# Naloge iz Klasične mehanike

## 1 Krivočrtne koordinate

1. Izrazi kinetično energijo delca v sferičnih koordinatah $x = r\cos\phi\sin\theta, y = r\sin\phi sin\theta, z = r\cos\theta$!
Rezultat: $T = m/2\left(\dot{r}^2 + r^2\sin^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\theta}^2\right)$
Postopek: $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$; $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\phi d\phi + \mathbf{e}_\theta d\theta$ ($\mathbf{e}_r = d\mathbf{r}/dr$, ...). Izračunaj skalarne produkte med baznimi vektorji. Izrazi $T = m(\dot{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{r}})/2$.

2. Zapiši Newtonov zakon v polarnih koordinatah $x = r\cos\phi, y = r\sin\phi$!
Rezultat: $\mathbf{F}/m = \ddot{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{e}}_r(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2) + \hat{\mathbf{e}}_\phi(r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})$.
Postopek: $\mathbf{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$; $d\mathbf{r} = \mathbf{e}_r dr + \mathbf{e}_\phi d\phi$ ($\mathbf{e}_r = \partial\mathbf{r}/\partial r$, ...) ; $\dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{e}_r + \dot{\phi}\mathbf{e}_\phi = \dot{r}\hat{\mathbf{e}}_r + r\dot{\phi}\hat{\mathbf{e}}_\phi$; $\dot{\hat{e}}_r = \dot{\phi}\hat{\mathbf{e}}_\phi$; $\dot{\hat{\mathbf{e}}}_\phi = -\dot{\phi}\hat{\mathbf{e}}_r$; $\ddot{\mathbf{r}} = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\dot{\mathbf{r}}$.

3. Delec z maso $m$ se giblje po vodoravno postavljenem obroču s polmerom $R$. Delec po obroču drsi tako, da je gibanje viskozno dušeno (pojemek zaradi viskoznosti je enak $\mathbf{F}_v = -\eta\dot{\mathbf{r}}$). Kako se giblje ob kasnejših časih, če je ob $t = 0$ $\phi = 0, \dot{\phi} = v_{\phi 0}$?
Rezultat: $\phi = v_{\phi 0}\tau(1 - e^{-t/\tau})$, $\tau = m/\eta$.
Postopek: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_v + F_p\mathbf{e}_r$, polarne koordinate, $r = R$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$.

4. Delec z maso $m$ se giblje po navpično postavljenem obroču s polmerom $R$, po katerem drsi tako, da je gibanje viskozno dušeno (pojemek zaradi viskoznosti je enak $\mathbf{F}_v = -\eta\dot{\mathbf{r}}$). Zapiši Newtonov zakon v polarnih koordinatah. Poišči ravnovesne lege. Ob $t = 0$ delec za majhen kot $\delta\varphi$ odmaknemo iz a) stabilne; b) labilne ravnovesne lege. Zapiši položaj delca ob kasnejših časih!
Rezultat: $\ddot{\varphi} + 2\beta\dot{\varphi} + \omega_0^2\cos\varphi = 0$, $\beta = \eta/m$, $\omega_0^2 = g/R$, a) $\varphi_0 = -\pi/2$, $\varphi(t) = \varphi_0 + \delta\varphi e^{-\beta t}\cos(\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}t)$, b) $\varphi_0 = \pi/2$, $\varphi(t) = \varphi_0 + \delta\varphi e^{-\beta t}\cosh(\sqrt{\omega_0^2 + \beta^2}t)$
Postopek: $m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}_v + F_p\mathbf{e}_r + \mathbf{F}_g$, $r = R$, $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, $\mathbf{F}_g$ zapiši v polarnih koordinatah, razvoj za majhne odmike $\cos(\varphi + \delta\varphi) = \cos\varphi_0 - \delta\varphi\sin\varphi_0$.

5. Utež z maso $m$ gladko drsi po podlagi, ki jo opišemo z funkcijo $y(x) = y_0\cos(x/x_0)$. Zanima nas pri katerih začetnih pogojih se utež odlepi od podlage.
a) Naj enotski vektor $\hat{\mathbf{e}}_1$ kaže v tangentni smeri, $\hat{\mathbf{e}}_2$ pa v normalni smeri na krivuljo $y(x)$. Zapiši $\hat{\mathbf{e}}_1$ in $\hat{\mathbf{e}}_2$ v kartezičnem koordinatnem sistemu $\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}$! Težnostni pospešek $g$ naj

kaže v smeri $-\hat{\mathbf{j}}$. Izrazi hitrost in pospešek z $\hat{\mathbf{e}}_1$ in $\hat{\mathbf{e}}_2$!

b) Normalno komponento pospeška izenači s silami, ki delujejo na utež in izpelji zvezo

$$v^2 y'' + g(1 + y'^2) = 0, \tag{1}$$

ki določa mejno velikost hitrosti, pri kateri se utež odlepi od podlage. ($'$ označuje odvod po $x$).

c) Utež sunemo v vodoravni smeri z vrha vzpetine (pri $x = 0$) z majhno začetno hitrostjo $v_0 \to 0$. Ali (in če da, pri katerem $y$) se bo utež odlepila od podlage? Odgovor utemelji.

Rezultat in postopek: a) $\hat{\mathbf{e}}_1 = \cos\phi\hat{\mathbf{i}} + \sin\phi\hat{\mathbf{j}}$, $\tan\phi = dy/dx$. $\hat{\mathbf{e}}_2 = -\sin\phi\hat{\mathbf{i}} + \cos\phi\hat{\mathbf{j}}$. $\mathbf{v} = v\hat{\mathbf{e}}_1, \mathbf{a} = \dot{v}\hat{\mathbf{e}}_1 + vd(\hat{\mathbf{e}}_1)/dt, d(\hat{\mathbf{e}}_1)/dt = \dot{\phi}\hat{\mathbf{e}}_1$. b) $\mathbf{a} = -g\hat{\mathbf{j}} + F_p/m\hat{\mathbf{e}}_2$. Pomnožiš skalarno z $\hat{\mathbf{e}}_2$, upoštevaš zvezo med $\phi$ in $y'$, mejna vrednost je, ko je $F_p = 0$.

c) Hitrost $v$ izrazi iz zakona o ohranitvi energije, izrazi $y''$ in $y'$ z $y$, vstavi v enačbo iz b) in dobiš $y \in \mathbb{C} \implies$ ni rešitve.

6. Obravnavaj gibanje prostega delca (vsota zunanjih sil $\mathbf{F} = 0$) v polarnih koordinatah. Zapiši Newtonov zakon v polarnih koordinatah in iz njega izpelji $r^2\dot{\phi} = \text{konst} := \lambda$ ter potem z uporabo tega rezultata $\dot{r}^2 + \lambda^2/r^2 = \text{konst} := \epsilon$. Skiciraj gibanje delca v ravnini $x, y$ in pokaži da izračunana $r(t), \phi(t)$ ustrezata premoenakomernemu gibanju! Na grafu $y(x)$ skiciraj gibanje delca.
   Rešitev: $r(t) = \sqrt{\lambda^2/\varepsilon + \varepsilon t^2}$, $\varphi(t) = \arctan(\varepsilon t/\lambda)$.
   Postopek: $\mathbf{e}_\varphi$ komponento Newtonovega zakona zapiši kot $(\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}/r) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\varphi})/r^2 = 0 \implies r^2\dot{\varphi} = \text{konst} = \lambda$ in vstavi v $\mathbf{e}_r$ komponento, $\ddot{r} - \lambda^2/r^3 = 0$, pomnoži z $\dot{r}$ in dobiš $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\dot{r}^2/2 + \lambda^2/(2r^2)) = 0 \implies \dot{r}^2 + \lambda^2/r^2 = \text{konst} = \varepsilon$. Iz tega izračunaj $r(t)$ in nato še $\varphi(t)$.

7. Enako kot prejšnja naloga, le da diferencialno enačbo za $r(t)$, ki je že poenostavljena z uporabo ohranjene količine $\lambda$ prepišeš v diferencialno enačbo za $r(\phi)$. Izpelji $r(\phi)$!
   Rešitev: $r(\phi) = r_0/(\cos(\phi - \phi_0))$.
   Postopek: $dr/dt = dr/d\phi d\phi/dt = r'\lambda/r^2$. Ugodno je diferencialno enačbo zapisati za $u(\phi) = 1/r(\phi)$.

8. Delec prosto drsi po vodoravno nameščenemu vodilu, ki ga opisuje enačba $r = a\phi$. Izračunaj $\phi(t)$!

## 2 Virialni teorem

1. Za delec, ki se giblje v centralnem potencialu (npr. satelit, ki se giblje okrog Zemlje) $V(r) = kr^n$ pokaži, da velja "Virialni teorem" $\langle 2T \rangle = n\langle V \rangle$, kjer $\langle f \rangle = \lim_{T\to\infty}(1/T)\int_0^T f(t)dt$.
   Postopek: zapiši Newtonov zakon v vektorski obliki, ga skalarno pomnoži z $\mathbf{r}$, prepiši izraz z uporabo odvoda $d/dt(\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}}) = d/dt\alpha$ in upoštevaj, da je količina $\alpha$ omejena (na tiru doseže neko največjo vrednost).

2. Pokaži virialni teorem še za množico delcev, ki med sabo delujejo prek potenciala $V(r)$, kjer je $r$ razdalja med paroma delcev!
   Postopek: zapiši Newtonov zakon za $i$-ti delec.

## 3 Vrteči sistemi

1. Gladko drsenje delca po ravni ploskvi opazujemo iz sistema, ki se vrti okrog navpične osi. Zapiši enačbi gibanja z uporabo koordinat $x', y'$ v vrtečem koordinatnem sistemu! Enačbi združi v eno enačbo z uporabo kompleksne pomožne spemenljivke $\zeta = x' + iy'$. Dobljeno diferencialno enačbo reši! Rezultat interpretiraj!
   Rezultat: $\zeta = (\zeta_0 + \zeta_1 t)e^{-i\omega_0 t}$, kjer sta $\zeta_0$ in $\zeta_1$ kompleksni konstanti. Rešitev ustreza rotaciji premoenakomernega gibanja $x = x_0 + v_x t, y = y_0 + v_y t$ za kot $\phi = \omega_0 t$.
   Postopek: $\ddot{x}'$.

2. Matematično nihalo dolžine $L$ in mase $m$ se nahaja na Zemlji na geografski širini $\varphi$. Zemlja se vrti okrog osi s kotno hitrostjo $\Omega$. Kakšno je gibanje nihala za majhne odmike iz ravnovesne lege glede na sistem $S'$, ki je postavljen v pritrdišče vrvice nihala na poziciji $\mathbf{R}$ glede na središče Zemlje? Sistem $S'$ opiši v kartezični bazi, kjer $\hat{\mathbf{i}}'$ kaže v smeri vzporednika, $\hat{\mathbf{j}}'$ v smeri poldnevnika in $\hat{\mathbf{k}}'$ prakovotno na površino Zemlje. Ob $t = 0$ je nihalo za $u_0$ izmaknjeno v smeri $\hat{\mathbf{i}}'$ iz ravnovesne lege.
   Rešitev: $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'(0) + u_0\cos(\omega_0 t)\big[\cos(\Omega\sin\varphi t)\hat{\mathbf{i}}' - \sin(\Omega\sin\varphi t)\hat{\mathbf{j}}'\big]$, $\omega_0 = g/L$, $\mathbf{r}'_0 = -L(\hat{\mathbf{k}}' + \boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{R}))$.
   Postopek: Newtonov zakon za vrteči sistem $S'$, $\mathbf{F_g} \approx -mg\hat{\mathbf{k}}'$, $\mathbf{F_v} \approx -mg\mathbf{r}'/L$. Poišči ravnovesno lego $\mathbf{r}'_0$, pri tem zanemari člen $\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}'_0)$. Razvij Newtonov zakon za majhne odmike $\mathbf{r}' = \mathbf{r}'_0 + \boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi} = u\hat{\mathbf{i}}' + v\hat{\mathbf{j}}'$, zanemari $\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}')$. Rešuj po komponentah, zanemari člene v smeri $\hat{\mathbf{k}}'$. Sistem enačb $(\hat{\mathbf{i}}')$ : $\ddot{u} - 2\dot{v}\Omega\sin\varphi + \omega_0^2 u = 0$ in $(\hat{\mathbf{j}}')$ : $\ddot{v} +$

$2\dot{u}\Omega\sin\varphi + \omega_0^2 v = 0$ združi v enačbo $(\hat{\mathbf{i}}') + i(\hat{\mathbf{j}}')$ in to reši preko vpeljave kompleksne spremenljivke $\gamma = u + iv$. Nastavek $\gamma = \gamma_0 e^{i\omega t}$, $\gamma_0 \in \mathbb{C}$ dobi iz začetnih pogojev in pri te upoštevaj $\omega_0 \ll \Omega$.

3. Matematično nihalo dolžine $L$ in mase $m$ se nahaja na severnem polu Zemlje. Zemlja se vrti okrog osi s kotno hitrostjo $\Omega$. Kakšno je gibanje nihala za majhne odmike iz ravnovesne lege glede na sistem $S'$, ki je postavljen v pritrdišče vrvice nihala na poziciji $\mathbf{R}$ glede na središče Zemlje? Sistem $S'$ opiši v kartezični bazi, kjer sta $\hat{\mathbf{i}}'$ in $\hat{\mathbf{j}}'$ pravokotna na $\hat{\mathbf{k}}'$, ki je prakovoten na površino Zemlje. Ob $t = 0$ je nihalo za $u_0$ izmaknjeno v smeri $\hat{\mathbf{i}}'$ iz ravnovesne lege. Rešitev poenostavi v dveh limitah: (a) $\omega_0 \ll \Omega$ in (b) $\omega_0 \approx \Omega$.
Rešitev: (a) $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'(0) + u_0\cos(\omega_0 t)\big[\cos(\Omega t)\hat{\mathbf{i}}' - \sin(\Omega t)\hat{\mathbf{j}}'\big]$, (b) $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'(0) + u_0\cos((\omega_0 - \Omega)t)\hat{\mathbf{i}}' - u_0\sin((\omega_0 - \Omega)t)\hat{\mathbf{j}}'$, $\omega_0 = g/L$, $\mathbf{r}_0' = -L\hat{\mathbf{k}}'$.
Postopek: Newtonov zakon za vrteči sistem $S'$, $\mathbf{F_g} \approx -mg\hat{\mathbf{k}}'$, $\mathbf{F_v} \approx -mg\mathbf{r}'/L$. Poišči ravnovesno lego $\mathbf{r}_0'$, pri tem zanemari člen $\boldsymbol{\Omega}\times(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}_0')$. Razvij Newtonov zakon za majhne odmike $\mathbf{r}' = \mathbf{r}_0' + \boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\xi} = u\hat{\mathbf{i}}' + v\hat{\mathbf{j}}'$. Rešuj po komponentah. Sistem enačb $(\hat{\mathbf{i}}') : \ddot{u} - 2\dot{v}\Omega + (\omega_0^2 - \Omega^2)u = 0$ in $(\hat{\mathbf{j}}') : \ddot{v} + 2\dot{u}\Omega + (\omega_0^2 - \Omega^2)v = 0$ združi v enačbo $(\hat{\mathbf{i}}') + i(\hat{\mathbf{j}}')$ in to reši preko vpeljave kompleksne spremenljivke $\gamma = u + iv$. Nastavek $\gamma = \gamma_0 e^{i\omega t}$, $\gamma_0 \in \mathbb{C}$ dobi iz začetnih pogojev.

4. Na geografski širini podano s kotom $\theta$ merjeno od severnega pola izkopljemo vodnjak navpično proti središču Zemlje. V vodnjak spustimo kamen. Zapiši enačbe gibanja v vrtečem sistemu v katerem vodnjak miruje kot funkcijo časa! Zanemari centrifugalni del sistemskih sil in enačbe gibanja reši. Koordinatni sistem izberi tako, da os $x'$ kaže v smeri vzporednika, os $z'$ pa navpično navzgor. Zapiši $x'(t)$, če kamen na začetku miruje pri $x' = y' = z' = 0$.
Rešitev: $x' = g\frac{\sin\theta}{2\Omega}(t - \frac{\sin(2\Omega t)}{2\Omega})$
Postopek: Zapiši enačbe gibanja po komponentah. Uvedi novi spremenljivki $\eta = \sin\theta z' - \cos\theta y'$ in (kompleksno) $\zeta = x' + i\eta$ in enačbe prepiši v $\ddot{\zeta} - 2i\Omega\dot{\zeta} = -ig\sin\ \theta$. To enačbo reši nastavek $\zeta = A\exp(i\Lambda t) + Bt + C$. Velja $\Lambda = 2\Omega$ in $B = g\sin\theta/2\Omega$. Upoštevaj še začetne pogoje in izpelji $x' = \mathrm{Re}\zeta$.

## 4 Magnetni monopol

1. Obravnavaj gibanje nabitega delca (masa $m$, naboj $e$) v polju magnetnega monopola $\mathbf{B} = \frac{\mu_0 e_m}{4\pi}\mathbf{r}/r^3$. Zapiši Newtonovo enačbo in pokaži, da velja $\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = 0$, $\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = 0$. Pokaži, da se ohranja količina $\mathbf{\Gamma_0} = \mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{r}} - g\mathbf{r}/r$. Po kakšni ploskvi se giblje delec in kako se velikost njegove hitrosti spreminja s časom?
   Rezultat: $v = v_0$ (konst.). Gibanja delca je omejeno na stožec z osjo $\Gamma_0$.
   Postopek: Sledi navodilu naloge. $d/dtv^2 = 2\dot{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{r}} = 0$. $\mathbf{\Gamma_0}\cdot\mathbf{r} = -gr = \Gamma_0 r\cos\alpha$. $\alpha =$ konst, torej se giblje po stožcu.

2. Nadaljevanje prejšnje naloge. Izberi koordinatni sistem tako, da os $\hat{k}||\mathbf{\Gamma_0}$, magnetni monopol pa je v izhodiššu. Definirajmo $\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{r}} = rv_0\cos(\theta)$. Izračunaj $r(t)$, in $\phi(t)$.

## 5 Lagrangeov formalizem

1. Obravnavaj gibanje sistema para škripcev in uteži, ki ga prikazuje slika

2. Utež z maso $m_1$ postavimo na kos ledu z maso $m_2$ kot kaže slika. Uporabi Lagrangeov formalizem in izpelji, kako se sistem giblje! Zapiši količino, ki se zaradi translacijske simetrije ohranja! Izračunaj premik $s(t)$, uteži po klancu v času $t$, če ob $t = 0$ sistem miruje!
   Postopek: Zapiši kinetični energiji obeh teles v mirujočem koordinatnem sistemu $x, y$. Potem izraz za kinetično energijo poenostavi z uporabo koordinat $x$ (premik ledenega klanca), $s$ (premik uteži po klancu). Zapiši tudi potencialno energijo. Zapiši Lagrangeovi enačbi za $x$ in $s$. Katera količina se ohranja? Z upoštevanjem ohranjene količine poenostavi enačbo za $s$ in jo reši. Ali je rezultat v limitnih primerih $m_1/m_2 \to 0, \infty$ smiselen?
   Rezultat: $l = at^2/2$. $a = g\sin\phi(m_1 + m_2)/(m_2 + m_1\sin^2\phi)$.

3. Na vodoravno vodilo nadenemo maso $m_1$, ki bo vodilu gladko drsi (koordinata $x$). Na to maso pritrdimo prečko dolžine $l$ na njo pa še eno točkasto telo $m_2$. Naj se prečka prosto pregiblje v ravnini, ki vsebuje prečko in navpičnico, kot $\phi$. Kako se sistem giblje? Uporabi Lagrangeov formalizem. Izpelji frekvenco nihanja!
   Rezultat: $\omega^2 = (1 + m_2/m_1)g/l$.
   Postopek: Zapiši Lagrangeovo funkcijo, izpelji enačbi gibanja. Sistem ima ohranjeno količino $\partial L/\dot{x}$, ki ustreza gibalni količini težišča. Enačbo z uporabo ohranjene količine

prepiši v enačbo za $\phi$, ohrani le člene, ki linearni v $\phi$ (in njegovih odvodih) in tako izpelji enačbo nihanja.

4. Na vodilo, ki se nahaja v navpični ravnini $(x, y)$, kjer $x$ kaže v vodoravni smeri in položaj parametrizirano z odmikom vzdolž vodila $s$ ( $(x(s), y(s))$), vpnemo utež z maso $m$, ki čuti gravitacijski pospešek $g$. Poišči obliko vodila, izraženo kot funkcijo $\varphi = \arctan \frac{dy}{dx}$, da se bo utež po njem gibala harmonsko! Harmonsko nihanje opiše Lagrangeova funkcija $L = m\dot{s}^2/2 - ks^2/2$. Kakšen je nihajni čas $T$?
   Rezultat: $x(\varphi) = r(2\varphi + \sin(2\varphi) + 4c)$, $y(\varphi) = r(1 - \cos(2\varphi))$, $T = 4\pi\sqrt{r/g}$, $r = mg/4k$.
   Postopek: Poišči vez, da bo Lagrangeova funkcija delca $L = m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 - mgy$ harmonske oblike. Iz pogoja $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = \dot{s}^2$ dobiš $((\frac{dx}{ds})^2 + (\frac{dy}{ds})^2) = 1$, iz tega izrazi $s$ in vstavi v drugi pogoj $mgy = ks^2/2$, dobiš $\frac{dy}{dx} = \tan\varphi = \sqrt{2ky/(mg - 2ky)}$.

5. Navpično vzmetno nihalo

   Na strop je z enim koncem fiksno vpeta vzmet dolžine $l$ s koeficientom raztezka $k$. Na prosti konec je pritrjena utež z maso $m$. Zapiši Lagrangeovo funkcijo tega sistema in izpelji enačbe gibanja. Poišči ravnovesne lege in določi njihovo stabilnost. Gibanje sistema razvij okrog stabilne ravnovesne lege in poišči lastni frekvenci nihanja.

6. Vrteča spirala

   Košček z maso $m$ se giblje brez trenja po spirali, ki jo v cilindričnem sistemu opiše $z = 0$, $r = k\varphi$. Spirala se vrti okrog navpične simetrijske osi s kotno hitrostjo $\Omega$. Zapiši hitrost, kinetično energijo in Lagrangeovo funkcijo v vrtečem sistemu, v katerem spirala miruje. Ob $t = 0$ košček miruje glede na spiralo na $r = r_0$. Zapiši enačbe gibanja v vrtečem sistemu in razišči, kako se bo košček gibal po dolgem času, če se spirala vrti v isti smeri kot je odvijajo navoji in kako, če se vrti v obratni smeri.

7. Utež, pripeta na vrtiljak

   Na vrtiljak, ki se vrti okrog navpičnice s kotno hitrostjo $\Omega$, je preko brezmasne palice dolžine $l$ pripeta utež z maso $m$. Zapiši hitrost, kinetično energijo in Lagrangeovo funkcijo v vrtečem sistemu, v katerem vrtiljak miruje. Ob $t = 0$ utež pod kotom $\phi < \frac{\pi}{2}$, ki je merjen od tal do uteži, miruje glede na vrtiljak. Zapiši enačbe gibanja v vrtečem se sistemu in poišči ravnovesni kot $\phi_0$ in frekvenco nihanja okrog te lege.

# 6 Centralni potencial

1. Zapiši Lagrangeovo funkcijo za gibanje delca z maso $m$ v poljubnem centralnem potencialu $V(r)$. Uporabi sferične koordinate in pokaži, da se delec giblje v ravnini! Rezultat: $\cot\theta = A(\phi - \phi_0$, kar ustreza gibanju po ravnini, to je $\hat{n}\cdot\mathbf{r} = 0$ za neki smerni vektor $\hat{n}$. Namig: Zanima nas $\theta(\phi)$ zato uporabi pri enačbi gibanja za $\theta$ zvezo $d/dt = \dot{\phi} d/d\phi$.
   Postopek: Zapiši enačbe gibanja. $\phi$ je ciklična koordinata, ohranjena količina $p_\phi$. Velja $\dot{\phi} = p_\phi/(mr^2\sin^2(\theta))$. Enačba gibanja za $\theta$ je $(d/dt)\dot{\theta} = \cos(\theta)\sin(\theta)(\dot{\phi})^2$. Enačbo poenostavi z dvakratno uporabo namiga in z uporabo $(\cot f)' = -1/\sin^2 f$ v obliko $d^2/d\phi^2(-\cot\theta) = \cot\theta$, kar reši $\cot\theta = A(\phi - \phi_0$. Potem izraziš enačbo ravnine v normalni obliki $\hat{n}\cdot\mathbf{r} = 0$. Zapišeš $\mathbf{r}$ v sferičnih koordinatah $(r, \phi, \theta)$ in $\hat{n}$ tudi $(\phi_0, \theta_0)$ in pokažeš, da velja zveza $\cot\theta = A(\phi - \phi_0)$.

2. Poišči enačbe orbite $r(\varphi)$ za Keplerjev potencial $V(r) = -k/r$, $k > 0$.
   Rezultat: $r(\varphi) = p/(1 - \varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0))$, $p = p_\varphi^2/(km)$, $\varepsilon = \sqrt{1 + 2Hp_\varphi^2/(mk^2)}$, kjer je $H$ celotna energija in $p_\varphi$ velikost vrtilne količine.
   Postopek: Iz enačbe za ohranitev energije $H = m\dot{r}^2/2 + p_\varphi^2/(2mr^2) - k/r$ izrazi $\dot{r}^2$. Zamenjaj odvod po času z odvodom po $\varphi$: $\frac{d}{dt} = p_\varphi^2/(mr^2)\frac{d}{d\varphi}$ in vpelji novo spremenljivko $u = 1/r$. Odvajaj enačbo po $\varphi$ in dobiš $\frac{du}{d\varphi}(\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u - km/p_\varphi^2) = 0$. Rešitev je $u(\varphi) = km/p_\varphi^2 - B\cos(\varphi - \varphi_0)$. Konstanto $B$ določi iz energijske enačbe v točki $\varphi = \varphi_0$, kjer je $\dot{r}|_{\varphi_0} = \frac{du}{d\varphi}|_{\varphi_0} = 0$

3. Obravnavaj sipanje dveh pozitivno nabitih delcev, ki se čutita s Coulomskim potencialom $V(r) = k/r$. Delec z majhno maso $m$ prileti iz neskončne oddaljenosti s hitrostjo $v_0$ in vpadnim parametrom $b$ proti delcu z ogromno maso $M \gg m$, ki miruje. Privzemi, da težji delec ves čas miruje. Izračunaj diferencialni sipalni presek $\sigma(\vartheta) = b/\sin\vartheta|db/d\vartheta|$ in totalni presek $\sigma_{\text{tot}} = \int\sigma(\vartheta)2\pi\sin\vartheta d\vartheta$, kjer je $\vartheta$ odklonski kot.
   Rezultat: $\sigma(\vartheta) = (k/4H)^2\sin^{-4}(\vartheta/2)$, $\sigma_{\text{tot}} = \infty$, kjer je $H$ celotna energija.
   Postopek: Lahek delec se giblje po hiperboli $r(\varphi) = p/(\varepsilon\cos(\varphi - \varphi_0) - 1)$, $p = p_\varphi^2/(mk)$, $p_\varphi = mv_0 b$, $\varepsilon = \sqrt{1 + 2Hp_\varphi^2/(mk^2)}$. Izberi $\varphi = 0$, ko je lahek delec še neskončno daleč, od tod sledi $\cos\varphi_0 = 1/\varepsilon$. Ker $r = r_{\text{min}}$ pri $\varphi_{\text{min}} = \varphi_0$ (simetrala hiperbole), je odklonski kot $\vartheta = \pi - 2\varphi_0$. Iz zveze $\cos\varphi_0 = \sin(\vartheta/2) = 1/\varepsilon$ izračunaj $b(\vartheta)$, vstavi v formulo za $\sigma(\vartheta)$.

# 7 Vrtavka v težnostnem polju

1. Definicije. $L = J_1/2(\dot{\phi}^2 \sin^2\theta + \dot{\theta}^2) + J_3/2(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})^2 - mgl\cos\theta$. $p_\psi := J_1 a = J_3(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) = J_3\omega_3$. $p_\phi = J_1 b = J_1\dot{\phi}\sin^2\theta + J_3\cos\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$. $\dot{\phi} = (b - acos\theta)/\sin^2\theta = (b-au)/(1-u^2)$. $u = \cos\theta$. $\dot{\psi} = p_\psi/J_3 - \dot{\phi}\cos\theta$. $\dot{u}^2 = f(u) = (\alpha - \beta u)(1-u^2) - (b-au)^2$. $\alpha = 2(E - J_3\omega_3^2/2)/J_1$. $\beta = 2mgl/J_1$.

2. Izpelji pogoje pri katerih lahko pride do enakomerne precesije (torej, zvezo med $\omega_3$ in $\cos(\theta)$). Pokaži, da dobiš dve neodvisni rešitvi. Fizikalno ju interpretiraj v primeru hitre vrtavke ($\omega_3$ velik).
   Rezultat: Iz rešljivosti kvadratne enačbe dobimo pogoj $(J_3\omega_3)^2 > 4J_1 mgl\cos(\theta)$. Za hitro vrtavko je ena rešitev $\dot{\phi} = J_3\omega_3/J_1\cos(\theta)$, ki ustreza prosti precesiji ($mgl$ zanemarljiv), druga rešitev je $\dot{\phi} = mgl/J_3\omega_3$, kar lahko pojasnimo z enačbo $\mathbf{M} = \dot{\mathbf{L}}$, če vzamemo $\mathbf{L} \approx J_3\omega_3\hat{k}'$, kar velja kadar je $\dot{\phi} \ll \dot{\psi}$.
   Postopek: $u_0$ mora biti dvojna ničla $f(u)$, torej $f(u_0) = 0$ in $f'(u_0) = 0$. Dobljeni enači poenostavi z uporabo $\dot{\phi} = (b-au)/\sin^2\theta$ in ju združ v enačbo oblike $\beta/2 = a\dot{\phi} - u_0\dot{\phi}^2$. Kvadratna enačba ima rešitev samo za dovolj veliko $\omega_3$.Splošna rešitev kvadratne enačbe je $\dot{\phi} = (J_3\omega_3/J_1 \pm \sqrt{J_3\omega_3^2/J_1^2 - 4\cos\theta mgl/J_1})/2\cos\theta$. Za dovolj velike $\omega_3$ razviješ in interpretiraš rešitev s hitro precesijo, kjer navor sile teže igra zanemarljivo vlogo in počasno precesijo, kjer je vrtilna količina v dobrem približu podana z vrtenjem vrtavke okrog njene simetrijske osi.

3. Izpelji pogoj za spečo vrtavko, torej vrtavko, ki se stabilno vrti pri $\theta = 0$.
   Rezultat: $J_3\omega_3^2/2 > 2(J_1/J_3)mgl$.
   Postopek: f(u) mora imeti dvojno ničlo pri $u = 1$, da je rešitev stabilna pa mora biti tretja ničla pri $u > 1$. Izpelješ $a = b$, $\alpha = \beta$ in iz pogoja za tretjo ničlo dobiš rezultat.

4. Obravnavaj gibanje spuščene vrtavke. Vrtavko, ki se s kotno frekvenco $\omega_3$ vrti okrog simetrijske osi, sicer pa miruje ($\dot{\phi} = \dot{\theta} = 0$) ob $t = 0$ spustimo z višine podane s kotom $\theta = \theta_0$ in jo prepustimo, da se prosto giblje. Privzemi, da je vrtavka hitra, ($J_3^2\omega_3^2/J_1 \gg mgl$) in izpelji gibanje vrtavke!
   Rezultat: $\cos(\theta) = \cos\theta_0 + x_1/2(1 - \cos(at))$, kjer je $x_1 = \sin^2\theta_0\beta/a^2$. $\dot{\phi} = \beta/2a(1 - \cos(at))$
   Postopek: Iz začetnih pogojev $\dot{\theta} = 0, \dot{\phi} = 0$ izpelješ $b - au_0 = 0$ in $\alpha - \beta u_0 = 0$. Zapišeš torej lahko $f(u) = (u_0 - u)[\beta(1-u^2) - a^2(u_0 - u)]$. Ena ničla $f(u)$ je $u_0$,

drugi dve rešitvi $u_1$ poiščeš z rešitvijo kvadratne enačbe v []. Če definiraš $x = u_0 - u$ in $x_1 = u_0 - u_1$, lahko prepišeš kvadratno enačbo v obliko $x_1^2 + px_1 - q = 0$, kjer je $p = a^2/\beta - 2u_0$, $q = 1 - u_0^2 = \sin^2\theta_0$. Potem privzemi, da je vrtavka hitra, kar ustreza $p \gg q$. Fizikalna rešitev kvadratne enačbe, ki ustreza $-1 < u < 1$, da $x_1 \approx q/p = \sin^2\theta_0\beta/a^2 = \sin^2\theta_0 2mglJ_1/(J_3^2\omega_3^2$. Za izpeljavo gibanja prepišeš $f(u)$ v obliko $f(u) = a^2x(x_1 - x)$. Definiraš $y = x - x_1/2$, izpelješ $\dot{y}^2 + a^2y^2 = a^2x_1^2/4$. To enačbo reši $y = -x_1/2\cos(at)$, torej $x = x_1/2(1 - \cos(at)$ (druge rešitve ne ustrezajo začetnim pogojem). $\cos\theta$ torej oscilira kot funkcija časa kot izpeljano zgoraj. Izpelješ še $\dot{\phi} = a(u_0 - u)/\sin^2\theta \approx a(x_1/2)(1 - \cos(at))/\sin^2\theta_0$.

# 8 Mala nihanja

1. Obravnavamo gibanje dveh palic dolžine $l$ in mas $m_1$ in $m_2$, ki sta v tja vrtljivo vpeti. Pritrdišči sta na razdalji $a$ in na višini $h$ od tal ju povezuje vzmet s koeficientom $k$ nerztegnjene dolžine $a$. Zapiši Lagrangeovo funkcijo, enačbe gibanja, poišči ravnovesne lege, lastne frekvence in enačbo gibanja, če ima ob $t = 0$ ena od palic kotno hitrost $v_{\phi 0}$.

# 9 Hamiltonov formalizem

1. Masi na obročih

   Dve uteži z masama $m_1$ in $m_2$ se gibljeta po dveh obročih, prvi ima radij $r_1$ in središče v $P_1 = (0, 0, 0)$ in se nahaja v ravnini $z = 0$, drugi pa radij $r_2$ s središčem v $P_2 = (0, 0, h)$ in se nahaja v ravnini $z = h$. Delca povezuje vzmet s koeficientom $k$ in maso $m_v$, ki je enakomerno porazdeljena po njej. Preko Hamiltonovega formalizma poišči lastno frekvenco nihanja!