1&-1 \\ -1&-1&-1&-1&4 \end{bmatrix} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = 0$$

$$\begin{bmatrix} \omega^2 m - k & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & \omega^2 m - k & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & \omega^2 m - k & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & \omega^2 m - k & k \\ k & k & k & k & \omega^2 m - 4k \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \end{pmatrix} = 0$$

Uganemo lastne vektorje. Prva možnost je, da vse uteži nihajo skupaj, torej je lastni vektor $a^1 = (1,1,1,1,1)$

1.) $a^1 = (1,1,1,1,1) \rightarrow m\omega^2 - k + k = 0$, samo če $\omega^2 = 0$, $\boxed{\omega_1 = 0}$

2.) $a^2 = (1,1,-1,-1,0)$
3.) $a^3 = (1,-1,-1,1,0)$
4.) $a^4 = (1,-1,1,-1,0)$

Ker peta masa miruje (lastni vektor 0!) niha vsaka druga utež zase, kot bi bila sama → ne čuti drugih.

$\Rightarrow \omega^2 m - k = 0$, če $\omega^2 = \frac{k}{m}$, $\boxed{\omega_{2,3,4} = \sqrt{\frac{k}{m}}}$

5.) Občutek nam pove, da obstaja še peto lastno nihanje, kjer niha peta utež v protifazi z ostalimi štirimi. To nihanje mora imeti ORTOGONALEN lastni vektor. Ugotovimo, da temu ustreza vektor oblike $a^5 = (1,1,1,1,a)$
Računamo a in ω, zato potrebujemo dve enačbi za dve neznanki.

$\Rightarrow \omega^2 m - k + ak = 0 \quad (1) \rightarrow \omega^2 m = k(1-a) \quad (*)$

$4k + (\omega^2 m - 4k)a = 0 \quad (2)$

$$4k + (k(1-a) - 4k)a = 0$$

$$4k + (k - ka - 4k)a = 0$$

$$4k + ka - ka^2 - 4ka = 0$$

$$-\cancel{k}a^2 - 3\cancel{k}a + 4\cancel{k} = 0 \quad /:(-k)$$

$$a^2 + 3a - 4 = 0$$

$$(a+4)(a-1) = 0$$

$a_1 = -4$
$a_2 = 1$

a_2 že poznamo - ni zanimiva več
Iščemo še lastno frekvenco za $a_1 = -4$

$(*) \quad \omega^2 m = k(1-a_1)$

$$\omega^2 m = k5$$

$$\omega^2 = 5\frac{k}{m}$$

$$\boxed{\omega_5 = \sqrt{\frac{5k}{m}}}$$